محدّد جیومیٹری

گورکھ پرشاد

اور

اچ سی گپتا

مترجم

نثار احمد خاں

ترقی اردو بیورو نئی دہلی

مجرّد جیومیٹری

گورکھ پرشاد

اور

ایچ سی گپتا

مترجم

نثار احمد خاں

ترقی اردو بیورو نئی دہلی

MOHADDAD GEOMATERY
By : Gorakh Parshad & H.C. Gupta
Translated by : Nisar Ahmad Khan

© ترقی اردو بیورو، نئی دہلی

سنہ اشاعت :- اپریل، جون 1985 شک 1907
پہلا ایڈیشن :- 1000
قیمت :- =/35 روپے
سلسلۂ مطبوعات نمبر :- 479

ناشر :- ڈائرکٹر ترقی اردو بیورو، بلاک 8 آر کے پورم نئی دہلی 110066
طابع :- سپر پرنٹرز ساؤتھ انارکلی، نئی دہلی 51

پیش لفظ

کوئی بھی زبان یا معاشرہ اپنے ارتقاء کی کس منزل میں ہے، اس کا اندازہ اس کی کتابوں سے ہوتا ہے۔ کتابیں علم کا سرچشمہ ہیں، اور انسانی تہذیب کی ترقی کا کوئی تصور ان کے بغیر ممکن نہیں۔ کتابیں دراصل وہ صحیفے ہیں جن میں علوم کے مختلف شعبوں کے ارتقاء کی داستان رقم ہے اور آئندہ کے امکانات کی بشارت بھی ہے۔ ترقی پذیر معاشروں اور زبانوں میں کتابوں کی اہمیت اور بھی بڑھ جاتی ہے۔ کیونکہ سماجی ترقی کے عمل میں کتابیں نہایت موثر کردار ادا کر سکتی ہیں۔ اُردو میں اس مقصد کے حصول کے لیے حکومت ہند کی جانب سے ترقی اُردو بیورو کا قیام عمل میں آیا ہے ملک کے عالموں، ماہروں اور فن کاروں کا بھرپور تعاون حاصل ہے

ترقی اُردو بیورو معاشرہ کی موجودہ ضرورتوں کے پیش نظر اب تک اُردو کے کئی ادبی شاہکار، سائنسی علوم کی کتابیں، بچوں کی کتابیں، جغرافیہ، تاریخ، سماجیات، سیاسیات، تجارت زراعت، لسانیات، قانون، طب اور علوم کے کئی دوسرے شعبوں سے متعلق کتابیں شائع کرچکا ہے اور یہ سلسلہ برابر جاری ہے۔ بیورو کے اشاعتی پروگرام کے تحت شائع ہونے والی کتابوں کی افادیت اور اہمیت کا اندازہ اس سے بھی لگایا جاسکتا ہے کہ مختصر عرصے میں بعض کتابوں کے دوسرے تیسرے ایڈیشن شائع کرنے کی ضرورت محسوس ہوئی ہے۔ بیورو سے شائع ہونے والی کتابوں کی قیمت نسبتاً کم رکھی جاتی ہے تاکہ اُردو والے ان سے زیادہ سے زیادہ فائدہ اُٹھا سکیں۔

زیرِ نظر کتاب بیورو کے اشاعتی پروگرام کے سلسلہ کی ایک اہم کڑی ہے۔ امید کہ اُردو حلقوں میں اسے پسند کیا جائے گا۔

ڈاکٹر فہمیدہ بیگم
ڈائریکٹر ترقی اُردو بیورو

دیباچہ

محدد جیومیٹری پر یہ بنیادی کتاب خاص طور پر اُترّ پردیش کے انٹرمیڈیٹ کے طلبا کے لیے لکھی گئی ہے لیکن یہ ہندوستان کے دوسرے انٹرمیڈیٹ اور یونیورسٹیوں کے مساوی امتحانات کے لیے بھی موزوں ثابت ہوگی۔ اس بات کی حتی الامکان کوشش کی گئی ہے کہ مضمون کے بارے میں بحث آسان سے آسان تر ہو۔ اس کتاب میں $\frac{a}{0}$ برابر ہے لامحدود جیسی لغو باتیں نہیں ہیں۔ بنیادی موضوعات جیسے طریق، مماثلہ اور مساوات، متغیّر اور پیرامیٹر، فرضی نقاط وغیرہ، جو طلبا کے لیے اکثر و بیشتر رکاوٹ بن جاتے ہیں، زیادہ آسان الفاظ میں واضح کیے گئے ہیں۔

مثالیں وافر تعداد میں اور ترتیب وار دی گئی ہیں۔ سوالات کے ساتھ امتحانات کے نام اس مقصد سے دیے گئے ہیں تاکہ طالب علم کو معلوم ہو جائے کہ ان امتحانات میں سوالات کس قسم اور کس معیار کے ہوتے ہیں۔

یہ ایڈیشن سابقہ ایڈیشن کے مقابلے میں زیادہ آسان ہے۔ غلطیاں دُور کردی گئی ہیں اور مشکل مثالوں کی بجائے آسان مثالیں شامل کی گئی ہیں۔ اُمید کی جاتی ہے کہ یہ تبدیلیاں اس کتاب کو زیادہ مفید بنادیں گی۔

کیوں کہ انٹرمیڈیٹ امتحان کے نصاب میں علم احصا نے استحکام حاصل کرلیا ہے اس لیے خطوط مماس کی مساوات حاصل کرنے کے لیے تفرّقی طریقے اختیار کیے گئے ہیں۔ جدید نصاب کی ضروریات کو پورا کرنے کے لیے مکانی زائد اور پولر محدّدات پر ایک ایک باب کا اضافہ کردیا گیا ہے۔

ایچ۔ سی۔ گپتا

فہرست مضامین

باب

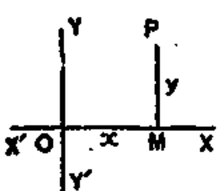
I.	نقطوں کے محدّدات	9
II.	طریق اور اس کی مساوات	22
III.	خطِ مستقیم	27
IV.	خطِ مستقیم (مسلسل)	40
V.	متفرق مسئلے	63
VI.	دو خطِ مستقیم ظاہر کرنے والی مساوات	82
VII.	دائرہ	106
VIII.	دائروں کے مماسی خطوط	122
IX.	قطبی خط، جذری محور وغیرہ	142
X.	مکافی	170
XI.	مکافی (مسلسل)	189
XII.	ناقص	210
XIII.	ناقص (مسلسل)	227
XIV.	مکافی زائد	247
XV.	قطبی محدّدات	275
	جوابات	286
	اصطلاحات	300

باب 1
نقطوں کے محدّدات[1]

1.1 ۔ تعریف : محدّد جیومیٹری جیومیٹری کی وہ شاخ ہے جس میں ہم دو عددوں کا، جنھیں ہم محدّدات کہتے ہیں، استعمال کرکے مستوی میں کسی نقطہ کے مقام کو ظاہر کرتے ہیں۔ محدّد جیومیٹری عام جیومیٹری کے مقابلے میں زیادہ پُراثر ہے کیوں کہ اس میں ہم الجبرا کے طریقوں کا استعمال کرسکتے ہیں۔

سب سے معمولی محدّدات کا ہم اس طرح ذکر کرسکتے ہیں۔

ماناکہ $X'OX$ اور $Y'OY$ دو عمودی خطوط ہیں جو ایک دوسرے کو نقطہ O پر کاٹتے ہیں۔ ماناکہ P کوئی نقطہ ہے۔



شکل 1

P سے OX پر عمود PM کھینچا۔ تب لمبائیاں OM اور PM نقطہ P کے **مستطیل نما کارتیزی محدّدات** یا مختصراً **محدّدات** کہلاتے ہیں اور عام طور پر انھیں بالترتیب x اور y سے ظاہر کرتے ہیں۔

خطوطِ مستقیم OX اور OY جن کے حوالے سے محدّدات ناپے جاتے ہیں، **محاور حوالہ** کہلاتے ہیں۔ OX کو x-محور اور OY کو y-محور کہتے ہیں۔ محور کے نقطہ تقاطع کو مبدا کہتے ہیں۔

OM یا x کو نقطہ P کا **طول** یا x-محدّد اور MP یا y کو **عرض** یا

---

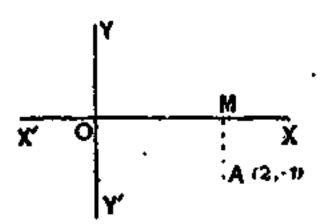
[1] ہماری وضع اصطلاحات کمیٹی نے coordinate کے لیے محدّد اور مختص دونوں اصطلاحیں منظور کی ہیں۔ مترجم نے محدّد اور جمع کا صیغہ محدّدات استعمال کیا ہے۔

y ۔ محدّد کہتے ہیں۔ محدّدات ہمیشہ بریکٹوں کے اندر لکھے جاتے ہیں، پہلے طول اور پھر عرض لکھا جاتا ہے جو ایک کاما کے ذریعے جُدا کیے جاتے ہیں۔ اس طرح ہم کہتے ہیں کہ P نقطہ (x, y) ہے یعنی P وہ نقطہ ہے جس کے طول اور عرض لمبائی میں بالترتیب x اور y اکائی کے ہیں۔

1.2 علامتوں کے متعلق روایت :

نقطہ کے طول اور عرض اپنی صحیح علامتوں کے ساتھ ظاہر کیے جانے چاہئیں۔ اس مقصد کے لیے OX کی سمت میں ناپی گئی لمبائیاں مثبت اور اس کی مخالف سمت میں ناپی گئی لمبائیاں منفی مانی جاتی ہیں۔ اسی طرح OY کی سمت میں ناپی گئی لمبائیاں مثبت اور اس کی مخالف سمت میں ناپی گئی لمبائیاں منفی مانی جاتی ہیں۔

اس طرح مندرجہ ذیل حاشیہ کی شکل میں نقطہ A کے محدّدات $(2, -1)$ ہیں۔



شکل 2

کیوں کہ MA کی لمبائی OY' سمت میں یعنی OY کی مخالف سمت میں ہونے کی وجہ سے منفی ہے۔

خطوطِ مستقیم $X'OX$ اور $Y'OY$ بے حد لمبے مانے جاتے ہیں۔ وہ مستوی کو چار حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ان میں سے ہر ایک حصہ ایک ربع کہلاتا ہے۔ XOY پہلا ربع ہے YOX' دوسرا، $X'OY'$ تیسرا اور $Y'OX$ چوتھا۔ تھوڑا سا غور کرنے پر یہ ظاہر ہو جائے گا کہ اگر نقطہ (x, y) پہلے ربع میں ہے تو x اور y دونوں مثبت ہیں، اگر نقطہ دوسرے ربع میں ہے تو x منفی اور y مثبت ہیں؛ اگر نقطہ تیسرے ربع میں ہے تو x اور y دونوں منفی ہیں اور اگر نقطہ چوتھے ربع میں ہے تو x مثبت اور y منفی ہیں۔

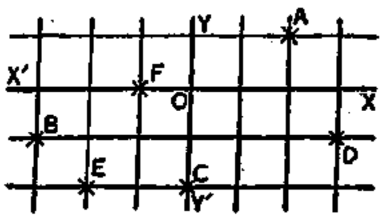
جب نقطہ کے محدّدات دیے ہوئے مانے جاتے ہیں تب انھیں حروفِ تہجّی کے شروع کے حروف کے ذریعے دکھایا جاتا ہے، جیسے (a, b) یا (h, k) کے ذریعے۔ جب

محدّدات دیے ہوئے نہیں ہوتے تو انھیں اکثر (x, y) کے ذریعے دکھایا جاتا ہے۔ اگر دو یا دو سے زائد نقطے نامعلوم محدّدات کے ہوں تو ڈیشوں یا لواحق کا استعمال کیا جاتا ہے، جیسے (x', y')، (x'', y'')... یا (x_1, y_1)، (x_2, y_2) ...

1.3 ایک کی ایک سے مطابقت :

نقطہ کے محدّدات دیے ہونے پر ہم اس کی ترسیم کرسکتے ہیں یعنی اس کا مقام شکل میں دکھا سکتے ہیں۔ اس کے برعکس اگر شکل میں نقطہ ترسیم کیا ہوا ہو تو ہم اس کے محدّدات ناپ کر معلوم کرسکتے ہیں۔ اس میں غور طلب بات یہ ہے کہ دیے ہوئے **ایک جوڑی محدّدات کی مطابقت سے ہمیں صرف ایک نقطہ ملتا ہے اور اس کے برعکس ایک نقطہ کی مطابقت کے لیے صرف ایک جوڑی محدّدات** ہوتے ہیں۔ کارتیزی محدّدات کی یہ ایک عظیم خاصیت ہے۔ آگے ہم دیکھیں گے کہ قطبی محدّدات میں یہ خاصیت نہیں ہے۔

مشق 1



شکل 3

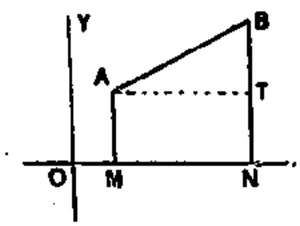
1. ساتھ کی شکل میں نشان لگے ہوئے نقطوں کے محدّدات پڑھیے۔
2. ان نقطوں کی ترسیم کیجیے جن کے محدّدات (2, 3)، (4, 0)، (−5, −2)، (−3, 2)، (0, −4) اور (2, −3) ہیں۔
3. مبدا کے محدّدات کیا ہیں ؟
4. y- محور پر واقع کسی نقطہ کا طول کیا ہے ؟
5. اگر نقطہ x - محور پر ہے تو دونوں میں سے اس کا کون سا محدّد معلوم ہے ؟
6. ایک مربع کے مرکز سے دو محور گزرتے ہیں اور وہ مربع کے ضلعوں کے متوازی ہیں۔ اگر مربع کا ضلع $2a$ ہو تو مربع کے راسوں کے محدّدات بتائیے۔

مبدا ایک مستطیل کے مرکز پر لیا گیا ہے جس کے ضلعے $2a$ اور $2b$ لمبائی کے ہیں اور x- محور $2a$ والے ضلع کے متوازی ہے۔ مستطیل کے راسوں کے محددات بتائیے۔

1.4. دو نقطوں کے درمیان کا فاصلہ:

دو دیے ہوئے نقطوں کے درمیان کا فاصلہ معلوم کرنا۔ مان لیا A اور B دو دیے ہوئے نقطے ہیں جن کے محددات بالترتیب (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) ہیں۔ فاصلہ AB کو x_1، y_1، x_2، y_2 کے ذریعے ظاہر کرنا مقصود ہے۔

A اور B سے x- محور پر عمود AM اور BN کھینچیے۔ A سے BN پر عمود AT کھینچیے۔ تو



شکل 4

$OM = x_1$، $MA = y_1$، $ON = x_2$ اور $NB = y_2$،

اس لیے

$$AT = MN = ON - OM = x_2 - x_1$$

اور

$$TB = NB - NT = NB - MA = y_2 - y_1$$

اس لیے $\triangle ATB$ سے، جس میں T پر زاویہ قائمہ ہے،

$$AB^2 = AT^2 + TB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

یعنی نقطوں (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) کے درمیان کا فاصلہ:

$\sqrt{\{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\}}$ ہے۔

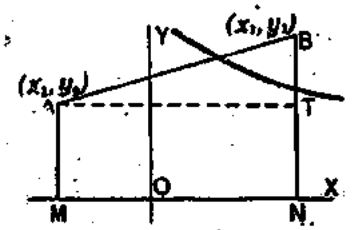
ضمنی نتیجہ۔ نقطہ (x, y) کا مبدا سے فاصلہ $\sqrt{(x^2 + y^2)}$ ہے۔

نوٹ 1: ظاہر ہے دو نقطوں کے درمیان کا فاصلہ اس طرح بھی دکھایا جا سکتا ہے:

$\sqrt{\{}$(x- محددات کے درمیان کا فرق$)^2$ + (y- محددات کے درمیان کا فرق$)^2\}$

نوٹ 2: یہ فارمولا اس حالت کے لیے ثابت کیا گیا ہے جب دونوں نقطے پہلے ہی ربع میں

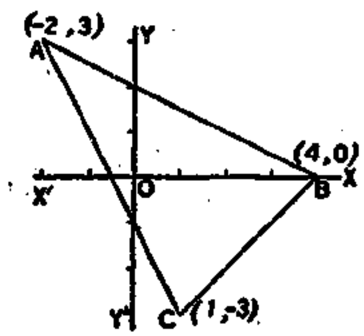
ہوں لیکن فارمولا نقطوں کی تمام حالتوں کے لیے صحیح ہے۔



شکل 5

مثلاً، اگر نقطہ $A(x_1, y_1)$ دوسرے ربع میں ہے تو x_1 کوئی منفی عدد ہے اور لمبائی $MO=-x_1$، جہاں $-x_1$ مثبت عدد ہے۔ اس لیے $MN=MO+ON=-x_1+x_2$، جیسا پہلی شکل میں ہے۔

مثال: دکھائیے کہ نقطے $(-2, 3)$, $(4, 0)$, $(1, -3)$ ایک مساوی الساقین مثلث کے راس ہیں۔



شکل 6

مان لیا کہ دیے ہوئے تین نقطے بالترتیب A, B, C ہیں یعنی A کے محدّدات $(-2, 3)$، B کے $(4, 0)$ اور C کے $(1, -3)$ ہیں تو

$$AB^2=(-2-4)^2+(3-0)^2=45,$$

$$BC^2=(4-1)^2+\{0-(-3)\}^2=18,$$

اور

$$AC^2=(-2-1)^2+\{3-(-3)\}^2=45.$$

اس لیے $AB=AC$ یعنی مثلث مساوی الساقین ہے۔

مشق 2

1. مندرجہ ذیل نقطوں کے درمیان کا فاصلہ معلوم کیجیے:

(i) $(3, 6), (0, 2)$; (ii) $(-2, 6), (3, -6)$; (iii) $(a, b), (-b, a)$;
(iv) $(a, b), (a+r\cos a, b-r\sin a)$.

2. اگر کسی نقطہ کی، نقطہ $(4, 3)$ سے دوری $\sqrt{10}$ ہو اور اس نقطہ کا عرض اس کے طول کا دوگنا ہو تو اس نقطہ کے محدّدات نکالیے۔

3. ثابت کیجیے کہ $(-2, 3)$، $(3, 8)$ اور $(4, 1)$ ایک مساوی الساقین مثلث -

بناتے ہیں۔

(کشمیر 1960)

4. ثابت کیجیے کہ نقطہ $(-1, 2)$ ایک دائرے کا مرکز ہے جو نقطوں $(-3, 11)$ ، $(5, 9)$ ، $(8, 0)$ اور $(6, 8)$ سے گزرتا ہے۔ دائرے کا نصف قطر نکالیے۔

5. ثابت کیجیے کہ نقطے $(2, -2)$، $(8, 4)$، $(5, 7)$ اور $(-1, 1)$ ایک مستطیل کے راس ہیں۔

(علی گڑھ 1958)

6. دکھائیے کہ نقطے $(1, -2)$ ، $(3, 0)$ ، $(1, 2)$ اور $(-1, 0)$ ایک مربع کے راس ہیں۔

(الٰہ آباد 1966)

7. اگر نقطہ (x, y) نقطوں $(a+b, b-a)$ اور $(a-b, a+b)$ سے برابر فاصلہ ہو تو ثابت کیجیے کہ $bx = ay$

(کشمیر 1960)

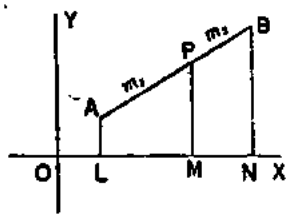
8. ثابت کیجیے کہ نقطے $(2, -2)$، $(-2, 1)$، $(5, 2)$ ایک قائمہ زاویہ مثلث کے راس ہیں۔ مثلث کا رقبہ اور وتر معلوم کیجیے۔

(الہ باد 1962)

1.5. دو نقطوں کو ملانے والے خطِ مستقیم کو دی ہوئی نسبت میں تقسیم کرنے والا نقطہ:

اس نقطہ کے محدّدات معلوم کرنا جو دو دیے ہوئے نقطوں کو ملانے والے خطِ مستقیم کو دی ہوئی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

مان لیا A اور B دو دیے ہوئے نقطے ہیں اور (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) ان کے محدّدات ہیں۔ مان لیا AB پر P وہ نقطہ ہے جو AB کو دی ہوئی نسبت



شکل 7

$m_1 : m_2$ میں تقسیم کرتا ہے۔

تو P کے محدّدات معلوم کرنے ہیں، مان لیا وہ (x, y) ہیں۔

OX پر عمود AL, PM, BN کھینچیے، تو عام جیومیٹری کے ذریعے

$$\frac{LM}{MN}=\frac{AP}{PB}=\frac{m_1}{m_2}. \qquad \ldots \qquad (1)$$

لیکن

$$LM=OM-OL=x-x_1,$$

اور اسی طرح

$$MN=x_2-x.$$

مساوات (1) میں ان قیمتوں کو رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{m_1}{m_2},$$

i.e. $$m_2x-m_2x_1=m_1x_2-m_1x.$$

جس سے

$$\mathbf{x}=\frac{\mathbf{m_1x_2+m_2x_1}}{\mathbf{m_1+m_2}}.$$

اسی طرح

$$\mathbf{y}=\frac{\mathbf{m_1y_2+m_2y_1}}{\mathbf{m_1+m_2}}.$$

ضمنی نتیجہ ۔ نقطوں (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) کو ملانے والے خطِ مستقیم کے وسطی نقطہ کے محدّدات $\{\frac{1}{2}(x_1+x_2), \frac{1}{2}(y_1+y_2)\}$ ہیں۔

نوٹ: اگر نقطہ P ، AB کو $p:q$ کی نسبت میں خارجی طور پر تقسیم کرتا ہے (جہاں p اور q دونوں مثبت عدد ہیں)، تو LM/MN منفی ہے کیونکہ LM اور MN مخالف سمتوں میں ناپی جاتی ہیں۔ درحقیقت $LM/MN=p/(-q)$ اور P کے محدّدات اوپر کے فارمولے سے m_1 اور m_2 کی جگہ بالترتیب p اور

$-q$ رکھنے سے حاصل ہوجاتے ہیں۔

مثال 1 : اس نقطہ کے محدّدات نکالیے جو نقطوں $(4,-5)$ اور $(6,3)$ کے بیچ کے فاصلہ کو $2:5$ کی نسبت میں داخلی یا خارجی طور پر تقسیم کرتا ہے۔

یہاں $x_1=4$، $x_2=6$، $y_1=-5$، $y_2=3$ اور داخلی تقسیم کے لیے $m_1=2, m_2=5,$ اس لیے داخلی طور پر تقسیم کرنے والے نقطہ کے محدّدات

$$\left(\frac{2\times6+5\times4}{2+5},\ \frac{2\times3+5(-5)}{2+5}\right)$$ یعنی $\left(\frac{32}{7},-\frac{19}{7}\right)$ ہیں۔

خارجی تقسیم کے لیے $m_1:m_2=-2:5$؛ اور اس لیے خارجی طور پر تقسیم کرنے والے نقطہ کے محدّدات $$\left(\frac{-2\times6+5\times4}{-2+5},\ \frac{-2\times3+5(-5)}{-2+5}\right)$$

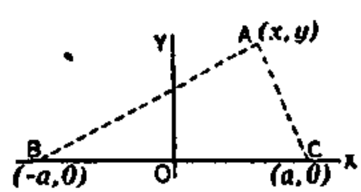
یعنی $\left(\frac{8}{3},-\frac{31}{3}\right)$ ہیں۔

مثال 2 : تحلیلی طور پر ثابت کیجیے کہ کسی مثلث ABC میں

$$AB^2+AC^2=2(AO^2+BO^2),$$

جہاں نقطہ O خط BC کا وسطی نقطہ ہے۔

(علی گڑھ 1958)



شکل 8

یہاں محدّدات کے محاور دیے ہوئے نہیں ہیں، اس لیے ہمیں ان کو اس طرح منتخب کرنا ہے کہ ہمارا کام آسان ہوجائے۔ اس لیے ہم BC کو x - محور اور اس کے وسطی نقطہ O کو مبدا مان لیتے ہیں۔

تو OC پر اُٹھائے گئے عمود OY کو y - محور مان لیں گے۔ کیوں کہ C نقطہ x - محور پر ہے اس لیے مان لیا اس کے محدّدات $(a,0)$ ہیں، تو B کے محدّدات $(-a,0)$ ہوں گے۔

مان لیا A کے محدّدات (x, y) ہیں، تو

$$AB^2+AC^2=\{x-(-a)\}^2+(y-0)^2+\{(x-a)^2+(y-0)^2\}$$
$$=(x+a)^2+(x-a)^2+2y^2=2(x^2+a^2+y^2);$$
$$2(AO^2+BO^2)=2(x^2+y^2+a^2).$$ مزید

اس طرح قضیہ حل ہوجاتا ہے۔

مشق 3

ان نقطوں کے محدّدات معلوم کیجیے جو حسب ذیل نقطوں کو ملانے والے خطِ مستقیم کو دی ہوئی نسبت میں تقسیم کرتا ہے :

1. (3, −5) اور (−4, 6) کو نسبت 2 : 3 میں۔
2. (−4, 6) اور (3, −5) کو نسبت 3 : 2 میں۔
بتائیے اس سوال کا جواب (1) کا ہی کیوں ہے۔
3. $(ab-b^2, b)$ اور $(-a^2-b^2, a+2b)$ کو نسبت $a:b$ میں۔
4. اس مثلث کا وسطانی مرکز نکالیے جس کے راس (4, −6) ، (2, −2) اور (2, 5) ہیں۔

(راجپوتانہ 1949)

5. دو نقطوں A اور B کے محدّدات بالترتیب (4, −5) اور (−3, −2) ہیں۔ AB کو M تک بڑھاکر AM=3BM کردیا گیا ہے۔ M کے محدّدات بتائیے۔
6. نقطوں (3, −2) اور (−4, −3) کو ملانے والے خطِ مستقیم کو تین برابر حصّوں میں تقسیم کرنے والے نقطوں کے محدّدات نکالیے۔
7. نقطوں (2, −4) اور (−3, 6) کو ملانے والے خط کس نسبت میں، (i) x - محور سے، (ii) y - محور سے تقسیم ہوتا ہے؟
[اشارہ: حالت (i) میں تقسیم کرنے والے نقطہ کا عرض صفر ہے]

8. دکھائیے کہ محاور محددات نقطوں $(2, -2)$ اور $(-1, 4)$ کو ملانے والے خطِ مستقیم کو تین برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

9. ایک مثلث کے راس $(1, 2)$، $(2, 5)$ اور $(4, 3)$ ہیں۔ اس کے وسطانی مرکز اور محیطی مرکز نکالیے۔

(اجمیر 1956)

10. دکھائیے کہ جس مثلث کے راس (x_1, y_1)، (x_2, y_2) اور (x_3, y_3) ہیں، اس کا وسطانی مرکز $\{\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3), \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)\}$ ہے۔

(اجین 1962)

11. تحلیلی طور پر ثابت کیجیے کہ قائمہ زاویہ مثلث میں وتر اپنے وسطی خط کا دوگنا ہوتا ہے۔ (دہلی پری انجینیرنگ 1959)

[اشارہ: مثلث کے ضلعوں کو محاور مانیے]

12. تحلیلی طور پر ثابت کیجیے کہ ایک چارضلعی میں روبرو ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے والے خطوطِ مستقیم کا اور وتروں کا ایک ہی وسطی نقطہ ہوتا ہے۔

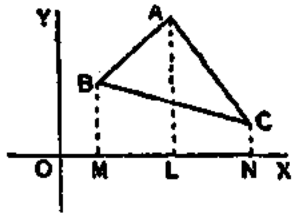
[اشارہ: کیوں کہ عبارت میں تشاکل سے آسانی ہوجاتی ہے،
اس لیے راسوں کے محددات (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، (x_3, y_3)
اور (x_4, y_4) لیجیے۔]

13. تحلیلی طور پر ثابت کیجیے کہ مثلث کے وسطی خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ جو ہر ایک وسطی خط کو 2 : 1 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

14. اس مثلث کا محیطی مرکز اور محیطی نصف قطر نکالیے جس کے راس نقطے $(4, 6)$، $(0, 4)$ اور $(6, 2)$ ہیں۔ (رڑکی 1955)

1.6. مثلث کا رقبہ:

مان لیا (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، (x_3, y_3) بالترتیب مثلث کے راس A, B, C



شکل 9

ہیں۔ ان محدّدات کے ذریعے مثلث کا رقبہ نکالنا ہے۔
A , B , C سے x - محور پر عمود AL
BM, CN کھینچیے۔ تو شکل سے منحرف BMNC
منحرف ALNC + منحرف ABML =
کیوں کہ ABC △

منحرف کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ (متوازی خطوط کا جوڑ) × ان کے بیچ کا فاصلہ
اس لیے

$$\triangle ABC=\tfrac{1}{2}(MB+LA)ML+\tfrac{1}{2}(LA+NC)LN-\tfrac{1}{2}(MB+NC)MN$$

$$=\tfrac{1}{2}(y_2+y_1)(x_1-x_2)+\tfrac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1)-\tfrac{1}{2}(y_2+y_3)(x_3-x_2)$$

$$=\tfrac{1}{2}[y_2\{(x_1-x_2)-(x_3-x_2)\}+y_1\{(x_1-x_2)+(x_3-x_1)\}+y_3\{(x_3-x_1)-(x_3-x_2)\}]$$

$$=\tfrac{1}{2}\{y_2(x_1-x_3)+y_1(x_3-x_2)+y_3(x_2-x_1)\},$$

یعنی $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ راسوں والے مثلث کا رقبہ

$\frac{1}{2}\{(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_1)\}$ ہے۔

نوٹ 1 : اس عبارت کو یاد رکھنے کے لیے غور کیجیے کہ عددوں کے جوڑے 1, 2 ; 2,3 ; 3,1 پہلے بریکٹ میں بالترتیب x, y کے لواحق اور دوسرے میں y, x کے لواحق ہوں گے۔

نوٹ 2 : اگر مثلث ABC کا رقبہ صفر نکلے تو اس کا مطلب یہ ہے کہ نقطے A, B, C ہم خط ہیں۔

نوٹ 3 : طالب علم دیکھیں گے کہ اوپر کے فارمولہ سے مثبت جواب تب ملے گا جب نقطے (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) و (x_3, y_3) اس طرح قائم کیے جائیں کہ پہلے راس سے دوسرے تک ، دوسرے سے تیسرے تک اور تیسرے سے پہلے تک چل کر مثلث کا چکّر لگانے میں مثلث کا رقبہ دیکھنے والے بائیں طرف رہے۔ اگر رقبہ دائیں طرف پڑے

تو رقبہ منفی ہوگا۔ عددی سوالوں میں طالب علم کو چاہیے کہ وہ رقبہ کی علامت پر غور نہ کرے اور جواب میں مثبت قیمت لکھیں۔

مثال: اس مثلث کا رقبہ نکالیے جس کے راس $(3, 4)$ ، $(2, -1)$ اور $(4, -6)$ ہیں۔
دیے ہوئے محددات فارمولا میں رکھنے پر

$$\text{مطلوبہ رقبہ} = \tfrac{1}{2}[\{3\times(-1)+2\times(-6)+4\times4\}-\{2\times4+4\times(-1)+3\times(-6)\}]$$

$$=\tfrac{1}{2}\{(-3-12+16)-(8-4-18)\}$$

$$=\tfrac{15}{2}$$ مربع اکائی

مشق 4

اس مثلث کا رقبہ نکالیے جس کے راس یہ ہیں:

1. $(6, 2)$, $(0, 4)$, $(4, 6)$ (رڑکی 1955)
2. (c, a) , (b, c) , (a, b)
3. $(a\cos\beta,\ a\sin\beta)$, $(a\cos\alpha,\ a\sin\alpha)$, $(0, 0)$
4. k کی کس قیمت کے لیے نقطے $(k, 2-2k)$ ، $(-k+1, 2k)$ اور $(-4-k, 6-2k)$ ہم خط ہیں۔ (علی گڑھ 1958)
5. اس چار ضلعی کا رقبہ نکالیے جس کے راس بالترتیب حسب ذیل ہیں:
 $(3, 4)$, $(0, 5)$, $(2, -1)$ اور $(3, -2)$
 [اشارہ: اگر راس A, B, C, D ہوں تو چار ضلعی کا رقبہ $= \triangle ABC + \triangle CDA$]
6. اگر نقطہ O مثلث ABC کا وسطانی مرکز ہے تو تحلیلی طور پر ثابت کیجیے کہ مثلث BCO ، CAO اور ABO رقبہ میں برابر ہیں۔
7. تحلیلی طور پر ثابت کیجیے کہ کسی مثلث کا رقبہ اس مثلث کے رقبہ کا چار گنا ہوتا ہے جو دیے ہوئے مثلث کے ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے سے بنتا ہے۔

(دہلی ہری انجینیرنگ 1961)

8. ثابت کیجیے کہ اس چار ضلعی کا رقبہ، جس کے راس بالترتیب (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) ،
(x_3, y_3) اور (x_4, y_4) ہیں، یہ ہے

$$\tfrac{1}{2}\{(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1)-(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_4+y_4x_1)\}$$

9. $ABCD$ ایک مستطیل ہے اور P کوئی نقطہ۔ ثابت کیجیے کہ مثلثوں PAB اور
PCD کے رقبوں کا جبری جوڑ مستطیل کے رقبہ کا آدھا ہے۔

10. اس مثلث کے وسطی مرکز اور محیطی مرکز کے محددات نکالیے جس کے راس (0, 0) ،
(0, 8) اور (4, 6) ہیں۔

(رڑکی 1956)

11. ثابت کیجیے کہ نقطے (3, −2) ، (4, 0) ، (6, −3) اور (5, −5) ایک
متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔ [اس کا رقبہ بھی نکالیے۔]

(ابتین 1962)

باب 2

طریق اور اس کی مساوات

2.1. مساوات کے جیومیٹری میں معنی :

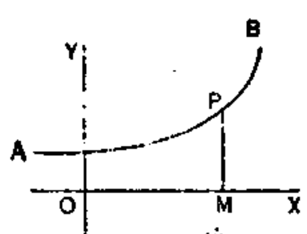
مستوی میں کوئی نقطہ چُننے میں ہمیں دو رقموں کے چُننے کی آزادی ہے۔ پہلے تو x کو ہم جو قیمت دینا چاہیں دے سکتے ہیں اور پھر y کو بھی جو قیمت چاہیں دے سکتے ہیں۔ اب مان لیا کہ ہم صرف وہی نقطہ لیتے ہیں جن کے محدّدات ایک دی ہوئی مساوات، مان لو

$$6y = x^2 - x + 6 \qquad . \; . \; . \; (1)$$

کو مطمئن کرتے ہیں۔

اب صرف ایک ہی رقم ہے جسے ہم مرضی کے مطابق چُن سکتے ہیں۔ جب ہم x کو کوئی چُنی ہوئی قیمت، جیسے 3 دیتے ہیں تو y کو ہمیں وہ قیمت دینی پڑے گی جو مساوات (1) سے ملے گی، یعنی یہاں 2۔ اس طرح ہمیں x کی چُنی ہوئی قیمت کے لیے ایک نقطہ (3, 2) ملتا ہے۔

اب تصوّر کیجیے کہ ہم x کو سبھی ممکن قیمتیں دیتے ہیں اور ان سے حاصل ہوئے نقطوں کی ترسیم کرتے ہیں۔ تو یہ سب نقطے عام طور پر کسی منحنی AB پر ہوں گے۔ یہ منحنی مساوات (1) کا گراف کہلاتا ہے اور اس کے برعکس مساوات (1) منحنی AB کی مساوات کہلاتی ہے۔



شکل 10

تعریف : وہ منحنی جس پر وہ سبھی نقطے قائم رہتے ہیں جن کے محدّدات دی ہوئی مساوات کو

مطمئن کرتے ہیں (جس پر اور کوئی نقطہ نہ ہو) ، دی ہوئی مساوات کا **گراف** کہلاتا ہے۔

جو مساوات دیے ہوئے منحنی کے سبھی نقطوں کے محدّدات سے مطمئن ہو (اور کسی دوسرے نقطے کے محدّدات سے نہیں) وہ **منحنی کی مساوات** کہلاتی ہے۔

کسی مساوات کے ذریعے دیے ہوئے منحنی کا خاکہ کھینچنے کا مطلب یہ ہے کہ منحنی کی شکل کا پتہ لگایا جائے، یعنی اس کا گراف کھینچا جائے۔

عملی نقطہ نظر سے منحنی کے سبھی نقطوں کی ترسیم کرنا ناممکن ہے۔ عام طور پر ہمیں نقطے ایک دوسرے کے کافی قریب لینے چاہئیں اور انھیں ایک ہموار منحنی کے ذریعے ملادینا چاہیے (ہموار منحنی کا مطلب ہے ایسا منحنی جس میں جہاں تک ممکن ہو کم موڑ اور گھماؤ پھراؤ ہوں)۔

نوٹ : خطِ مستقیم اوپر دی گئی تعریف کے مطابق ایک مخصوص حالت کا منحنی ہی ہے۔

2.2. **طریق :** ہر ایک منحنی ان سب نقطوں کا طریق ہے جن کے محدّدات کسی دی ہوئی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ ہر ایک منحنی کو ہم متحرک نقطہ کا طے کیا ہوا فاصلہ بھی مان سکتے ہیں۔ اس نقطہ نظر سے منحنی ایک **طریق** کہلاتا ہے۔ اس طرح ہم حسب ذیل تعریف دے سکتے ہیں :

ایک **طریق** وہ منحنی ہے جو کسی اصول کے مطابق حرکت کرتے ہوئے نقطہ کے ذریعے طے کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر، طالب علم جانتا ہے کہ اگر نقطہ P اس اصول کے مطابق حرکت کرے کہ ایک ہی جگہ مقیم نقطہ O سے اس کا فاصلہ 1 ہو تو اس نقطہ کا طریق وہ دائرہ ہے جس کا مرکز O اور نصف قطر 1 ہے۔

محدّد جیومیٹری میں طریق معلوم کرنے کا مطلب یہ ہے کہ اس کی مساوات معلوم کی جائے یعنی x اور y میں وہ مساوات معلوم کی جائے جس کو طریق پر مقیم ہر نقطہ کے محدّدات مطمئن کر سکیں۔

حرکت کر کے طریق بنانے والے نقطہ کے محدّدات x اور y کو رواں محدّدات

کہتے ہیں۔

مثال 1 : اس نقطہ کے طریق کی مساوات نکالیے جس کا فاصلہ نقطہ $(a, 0)$ اور y- محور سے برابر ہے۔

مان لیا دیے ہوئے اصول کے مطابق حرکت کرنے والے نقطہ کے محدّدات (x, y) ہیں تو $(a, 0)$ سے نقطہ کا فاصلہ $= \sqrt{\{(x-a)^2+y^2\}}$

اور نقطہ (x, y) کی y- محور سے دوری = نقطہ کا طول $= x$

اس لیے $\sqrt{\{(x-a)^2+y^2\}} = x$

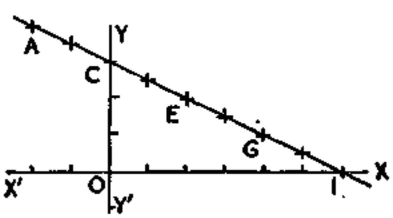
مربع کرنے پر $(x-a)^2+y^2=x^2$

یعنی $y^2-2ax+a^2=0$

یہ وہ تعلق ہے جس کو دیے ہوئے اصول کے مطابق حرکت کرنے والے نقطہ کے رواں محدّدات مطمئن کریں گے۔ اس لیے یہ طریق کی مطلوبہ مساوات ہے۔

مثال 2 : مساوات $x+2y=6$ سے ظاہر ہونے والے طریق کا خاکہ کھینچیے۔

x کو $0, 1, 2, \ldots$ اور $-1, -2, \ldots$ قیمتیں دے کر y کی قیمتیں نکالنے سے x اور y کی قیمتوں کے حسب ذیل جوڑے ملتے ہیں :



شکل 11

$$x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$
$$y = 4, \tfrac{7}{2}, 3, \tfrac{5}{2}, 2, \tfrac{3}{2}, 1, \tfrac{1}{2}, 0.$$

اب ہم نقطوں $A(-2, 4)$، $B(-1, \tfrac{7}{2})$، $C(0, 3)$ وغیرہ کی ترسیم کرتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ سب ایک خطِ مستقیم پر واقع ہیں۔

اس لیے دی ہوئی مساوات شکل میں خطِ مستقیم AI سے دکھائی جاتی ہے۔

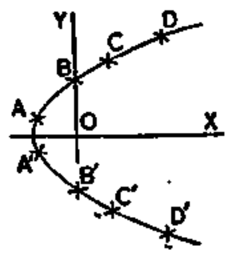
مثال 3 : مساوات $y^2=4x+9$ سے ظاہر ہونے والے طریق کا منحنی کھینچیے

کیوں کہ اس مساوات میں x کی قوت صرف ایک ہے اس لیے یہ زیادہ

مناسب ہے کہ y کو مرضی کے مطابق قیمتیں دی جائیں اور اس کے مطابق x کی قیمتیں نکالی جائیں۔

مساوات کو مطمئن کرنے والی y اور x کی کچھ قیمتیں یہ ہیں :

$$y = 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0, -1, -3, -5.$$
$$x = 4,\ \tfrac{7}{4},\ 0, -\tfrac{5}{4}, -2, -\tfrac{9}{4}, -2,\ 0,\ 4.$$



شکل 12

ان سے مطابقت رکھتے ہوئے ہم نقطوں $B\ (0, 3), C\ (\tfrac{7}{4}, 4), D\ (4, 5)$ وغیرہ کی ترسیم کرتے ہیں۔ یہ نقطے شکل میں دکھائے گئے منحنی پر واقع ہیں۔ یہ منحنی دی ہوئی مساوات کا گراف ہے۔

مشق 5

1. نقطوں $(3, 5), (2, 0), (3, -1)$ اور $(-2, 0)$ میں سے کون سے اس منحنی پر واقع ہیں جس کی مساوات $x^2 - y = 4$ ہے ؟

2. k کی کس قیمت کے لیے نقطہ $(2, -3)$ منحنی $kx^2 - 3y^2 + 2x + y - 6 = 0$ پر واقع ہوگا ؟

3. مندرجہ ذیل حالتوں میں سے ہر ایک میں نقطہ کے طریق کی مساوات نکالیے ۔
   (i) نقطہ کا طول ہمیشہ 5 ہے ،
   (ii) نقطہ کا x - محور سے فاصلہ اس سے y - محور کے فاصلہ کا دوگنا ہے ،
   (iii) نقطہ کا $(-3, 4)$ سے فاصلہ 5 ہے ،
   (iv) نقطہ کا y - محور سے فاصلہ اس سے $(a, 0)$ کے فاصلہ کا آدھا ہے ،

4. دو مقررہ نقطوں A اور B کے محدّدات بالترتیب $(a, 0)$ اور $(-a, 0)$ ہیں۔ ایک متحرک نقطہ P کے طریق کی مساوات حسب ذیل حالتوں میں نکالیے :
   (i) $3\ PA^2 + PB^2 = AB^2;$
   (ii) $PA = 2\ PB;$
   (iii) $PA + PB = 2k,$ جہاں k مستقل ہے۔ (دہلی پری انجینیرنگ 1962)

5. حسب ذیل حالتوں میں مساوات کو مطمئن کرنے والی x اور y کی متعدد قیمتیں معلوم کر کے ان مساوات سے ظاہر ہونے والے منحنی کا خاکہ کھینچیے :

(i) $x-y-4$ (ii) $x^2=y$ (iii) $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}y^2=1$

[مندرجہ ذیل مثالوں میں مناسب محاور لیجیے۔]

6. ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک قائمہ زاویہ مثلث کے ضلعوں سے اس کا فاصلہ مستقل a ہے۔ متغیر نقطہ کے طریق کی مساوات نکالیے۔

[پلانی فار 1965]

7. A اور B دو مقررہ نقطے ہیں۔ اگر ایک متغیر نقطہ پر AB زاویہ قائمہ بنائے، تو متغیر نقطہ کا طریق معلوم کیجیے۔

[اشارہ: اگر P ایسا نقطہ ہے، تو $AP^2+PB^2=AB^2$]

8. CA اور CB دو عمودی خطوط ہیں اور M N — ہر ایک خط پر ایک — دو مقررہ نقطے ہیں۔ نقطہ P کے طریق معلوم کیجیے جب کہ

(i) $2PM^2-PN^2=CP^2$

(ii) $\triangle PMN$ کا رقبہ $= a^2$

9. ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو مقررہ نقطوں سے اس کی دوریوں کے مربعوں کا جوڑ مستقل ہے۔ اس کے طریق کی مساوات آسان ترین شکل میں معلوم کیجیے [الہ آباد 1948]

10. ایک ڈوری 5 اکائی لمبی ہے جس کا ایک سرا کسی نقطہ Q پر بندھا ہے اور دوسرے سرے پر ایک وزن P لٹکا ہے۔ Q پر ایک چھلّا R بندھا ہے۔ ڈوری چھلّے میں سے ہو کر گزرتی ہے اور پھر افقی سمت میں جاتی ہے یعنی QR افق کے متوازی ہے اور تب وزن P، R کے نیچے عمودی حالت میں ہے۔ P کا طریق معلوم کیجیے۔ [رڑکی 1955]

11. ایک نقطہ اس طرح چلتا ہے کہ دو نقطوں $(ae, 0)$ اور $(-ae, 0)$ سے اس کی دوریوں کا فرق $2a$ مستقل ہے، جہاں $e^2\neq 1$ ۔ ثابت کیجیے کہ نقطہ کا طریق

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1.$$

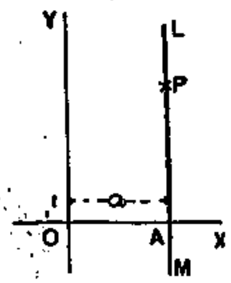
ہے۔ [جمال پور 1961]

باب 3

خطِ مستقیم

3.1. محور کے متوازی خطِ مستقیم کی مساوات :

مان لیا LM ایک خطِ مستقیم ہے جو y- محور کے متوازی اور اس سے دوری a پر ہے اور اس پر کسی نقطہ P کے محدّدات (x, y) ہیں تو $x = P$ کا طول $= a = OA$



شکل 13

اس لیے y- محور کے متوازی اور اس سے دوری a پر واقع خطِ مستقیم کی مساوات $x=a$ ہے۔

اسی طرح x- محور کے متوازی اور اس سے دوری b پر واقع خطِ مستقیم کی مساوات $y=b$ ہے۔

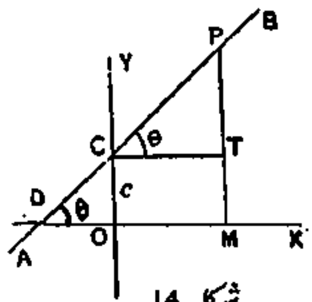
ضمنی نتیجہ: x- محور کی مساوات $y = 0$ ہے۔ y- محور کی مساوات $x = 0$ ہے۔

نوٹ: مساوات $x = a$ میں y نہیں ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ طریق پر واقع ہر ایک نقطہ کا طول a ہے، عرض چاہے کچھ بھی ہو، اسی طرح $(a, 0)$ ، $(a, 1)$ ، $(a, \frac{1}{2})$، $(a, \sqrt{2})$، $(a, -5)$ بھی نقطے مساوات $x = a$ سے ظاہر ہونے والے طریق پر ہیں۔

3.2. جب داخلی قطع اور جھکاؤ دیے ہوئے ہوں :

اس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو y- محور سے دیا ہوا داخلی قطع کرتا ہو اور x- محور سے دیا ہوا زاویہ بناتا ہو۔

مان لیا دیا ہوا داخلی قطع c ہے اور دیا ہوا زاویہ θ ہے۔ مان لیا AB وہ خطِ مستقیم ہے جو y- محور سے داخلی قطع OC لمبائی c کا کاٹتا ہے اور x-محور سے زاویہ XDB ، θ کے برابر بناتا ہے۔



شکل 14

AB پر کوئی نقطہ P لیا اور مان لیا اس کے محددات (x, y) ہیں۔ AB کی مساوات نکالنے کے لیے ہمیں x ، y ، θ اور c میں کوئی تعلق معلوم کرنا ہوگا۔

مان لیا $\tan\ \theta = m$

P سے x- محور پر عمود PM اور C سے PM پر عمود CT کھینچیے۔

تو $\triangle PCT$ میں

$$\angle PCT = \angle BDX = \theta,$$

اور $TP = MP - MT = MP - OC = y - c.$

اب $\angle CTP =$ زاویہ قائمہ !

$$\therefore \quad \frac{TP}{CT} = \tan\theta = m, \qquad (\text{مانا})$$

$$\text{i.e.,} \quad \frac{y-c}{x} = m,$$

یا $y = mx + c.$

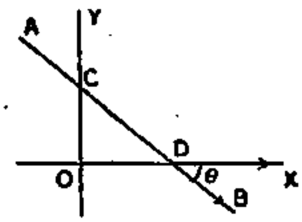
یہی مطلوبہ مساوات ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات $\mathbf{y = mx + c}$ ایک خطِ مستقیم ظاہر کرتی ہے۔ اس میں c ، y- محور سے کٹا ہوا داخلی قطع ہے اور m اس زاویہ کی tangent ہے جسے خط x- محور سے بناتا ہے۔

ضمنی نتیجہ : مبدا سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات $c = 0$ رکھنے سے حاصل ہوجاتی ہے اور $\mathbf{y = mx}$ ہے۔

نوٹ : m اور c کو مناسب قیمتیں دے کر مساوات $y = mx + c$ سے ،

صرف ان خطوطِ مستقیم کو چھوڑ کر جن کی مساوات $x=a$ کی طرح ہوں یعنی جو y- محور کے متوازی ہوں، کوئی بھی خطِ مستقیم ظاہر کراسکتے ہیں۔ رقم c تب مثبت ہوگی جب OC اسی سمت میں ہوگی جس میں OY ہے اور تب منفی جب OC مخالف سمت میں ہوگی۔

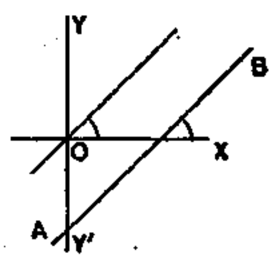


شکل 15

اسی طرح رقم m تب مثبت ہوگی جب θ مثبت ہو (جیسا گذشتہ شکل میں ہے)۔ خیال رہے کہ θ، x-محور اور خط $y=mx+c$ کے درمیان کا زاویہ حادہ ہے۔

m کی قیمت کو خط کا ڈھال کہتے ہیں۔

مثال: ایک خطِ مستقیم y- محور کو مبدا سے نیچے، 5 اکائی کی دوری پر کاٹتا ہے اور $\angle XOY$ کے ناصف کے متوازی ہے۔ اس کی مساوات معلوم کیجیے۔



شکل 16

مان لیا AB دیا ہوا خط ہے۔

یہاں y- محور پر داخلی قطع $OA=-5$,

اور $\theta=45°$، اس لیے

$\tan\theta=1$

$m=1$ اور $c=-5$

اس لیے مطلوبہ مساوات $y=x-5$ ہے۔

مشق 6

1. ان خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کیجیے جو y- محور کے متوازی اور اس سے بالترتیب 3 اور -7 کی دوریوں پر ہیں۔
2. x- محور کے متوازی ان خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کیجیے جو y- محور سے بالترتیب 2، $\frac{5}{6}$ اور $-\frac{3}{8}$ کی دوریوں پر ہیں۔
3. اس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو y- محور سے $+5$ اکائی کا داخلی قطع

کاٹتا ہو اور x- محور سے $30°$ کا زاویہ بناتا ہو۔

4. خط $y=x-\frac{3}{2}$ کے ذریعے y- محور سے کٹے ہوئے داخلی قطع کی لمبائی معلوم کیجیے اور وہ زاویہ بھی جو یہ خط x- محور سے بناتا ہے۔

5. یہ مان کرکے 3 بجے گھڑی کے گھنٹے اور منٹ والی سوئیاں بالترتیب x اور y محاور کے ساتھ ساتھ ہوتی ہیں۔ اس خطِ مستقیم کا m معلوم کیجیے جس میں گھنٹے کی سوئی ٹھیک 4 بجے کی حالت میں رہتی ہے۔

6. اس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو y- محور سے 3 کا داخلی قطع کاٹتا ہے اور x- محور سے $-60°$ کا زاویہ بناتا ہے۔

[دہلی پری انجینیرنگ 1960]

7. ان دو خطوطِ مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو y- محور کی منفی سمت سے $\frac{5}{2}$ کا داخلی قطع کاٹتے ہیں اور محاور سے (تعداد کے اعتبار سے) برابر زاویہ بناتے ہیں۔

8. نقطہ $(3, -4)$ اور x- محور کے بالترتیب متوازی اور عمود خطِ مستقیم کھینچے جاتے ہیں۔ ان کی مساوات معلوم کیجیے۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1960]

9. محاور کے درمیان کے زاویوں کے ناصفوں کی مساوات معلوم کیجیے۔

10. OY' پر O سے 4 کی دوری پر ایک نقطہ P ہے۔ اگر OX ٹھیک مشرق اور OY ٹھیک شمال کی سمت میں ہیں، تو P سے گزرکر جانے والے ان خطوطِ مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو (i) شمال-مشرق (ii) شمال-مغرب (iii) مشرق سے $30°$ جنوب، کی طرف ہوں

y- محور سے کٹا ہوا داخلی قطع اور x- محور سے جھکاؤ ان خطوطِ مستقیم کے لیے معلوم کیجیے جن کی مساوات حسبِ ذیل ہیں:

11. $y-x\sqrt{3}+4=0.$

12. $x-y=3.$

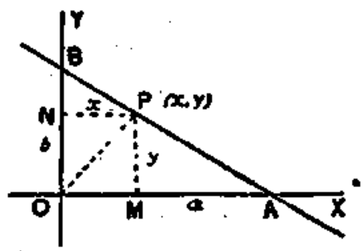
3.3. جب محاور سے کٹے ہوئے داخلی قطع دیے ہوں :

اس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو محاور سے دیے ہوئے ناپوں کے داخلی قطع کاٹتا ہے۔

مان لیا خطِ مستقیم AB ہے اور محاور سے داخلی قطع OA اور OB لمبائی میں بالترتیب a اور b اکائی کے کاٹتا ہے۔

مان لیا AB پر P کوئی نقطہ (x, y) ہے۔ AB کی مساوات، داخلی قطع a, b کے ذریعے ظاہر کرنے کے لیے ہمیں x، y، a اور b میں کوئی تعلق معلوم کرنا ہے۔

P سے محاور پر عمود PM اور PN کھینچیے۔ OP کو ملا ئیے۔



شکل 17

ظاہر طور پر

$$\triangle OAB = \triangle OAP + \triangle OPB.$$

$$\tfrac{1}{2}OA.OB = \tfrac{1}{2}OA.MP + \tfrac{1}{2}OB.NP,$$

یا

$$\tfrac{1}{2}ab = \tfrac{1}{2}ay + \tfrac{1}{2}bx.$$

سے تقسیم کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ اس خطِ مستقیم کی مساوات، جو محاور سے داخلی قطع a اور b کاٹتا ہے، یہ ہے :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

3.4. جب عمود اور اس کا جھکاؤ دیے ہوئے ہوں :

خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جب مبدا سے اس پر ڈالے گئے عمود کی لمبائی اور عمود کا x- محور پر جھکاؤ دیے ہوئے ہوں۔

مان لیا AB دیا ہوا خطِ مستقیم ہے OT اس پر O سے ڈالا گیا عمود ہے۔

کاٹتا ہو اور x- محور سے $30°$ کا زاویہ بناتا ہو۔

4. خط $y=x-\frac{9}{2}$ کے ذریعے y- محور سے کٹے ہوئے داخلی قطع کی لمبائی معلوم کیجیے اور وہ زاویہ بھی جو یہ خط x- محور سے بناتا ہے۔

5. یہ مان کر کے 3 بجے گھڑی کے گھنٹے اور منٹ والی سوئیاں بالترتیب x اور y محاور کے ساتھ ساتھ ہوتی ہیں۔ اس خطِ مستقیم کا m معلوم کیجیے جس میں گھنٹے کی سوئی ٹھیک 4 بجے کی حالت میں رہتی ہے۔

6. اس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو y- محور سے 3 کا داخلی قطع کاٹتا ہے اور x- محور سے $-60°$ کا زاویہ بناتا ہے۔

[دہلی پری انجینیرنگ 1960]

7. ان دو خطوطِ مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو y- محور کی منفی سمت سے $\frac{5}{2}$ کا داخلی قطع کاٹتے ہیں اور محاور سے (تعداد کے اعتبار سے) برابر زاویہ بناتے ہیں۔

8. نقطہ $(3, -4)$ اور x- محور کے بالترتیب متوازی اور عمود خطِ مستقیم کھینچے جاتے ہیں۔ ان کی مساوات معلوم کیجیے۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1960]

9. محاور کے درمیان کے زاویوں کے ناصفوں کی مساوات معلوم کیجیے۔

10. OY' پر O سے 4 کی دوری پر ایک نقطہ P ہے۔ اگر OX ٹھیک مشرق اور OY ٹھیک شمال کی سمت میں ہیں، تو P سے گزر کر جانے والے ان خطوطِ مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو (i) شمال-مشرق (ii) شمال-مغرب (iii) مشرق سے $30°$ جنوب، کی طرف ہوں

y- محور سے کٹا ہوا داخلی قطع اور x- محور سے جھکاؤ ان خطوطِ مستقیم کے لیے معلوم کیجیے جن کی مساوات حسبِ ذیل ہیں:

11. $y-x\sqrt{3}+4=0.$

12. $x-y=3.$

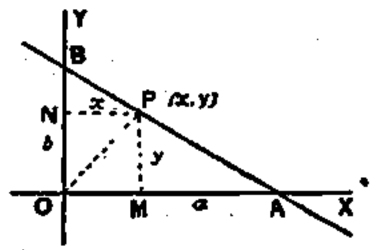
3.3. جب محاور سے کٹے ہوئے داخلی قطع دیے ہوں :

اس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو محاور سے دیے ہوئے ناپوں کے داخلی قطع کاٹتا ہے۔

مان لیا خطِ مستقیم AB ہے اور محاور سے داخلی قطع OA اور OB لمبائی میں بالترتیب a اور b اکائی کے کاٹتا ہے۔

مان لیا AB پر P کوئی نقطہ (x, y) ہے۔ AB کی مساوات، داخلی قطع a، b کے ذریعے ظاہر کرنے کے لیے ہمیں x، y، a اور b میں کوئی تعلق معلوم کرنا ہے۔

P سے محاور پر عمود PM اور PN کھینچیے۔ OP کو ملا یئے۔



شکل 17

ظاہر طور پر

$$\triangle OAB = \triangle OAP + \triangle OPB.$$

$$\tfrac{1}{2}OA.OB = \tfrac{1}{2}OA.MP + \tfrac{1}{2}OB.NP,$$

یا

$$\tfrac{1}{2}ab = \tfrac{1}{2}ay + \tfrac{1}{2}bx.$$

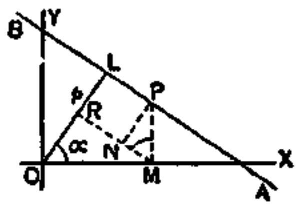
$\tfrac{1}{2}ab$ سے تقسیم کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ اس خطِ مستقیم کی مساوات، جو محاور سے داخلی قطع a اور b کاٹتا ہے، یہ ہے :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

3.4. جب عمود اور اس کا جھکاؤ دیے ہوئے ہوں :

خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جب مبدا سے اس پر ڈالے گئے عمود کی لمبائی اور عمود کا x- محور پر جھکاؤ دیے ہوئے ہوں۔

مان لیا AB دیا ہوا خطِ مستقیم ہے OT اس پر O سے گرایا گیا عمود ہے۔



شکل 18

مان لیا عمود OL کی لمبائی p ہے اور زاویہ XOL, α ہے جسے OL x-محور کے ساتھ بناتا ہے۔ تو AB کی مساوات p اور α کے ذریعے ظاہر کرنا مطلوب ہے۔

مان لیا AB پر کوئی نقطہ (x, y) ہے۔

P سے x-محور پر عمود PM کھینچیے۔ M سے OL پر عمود MR اور آخر میں P سے MR پر عمود PN کھینچیے۔ تو

$\angle PMN =$ $\angle OMR$ کا تتمہ $= \angle MOR = \alpha$.

مزید $OM = x$, $MP = y$ اور $LR = PN$

$$\therefore \quad OL = OR + NP = OM\cos\alpha + MP\sin\alpha,$$

یعنی

$$p = x\cos\alpha + y\sin\alpha.$$

اس لیے خطِ مستقیم کی مساوات جب مبدا سے اس خط پر عمود x-محور سے زاویہ α بناتا ہو اور لمبائی p کا ہو، یہ ہے:

$$\mathbf{x\cos\alpha + y\sin\alpha = p.}$$

نوٹ: لمبائی p کو مثبت ہی ماننے کا دستور ہے، اس وجہ سے α وہ زاویہ ہے جس کے ذریعے کسی خط کو XO کی سمت سے شروع کرکے LO کی طرف آنے کے لیے گھومنا پڑے گا۔ α کی ہم ہمیشہ وہ قیمت لیں گے جو $-\pi$ سے زیادہ ہو اور π سے کم یا اسی کے برابر ہو (یعنی $-\pi < \alpha \leq \pi$)۔

مشق 7

1. ان خطوطِ مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو x اور y کے محاور سے بالترتیب حسبِ ذیل داخلی قطع کرتے ہیں:

(i) 3 اور 4 (ii) 3 اور -4.

(iii) -3 اور 4 (iv) -3 اور -4

ان خطوط کا خاکہ گرافی کاغذ پر کھینچیے۔

2. اس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو x اور y کے محاور سے داخلی قطع k اور $2k$ کاٹتا ہے۔

3. ایک خطِ مستقیم پر مبدا سے ڈالا گیا عمود x- محور سے $30°$ کا زاویہ بناتا ہے اور لمبائی میں 4 اکائی کا ہے۔ اس خط کی مساوات معلوم کیجیے۔

4. ایک خطِ مستقیم پر ڈالا گیا عمود x- محور سے $-60°$ کا زاویہ بناتا ہے اور لمبائی میں ایک اکائی کا ہے۔ خط کی مساوات معلوم کیجیے۔

5. اس خط کی مساوات معلوم کیجیے جو نقطہ $(3, 4)$ سے ہوکر جائے اور y- محور سے ایسا داخلی قطع کاٹے جو x- محور سے کٹے داخلی قطع کا دوگنا ہو۔

6. اس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو نقطہ $(3, 4)$ سے ہوکر جائے اور دونوں محاور سے ایسے داخلی قطع کاٹے جن کی لمبائیوں کا جوڑ 14 ہو۔

[دہلی پری انجینیرنگ 1960]

7 کسی خط کا محاور کے درمیان مقطوعہ حصّہ، نقطہ $(3, -2)$ سے دو برابر حصوں میں تقسیم ہوتا ہے۔ خط کی مساوات معلوم کیجیے۔ [علی گڑھ 1958]

[اشارہ : مان لو محاور پر داخلی قطع a اور b ہیں۔ تب نقطہ $(3, -2)$ ، $(a, 0)$ اور $(0, b)$ کو جوڑنے والے خط کی تنصیف کرتا ہے۔]

8 کسی خط کا محاور سے کٹنے والا داخلی قطع نقطہ $(-5, 4)$ سے نسبت $1 : 2$ میں تقسیم ہوتا ہے۔ خط کی مساوات معلوم کیجیے۔ [اجمیر 1960]

9. کوئی خطِ مستقیم x- محور سے لمبائی a کا داخلی قطع کاٹتا ہے اور x- محور سے زاویہ α بناتا ہے۔ اس کی مساوات معلوم کیجیے۔

10. ایک سیدھی نہر شہر سے $4\frac{1}{2}$ میل دور ہے اور شہر سے نہر کا قریب ترین راستہ ٹھیک شمال۔مشرق کی سمت میں ہے۔ تو بتائیے ایک گاؤں جو شہر سے 3 میل

شمال اور 4 میل مشرق میں ہے، نہر پر پڑتا ہے یا نہیں اور اگر نہیں تو نہر کی کس جانب واقع ہے؟ [رڑکی 1959]

3.5. خطِ مستقیم کی مساوات کا خطی ہونا :

اب ہم ثابت کریں گے کہ خطِ مستقیم کی مساوات x اور y میں ایک درجی ہوتی ہے۔

خطِ مستقیم یا تو x-محور پر عمود ہوگا یا اس سے زاویہ حادہ بنائے گا۔ ان کے علاوہ اور کوئی امکان نہیں ہے لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ پہلی صورت میں خطِ مستقیم کی مساوات $x=a$ کی شکل کی ہوتی ہے (3.1 §) اور دوسری صورت میں $y=mx+c$ کی شکل کی (3.2 §)۔ یہ دونوں مساوات خطی ہیں یعنی x اور y میں ایک درجی ہیں۔ اس طرح قضیہ حل ہوجاتا ہے۔

3.6. ایک درجی مساوات :

x اور y میں ایک درجی ہر ایک مساوات خطِ مستقیم ظاہر کرتی ہے۔

اس قضیہ کو ثابت کرنے کے لیے صرف ایک درجی عام مساوات

$$ax+by+c=0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

پر غور کرنا کافی ہے کیوں کہ باقی سب ایک درجی مساوات اس کی مخصوص حالتیں ہیں۔

پہلی حالت : اگر b صفر نہیں ہے تو b سے تقسیم کیجیے اور دو ارکان کو دائیں طرف لے جائیے۔ تب مساوات (1) حسب ذیل شکل کی ہوجاتی ہے :

$$y=-(a/b)x-c/b, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

جو $y=mx+c$ کی شکل کی ہے اور ایک خطِ مستقیم ظاہر کرتی ہے جیسا کہ ہم ابھی (3.2 §) میں دیکھ چکے ہیں۔ اس لیے اس شکل میں مساوات (1) بھی

کسی خطِ مستقیم کو ظاہر کرتی ہے۔

دوسری حالت : اگر $b = 0$، تب a صفر نہیں ہو سکتا (کیوں کہ اگر a بھی صفر ہے تو مساوات (1)، $c = 0$ ہو جاتی ہے جو بے معنی ہے)۔ اب a سے تقسیم کیجیے اور اس رکن کو دائیں طرف لے جائیے تو مساوات (1) $x = \frac{-c}{a}$ ہو جاتی ہے، جو $x = a$ کی شکل کی ہے اور اس لیے اس شکل میں بھی ایک خطِ مستقیم ظاہر کرتی ہے۔

نوٹ : مساوات

$$ax + by + c = 0, \qquad \ldots \quad (1)$$

جس میں ایک اور اس سے کم (یعنی صفر) درجہ کے سبھی ارکان موجود ہیں، **ایک درجی عام مساوات** یا عام خطی مساوات کہلاتی ہے۔

تعریف : مساوات کا وہ رکن جس میں نہ x ہو اور نہ y، مساوات کا **مستقل رکن** کہلاتا ہے۔ مساوات (1) میں c مستقل رکن ہے۔

3.7. معیاری شکلوں میں تبدیل کرنا :

عام طور پر ہر ایک خطی مساوات کو اب تک دی گئی کسی بھی معیاری شکل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

مثال کے طور پر، مان لیا مساوات

$$ax + by + c = 0 \qquad \ldots \quad (1)$$ کو

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p. \qquad \ldots \quad (2)$$ کی شکل میں بدلنا ہے۔

مساوات (1) کو اس طرح لکھیے کہ مستقل رکن منفی ہو (اگر ضرورت ہو تو -1، سے ضرب کر کے)۔ اب (2) میں x اور y کے ضربیوں کے مربعوں کا جوڑ 1 ہے۔ اس لیے (1) کو $+\sqrt{(a^2+b^2)}$ سے تقسیم کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}x + \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}y = \frac{-c}{\sqrt{(a^2+b^2)}},$$

جس میں دائیں طرف کی کسر مثبت ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\left\{\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\right\}^2+\left\{\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\right\}^2=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1,$$

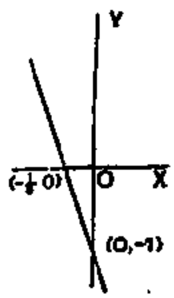
اس لیے ایک زاویہ β ایسا ضرور مل سکتا ہے کہ

$$\cos\beta=\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \quad \text{اور} \quad \sin\beta=\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

ان قیمتوں کو (1) میں رکھنے پر وہ $x\cos\beta+y\sin\beta=\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2)}},$ ہوجاتی ہے، جو $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ کی شکل کی ہے۔

مثال 1 : خطِ مستقیم $y+3x+1=0$ کا خاکہ کھینچیے۔

دی ہوئی مساوات سے ہم دیکھتے ہیں کہ جب $x=0,$ تب $y=-1,$ اس لیے ہمارا خط y- محور سے نقطہ $(0,-1)$ پر ملتا ہے۔ پھر جب $y=0,$ تو $x=-\frac{1}{3},$ اس لیے خط x- محور سے $(-\frac{1}{3},0)$ پر ملتا ہے۔ ان نقطوں کی ترسیم کرکے ان کو ایک خطِ مستقیم کے ذریعے ملانے پر مطلوبہ گراف ملتا ہے۔

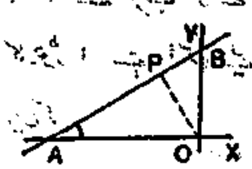


شکل 19

مثال 2 : خط $x-y\sqrt{3}+6=0$ محاور سے A اور B پر ملتا ہے۔ تو (i) $\angle XAB$ اور (ii) $\triangle AOB$ کا رقبہ متعین کیجیے۔

(i) دی ہوئی مساوات میں $\tan XAB=1/\sqrt{3},$ اس لیے $m=\frac{1}{\sqrt{3}}.$ یعنی $\angle XAB=30°.$

(ii) خط کی مساوات میں $y=0$ رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ $x=-6.$ اس لیے x- محور کے منفی حصے پر بنا داخلی قطع $AO=6.$ پھر مساوات



شکل 20

میں $x=0$ رکھنے پر

$$-y\sqrt{3}+6=0 \quad \text{یعنی} \quad y=2\sqrt{3}$$

اس لیے y- محور پر بنا داخلی قطع $OB=2\sqrt{3}$. ہے۔

اس لیے $\triangle AOB$ کا رقبہ، جو O پر زاویہ قائمہ بناتا ہے

$$=\tfrac{1}{2}OA\times OB=\tfrac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{3}=6\sqrt{3} \text{ مربع اکائی}$$

3.8. اختیاری مستقلات کی تعداد :

مساوات

$$y=mx+c \qquad \ldots \quad (1)$$

میں دو اختیاری مستقل ہیں، یعنی m اور c اور انھیں مخصوص قیمتیں دینے پر ہمیں مختلف خطوطِ مستقیم ملتے ہیں۔

جیومیٹری سے ہم جانتے ہیں کہ ایک خطِ مستقیم کا تعین کرنے کے لیے دو شرائط کی ضرورت ہوتی ہے، مثال کے طور پر خطِ مستقیم دو دیے ہوئے نقطوں سے گزرتا ہو، یا ایک دیے ہوئے نقطہ سے گزرتا ہو اور ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم کے متوازی ہو، وغیرہ۔ اگر ایسی شرائط دی ہوئی ہوں تو ہم انھیں مساوات کی شکل میں ظاہر کر کے m اور c کی قیمتیں نکال سکتے ہیں

مساوات

$$ax+by+c=0 \qquad \ldots \quad (2)$$

میں بظاہر تین اختیاری مستقلات ہیں یعنی a ، b ، c لیکن مساوات کو کسی بھی عدد سے ضرب یا تقسیم کرنے پر مساوات کے ذریعے ظاہر ہونے والا خطِ مستقیم وہی رہتا ہے، اس لیے (2) میں حقیقتاً صرف دو ہی ایسی رقمیں ہیں جنھیں ہم مرضی کے مطابق قیمتیں دے سکتے ہیں، یعنی a/b اور c/b (یا b/a اور c/a یا a/c اور b/c)۔ پھر ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات $ax+by+c=0$

میں ہم کسی ایک مستقل کو 1 مان سکتے ہیں، اس سے اس کی عمومیت میں کوئی کمی واقع نہیں ہوتی۔

3.9 ایک ہی خطِ مستقیم ظاہر کرنے والی دو مساوات:

اگر ہم مساوات کی دونوں جانب ایک ہی عدد سے تقسیم کریں تو بذریعہ مساوات ظاہر ہونے والے خطِ مستقیم میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی اس لیے اگر مساوات

$ax+by+c=0$ اور $a'x+b'y+c'=0$ میں

$$a/a'=b/b'=c/c'$$

تو دونوں مساوات ایک ہی خط کو ظاہر کریں گی۔ اس شکل میں ہم دونوں مساوات کو حائل مانتے ہیں۔

مشق 8

مبدا سے خط پر ڈالے گئے عمود کی لمبائی اور x- محور سے اس کا جھکاؤ متعین کیجیے اگر خط کی مساوات حسب ذیل ہو:

1. $\sqrt{3}x+y=7$
2. $x-y-6=0$
3. خط $3x-2y=9$ محاور کو A اور B میں کاٹتا ہے۔ $\angle OAB$ معلوم کیجیے اور $\triangle AOB$ کا رقبہ بتائیے۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1960]
4. خط $y-x\sqrt{3}+4=0$ کا x- محور سے جھکاؤ اور y- محور سے کٹنے والے داخلی قطع کی لمبائی معلوم کیجیے۔ اس مثلث کا رقبہ بھی بتائیے جو محاور اور اس خط سے بنتا ہے۔ [کشمیر 1965]

اس خط کا خاکہ کھینچیے جس کی مساوات یہ ہے:

5. $x-y=\frac{1}{3}$
6. $3x-2y+8=0$

7. خط $3x+4y=6$ کے محاور سے کٹنے والے داخلی قطع کی لمبائی اور اس کا وسطی نقطہ معلوم کیجیے۔

8. اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جس کے محاور سے کٹنے والے داخلی قطع کی لمبائی 5 اکائی ہے اور جو محاور سے 6 مربع اکائی رقبہ کا مثلث بناتا ہے۔ خط کا خاکہ کھینچیے۔

9. مستقلات a اور b کی قیمتیں نکالیے جس میں مساوات $3x-4y=8$ اور $2ax+3by+12=0$ ایک ہی خط مستقیم کو ظاہر کریں۔

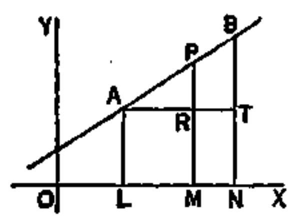
باب 4

خطِ مستقیم (مسلسل)

4·1 . دو نقطوں سے گزرنے والا خطِ مستقیم :

دو دیے ہوئے نقطوں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا :

مان لیا دیے ہوئے نقطے A اور B ہیں اور ان کے محدّدات بالترتیب (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) ہیں۔



شکل 21

تو AB کی مساوات کو x_1 ، y_1 ، x_2 اور y_2 کی رکنیت میں ظاہر کرنا ہے۔

مان لیا AB پر کسی نقطہ P کے محدّدات (x, y) ہیں۔ A ، P اور B سے OX پر عمود PM ، AL اور BN کھینچیے اور A سے BN پہ عمود AT کھینچیے۔ جو PM کو R پر کاٹے۔

تو △ARP اور △ATB مشابہ ہیں۔

$$\therefore \quad AR/AT = RP/TB.$$

AT ، AR وغیرہ کی قیمتیں رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

یعنی

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

جو نقطوں (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی مطلوبہ مساوات ہے۔

ضمنی نتیجہ : نقطہ (x_1, y_1) کو مبدا سے ملانے والے خطِ مستقیم کی مساوات $x/x_1 = y/y_1$ ہے۔

مشق 9

حسبِ ذیل نقطوں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے :

1. $(2, -3)$ اور $(-4, 9)$ 2. $(a, 0)$ اور $(0, b)$

3. $(am_1^2, 2am_1)$ اور $(am_2^2, 2am_2)$.

4. $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ اور $(a\cos\beta, b\sin\beta)$

5. ثابت کیجیے کہ نقطوں (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) کو ملانے والے خطِ مستقیم کے ڈھال کی شرح (یعنی m) یہ ہے : $(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$.

6. دکھائیے کہ نقطوں $(3, -4)$ اور $(-2, 6)$ کو ملانے والے خطِ مستقیم کے ڈھال کی شرح وہی ہے جو خط $y+2x+3=0$. کی۔

7. دکھائیے کہ حسبِ ذیل نقطوں کے سیٹ ہم خط ہیں۔

(i) $(a+2b, -2a+b)$ ، $(a-b, a+b)$ ، اور (a, b) [کشمیر '65]

(ii) $(a, b+c)$ ، $(b, c+a)$ اور $(c, a+b)$ [الٰہ آباد '60]

(iii) $(3a, 0)$ ، $(0, 3b)$ اور $(a, 2b)$ [دہلی ایڈ 1959]

8. دکھائیے کہ نقطوں (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) کو ملانے والے خط کی مبدا سے عمودی دوری $(x_1y_2+x_2y_1)/\sqrt{\{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\}}$. ہے۔ [علی گڑھ 1960]

4.2. دو خطوطِ مستقیم کا نقطۂ تقاطع :

مان لیا دو خطوطِ مستقیم کی مساواتیں

$$a_1x+b_1y+c_1=0, \quad \ldots \quad (1)$$ اور

$$a_2x+b_2y+c_2=0. \quad \ldots \quad (2)$$ ہیں۔

ان کا نقطۂ تقاطع دونوں خطوط پر واقع ہے ، اس لیے اس کے محدّدات ان دونوں مساوات

کو مطمئن کرتے ہیں۔ اس لیے وہ، مساوات (1) اور (2) کو ہمزاد مساواتیں مان کر حل کرنے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

مثال 1 : مندرجہ ذیل خطوط کا نقطہ تقاطع نکالیے :

$$x+2y=4 \quad \text{اور} \quad 2x-y=3$$

پہلی مساوات کو 2 سے ضرب دینے پر ہمارے پاس آتا ہے

$$4x-2y=6.$$

اسے دوسری مساوات میں جوڑنے پر، $5x=10$ یا $x=2$

اس قیمت کو پہلی مساوات میں رکھنے پر آتا ہے، $y=1$

اس طور پر دیے ہوئے خطوط کا نقطہ تقاطع $(2, 1)$ ہے۔

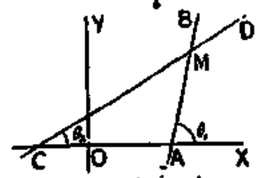
مثال 2 : خطوط $2x-y=3$ اور $4x-2y=7$ کا نقطہ تقاطع نکالیے۔

ان دونوں مساوات میں سے y کو خارج کرنے کے لیے پہلی کو 2 سے ضرب کر کے دوسری میں سے گھٹائیے۔ اس طرح نتیجہ $0=1$ ملتا ہے جو بے معنی ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ دونوں خطوط کے m ایک ہی ہیں، یعنی دونوں خطوط x- محور کو ایک ہی زاویہ پر کاٹتے ہیں۔ اس لیے وہ متوازی ہیں اور ایک دوسرے کو نہیں کاٹتے [حسب ذیل دفعہ دیکھیے]۔

4.3. خطوط کے درمیان زاویہ :

دو دیے ہوئے خطوط کے درمیان کا زاویہ نکالنا : مان لیا دو دیے ہوئے خطوط مستقیم AB اور CD کی مساوات $y=m_1x+c_1$ اور $y=m_2x+c_2$ ہیں اور وہ M میں ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں تو $\angle DMB$ نکالنا ہے۔



شکل 22

مان لیا خطوط AB اور CD x- محور سے بالترتیب زاویہ θ_1 اور θ_2 بناتے ہیں تو

$$\tan\theta_1=m_1 \quad \text{اور} \quad \tan\theta_2=m_2$$

$\therefore \; \tan DMB = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \dfrac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1+\tan\theta_1 \tan\theta_2} = \dfrac{m_1 - m_2}{1+m_1 m_2},$

یعنی خطوطِ مستقیم $y = m_1x + c_1$ اور $y = m_2x + c_2$ کے درمیان کا زاویہ ہے۔

$$\tan^{-1} \frac{\mathbf{m_1 - m_2}}{\mathbf{1 + m_1 m_2}}. \quad \dots (1)$$

ضمنی نتیجہ 1 : اگر $m_1 = m_2$, تو $\tan\theta_1 = \tan\theta_2$ ، یعنی $\theta_1 = \theta_2$; یعنی دونوں خطوط متوازی ہیں۔ اس لیے خطوط $y = m_1x + c_1$ اور $y = m_2x + c_2$ کے متوازی ہونے کی شرط یہ ہے کہ $\mathbf{m_1 = m_2}$.

ہم دیکھتے ہیں کہ اس حالت میں اوپر کے فارمولہ سے خطوط کے درمیان کا زاویہ صفر نکلتا ہے۔

ضمنی نتیجہ 2 : اگر $m_1 m_2 = -1$ تو (1) سے ہم دیکھتے ہیں کہ $\cot DMB = 0$ اس لیے $\angle DMB = \frac{1}{2}\pi$; یعنی خطوط ایک دوسرے پر عمود ہیں۔ اس طور پر خطوط $y = m_1x + c_1$ اور $y = m_2x + c_2$ کے عمود ہونے کی شرط یہ ہے کہ

$$\mathbf{m_1 m_2 = -1}.$$

4.31 عام حالت میں زاویہ نکالنا :

دو خطوطِ مستقیم $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ اور $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ (1) کے درمیان کا زاویہ نکالنا۔

یہاں $m_1 = -a_1/b_1$ اور $m_2 = -a_2/b_2$.

اس لیے خطوط (1) کے درمیان کا زاویہ حسبِ ذیل ہے :

$$\tan^{-1}\left\{\left(\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_1}\right)\Big/\left(1 + \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}\right)\right\}, \quad \text{یعنی} \quad \tan^{-1} \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1 a_2 + b_1 b_2}.$$

اس طور پر خطوط (1) متوازی تب ہوں گے جب $a_2b_1 - a_1b_2 = 0$ اور ایک

دوسرے پر عمود تب ہوں گے جب $a_1a_2+b_1b_2=0.$

نوٹ : اگر خطوطِ مستقیم کی مساوات $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p_1$ اور $x\cos\beta+y\sin\beta=p_2$ ہوں تو ان کے درمیان کا زاویہ معلوم کرنے کے لیے اور بھی آسان طریقہ ہے، کیوں کہ

دو خطوطِ مستقیم کے درمیان کا زاویہ = ان پر ڈالے گئے عمودوں کے درمیان کا زاویہ

$= \alpha\sim\beta.$

مثال : خطوطِ مستقیم $3x-y=6$ اور $2y+5x=3.$ کے درمیان کا زاویہ نکالیے۔

دونوں خطوط کے m بالترتیب 3 اور $-\frac{5}{2}$ ہیں۔

اس لیے ان کے درمیان کا زاویہ $= \tan^{-1}\frac{3-(-\frac{5}{2})}{1+3\times(-\frac{5}{2})} = \tan^{-1}\frac{\frac{11}{2}}{-\frac{13}{2}}$

$= \tan^{-1}(-\frac{11}{13}),$ جو ایک زاویہ منفرجہ ہے۔

خطوط کے درمیان کا زاویہ حادہ $= \tan^{-1}\frac{11}{13}.$

مشق 10

حسبِ ذیل مساوات والے خطوطِ مستقیم کا نقطہ تقاطع اور درمیان کا زاویہ معلوم کیجیے :

1. $x+3y=5$ اور $x-2y+5=0.$

2. $\frac{3}{2}x-\frac{5}{3}y-2=0$ اور $2y-\frac{3}{4}=0.$

3. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ اور $\frac{x}{b}-\frac{y}{a}=1.$ [دہلی پری انجینیرنگ 1960]

4. $y=m_1x+a/m_1$ اور $y=m_2x+a/m_2.$

5. اس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو مبدا کو $(4, 6)$ سے ملانے والے خطِ مستقیم کا عمودی ناصف ہے۔

6. m کی وہ قیمت نکالیے جس سے خطوط $y=x+1.$ ، $y=2(x+1)$ اور $y=mx+3$ ہم نقطہ ہوں۔ [الہٰ آباد 1947]

7. خطوط $2y+x=5$ ، $y+2x=7$ اور $y-x=1.$ سے بننے والے

مثلث کا رقبہ نکالیے۔ [ایچ۔ ایس۔ ایس۔ پریاگ 1956]

8. دکھائیے کہ خطوط $y=m_1x+c_1$ ، $y=m_2x+c_2$ اور $x=0$ سے بننے والے مثلث کا رقبہ $\frac{1}{2}(c_1-c_2)^2/(m_2-m_1)$ ہے [الٰہ آباد 1959]

4.4. خطوطِ مستقیم کے نظام :

خطِ مستقیم کی عام مساوات

$$ax+by+c=0,$$

ہے کیوں کہ اس میں a ، b ، c کو مخصوص قیمتیں دے کر ہر ایک خط کی مساوات حاصل کی جاسکتی ہے۔

اب اگر خطِ مستقیم کی مساوات میں ایک ہی مستقل ہو جو اختیاری ہے (یعنی جسے مرضی کے مطابق مختلف قیمتیں دی جاسکتی ہیں) اور دوسرے مستقلات مخصوص قیمتیں رکھتے ہوں تو اختیاری مستقل کو مختلف قیمتیں دینے سے ہمیں خطوط مستقیم کا ایک نظام ملے گا۔ اس طرح مساوات

$$2x+3y+c=0, \quad \ldots \quad (1)$$

جس میں c ایک اختیاری مستقل ہے، جس کو مختلف قیمتیں دینے پر لاتعداد مساوات حاصل کی جاسکتی ہیں، جیسے $2x+3y+1=0$, $2x+3y-\frac{1}{2}=0$, $2x+3y-\sqrt{3}=0$, وغیرہ۔

4.41. خطوطِ مستقیم کے کچھ نظام :

(i) $ax+by+c=0$. کے متوازی خطوط : کیوں کہ متوازی خطوط x- محور سے برابر زاویہ بناتے ہیں اس لیے ان کے m برابر ہوں گے۔

دیے ہوئے خط $ax+by+c=0$ کا m ، $-a/b$ کے برابر ہے، اس لیے دیے ہوئے خط کے متوازی کسی خط کی مساوات $y=(-a/b)x+\lambda'$ ، ہوگی

جہاں λ' ایک اختیاری مستقل ہے۔

b سے ضرب کرنے اور $b\lambda'$ کی جگہ λ رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

خط $ax+by+c=0$ کے متوازی کسی بھی خط کی مساوات

$$ax+by=\lambda,$$

ہوگی، جہاں λ کوئی اختیاری مستقل ہے۔

نوٹ: مساوات $ax+by+c=0$ اور $ax+by=\lambda$ کے موازنہ سے ہمیں یہ اصول ملتا ہے کہ دیے ہوئے خط کے متوازی کسی بھی خطِ مستقیم کی مساوات، دیے ہوئے خط کی مساوات میں مستقل رکن کو بدلنے سے حاصل ہوتی ہے۔

(ii) $ax+by+c=0$ پر عمود خطوط ـــــ خط $ax+by+c=0$ کا m ، $-a/b$ ہے، اس لیے اس خط پر عمود کسی بھی خط کا m (§4·3 کا ضمنی نتیجہ 2 دیکھیے) $-1\div(-a/b)$ یعنی b/a ہوگا۔ اس لیے دیے ہوئے خط پر عمود کسی بھی خط کی مساوات

$$y=(b/a)x+\lambda'$$

ہوگی، جہاں λ' کوئی اختیاری مستقل ہے۔

a سے ضرب کرنے اور $a\lambda'$ کی جگہ λ رکھنے پر، ہم دیکھتے ہیں کہ

خط $ax+by+c=0$ پر عمود کسی بھی خطِ مستقیم کی مساوات

$$ay-bx=\lambda,$$

ہے، جہاں λ کوئی اختیاری مستقل ہے۔

نوٹ: مساوات $ax+by+c=0$ اور $ay-bx=\lambda$ کے موازنہ سے ہمیں حسبِ ذیل اصول ملتا ہے:

دیے ہوئے خطِ مستقیم پر عمودی خط کی مساوات حاصل کرنے کے لیے، دیے ہوئے خط کی مساوات میں x اور y کے ضربیوں کو بدلیے اور ان میں سے ایک کی علامت بھی، اور مستقل رکن میں مناسب تبدیلی کیجیے۔

(iii) نقطہ (x_1, y_1) سے گزرنے والے خطوط :

مان لیا ایک دیے ہوئے نقطہ (x_1, y_1) سے گزرنے والے خط مستقیم کی عام مساوات

$$y = mx + c. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ہے۔ تب کیوں کہ (x_1, y_1) اس پر ہے، اس لیے

$$y_1 = mx_1 + c. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

(2) کو (1) میں سے گھٹانے پر، c خارج ہوجاتا ہے اور ہمیں حسب ذیل مساوات ملتی ہے:

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

جو مطلوبہ مساوات ہے۔ اس طرح نقطہ (x_1, y_1) سے گزرنے والے کسی بھی خط کی مساوات

$$\mathbf{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

ہے، جہاں m کوئی اختیاری مستقل ہے۔

مثال 1 : نقطہ $(4, -5)$ سے گزرنے والے ان خطوط کی مساوات معلوم کیجیے جو بالترتیب خط $3x-2y=1$ کے متوازی اور عمود ہیں۔ [الٰہ آباد 1963]

(i) خط $3x-2y=1$ کے متوازی کوئی بھی خط

$$3x - 2y = \lambda,$$

ہے، جہاں λ اختیاری ہے۔

اب ہم λ کو اس طرح چُنیں گے کہ مساوات (1) محدّدات $(4, -5)$ سے مطمئن ہوجائے۔ ان محدّدات کو (1) میں بدلنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\lambda = 3 \times 4 - -2 \times 5 = 2.$$

اس لیے متوازی خط کی مساوات $3x-2y = 2$ ہے۔

(ii) خط $3x-2y-5=0$ پر عمود کسی بھی خط کی مساوات

$$3y+2x=\lambda \quad \ldots \quad (2),$$

ہے۔ یہ خط نقطہ (4, 5) سے تب گزرے گا جب

$3\times4+2\times5=\lambda$ یعنی $\lambda=22$

اس لیے مطلوبہ عمودی خط کی مساوات $3y+2x=22$ ہے۔

مثال 2 : نقطہ (3, 2) سے گزرنے والے ان خطوط کی مساوات بتائیے جو خط $x-2y=3$ سے 45° کا زاویہ بناتے ہوں۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1959]

نقطہ (3, 2) سے گزرنے والا کوئی بھی خط

$$(y-2)=\lambda(x-3), \quad \ldots \quad (1)$$

ہے۔ اب λ کو اس طرح چننا ہے کہ مساوات (1) سے ظاہر کیے گئے خطوط اور $x-2y=3$ کے درمیان کا زاویہ 45° ہو۔

ان خطوط کے m ہیں λ اور $\frac{1}{2}$

$$\therefore \quad \frac{\lambda-\frac{1}{2}}{1+\lambda\times\frac{1}{2}}=\pm\tan 45^\circ=\pm1$$

اس لیے $\lambda-\frac{1}{2}=\pm(\frac{1}{2}\lambda+1)$

یعنی $\lambda=-\frac{1}{3}$ یا $\lambda=3$

اس طرح خطوط کی مطلوبہ مساوات حسب ذیل ہیں :

$(y-2)=-\frac{1}{3}(x-3)$ اور $(y-2)=3(x-3)$

یعنی $3y+x=9$ اور $y-3x+7=0$

مشق 11

1. خط $3x-4y=7$ کے متوازی اور (1, 1) سے گزرنے والے خط مستقیم کی مساوات بتائیے۔ [علی گڑھ 1955]
2. نقطہ (10 ,6−) سے گزرنے والے اور خط مستقیم $7x+8y=5$ پر عمود کی مساوات معلوم کیجیے۔ [الہ آباد 1957]
3. (i) نقطہ (1 ,2) سے گزرنے والے خطوط مستقیم کی عام مساوات حاصل کیجیے۔ لہٰذا

وہ خط بتائیے جو (2, 1) سے گزرے اور x- محور سے 45° کا زاویہ بنائیے۔ [کشمیر 1965]

(ii) ان دو خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو مبدا سے گزرتے ہیں اور خط $x+2y=2$ سے 45° کا زاویہ بناتے ہیں۔ ان دونوں خطوط کے درمیان کا زاویہ کتنا ہے؟ [گوالیار 1959]

4. نقطہ (4 ,2−) سے گزرنے والے ان خطوط مستقیم کی مساوات حاصل کیجیے جو بالترتیب خط $5x-2y=6$ کے متوازی اور عمود ہیں۔

5. نقطہ (2, 3) سے خط $3x+4=y$ پر پائے عمود کے محددات نکالیے۔ [الٰہ آباد 1955]

6. خطوط مستقیم $y=0$ ، $y=2x$ اور $y=6x+5$ سے بنے مثلث کا عمودی مرکز نکالیے۔ [راجپوتانہ 1957]

7. کس نسبت میں نقطوں (1−,2) اور (6, 5) کو ملانے والا خط اس پر نقطہ (4, 1) سے کھینچے گئے عمود کے ذریعے تقسیم ہوتا ہے؟

8. قائمہ زاویہ مساوی الساقین مثلث کے ضلعوں کی مساوات معلوم کیجیے اگر وتر خط $3x+4y=4$ پر ہو اور سامنے کا راس (2, 2) ہو۔

9. نقطہ (2, 1) سے گزر کر کس سمت میں ایک خط کھینچا جائے جس سے خط $x+y=4$ سے اس کا نقطہ تقاطع دیے ہوئے نقطہ سے $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ کی دوری پر ہو؟ [دیا ہے کہ $\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$] [اجمیر 1950]

10. اختیاری مستقل λ کا استعمال کر کے ان خطوط مستقیم کے نظام کی عام مساوات لکھیے جو

(i) مبدا سے مقرر دوری p پر ہیں۔

(ii) x- محور پر ایک مستقل داخلی قطع a کاٹتے ہیں۔

(iii) x- محور سے دیا ہوا زاویہ α بناتے ہیں۔

(iv) محاور پر ایسے داخلی قطع بناتے ہیں جن کا جوڑ ایک مستقل c ہے۔

11. دیے ہوئے خط مستقیم پر عمود کسی بھی خط مستقیم کی مساوات لکھنے کے حسب ذیل

اصولوں کو ثابت کیجیے :

(i) دیے ہوئے خط مستقیم کی مساوات میں x کی جگہ y اور y کی جگہ $-x$ لکھیے اور مستقل رکن کو ٹھیک طرح بدلیے۔

(ii) دیے ہوئے خط کی مساوات میں x اور y کے ضربیوں کی جگہ ان کے مقلوب لکھیے، ان میں سے ایک کی علامت بدلیے اور مستقل رکن کو ٹھیک طرح بدلیے۔

لہٰذا اس خط مستقیم کی مساوات حاصل کیجیے جو نقطہ (x', y') سے گزرے اور حسب ذیل خط پر عمود ہو :

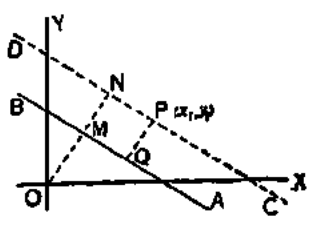
(i) $x/a+y/b=c$ (ii) $ax+by+c=0$

[اجمیر 1955]

4.5. عمود کی لمبائی :

ایک دیے ہوئے خط پر دیے ہوئے نقطہ سے کھینچے گئے عمود کی لمبائی نکالنا۔

پہلی صورت : مان لیا دیا ہوا خط AB ہے



شکل 23

اور اس کی مساوات

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \quad (1)$$

ہے اور مان لیا دیا ہوا نقطہ P ہے اور اس کے محددات (x_1, y_1) ہیں۔

مان لیا P سے AB پر عمود PQ ہے۔

تو PQ کی لمبائی نکالنا مطلوب ہے۔

P سے AB کے متوازی CD کھینچیے۔ O سے CD پر عمود ON کھینچیے۔ جو AB کو M میں کاٹے۔

مان لیا $ON=p'$ تو CD کی مساوات

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p'$$

ہے، جس میں p' نامعلوم ہے۔

لیکن CD، نقطہ (x_1, y_1) سے گزرتی ہے۔ اس لیے یہ محددات اوپر کی مساوات کو مطمئن کریں گے۔ اس لیے

$$p' = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

اس لیے $PQ = NM = ON - OM = p' - p$

$= x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p,$ (بذریعہ (2))

یعنی نقطہ (x_1, y_1) سے خط $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ پر ڈالے گئے عمود کی لمبائی ہے۔

$$\mathbf{x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p.}$$

دوسری صورت : مان لیا دیے ہوئے خط کی مساوات

$$ax + by + c = 0.$$

ہے تو اس مساوات کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں :

$$\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}x + \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}y + \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = 0, \quad (3)$$

جو (1) کی شکل کی ہے [دیکھیے دفعہ 3·7 §]

اس لیے پہلی صورت میں حاصل ہوئے فارمولا کا استعمال کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ (x_1, y_1) سے خط $ax+by+c=0$ پر ڈالے گئے عمود کی لمبائی ہے :

$$\frac{\mathbf{ax_1 + by_1 + c}}{\sqrt{(\mathbf{a^2 + b^2})}}. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

ہم دیکھتے ہیں کہ (x_1, y_1) سے خط $ax+by+c=0$ پر ڈالے گئے عمود کی لمبائی عبارت $ax+by+c$ میں x کی جگہ x_1 اور y کی جگہ y_1 رکھ کر $\sqrt{(a^2+b^2)}$ سے تقسیم دینے پر ملتی ہے۔

ضمنی نتیجہ : خط $ax+by+c=0$ پر مبدا سے ڈالا گیا عمود $c/\sqrt{(a^2+b^2)}$ ہے۔

نوٹ : مساوات $ax+by+c=0$ اور $-ax-by-c=0$ ، ایک ہی خطِ مستقیم ظاہر کرتی ہیں لیکن فارمولا (4) سے عمود کی لمبائی ایک صورت میں مثبت ہوگی اور دوسری میں منفی۔ اس لیے کچھ صورتوں میں طالب علم کو (4) کے ذریعے عمود کی لمبائی منفی ملے گی، لیکن اسے منفی علامت پر غور نہیں کرنا چاہیے اور جب تک کہ کوئی خاص وجہ نہ ہو جواب میں مثبت قیمت دینی چاہیے۔

مثال 1 : نقطہ $(-2, 1)$ سے خط $3x-4y-1=0$ پر ڈالے گئے عمود کی لمبائی نکالیے۔

فارمولا کا استعمال کرنے سے، عمود کی لمبائی

$$=\{3\times(-2)-4\times1-1\}/\sqrt{\{3^2+(-4)^2\}}=-\tfrac{11}{5}$$

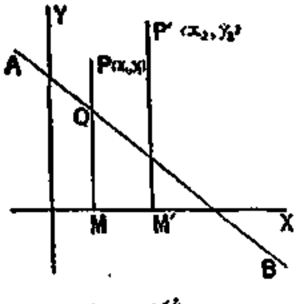
علامت پر غور نہ کرنے سے عمود کی لمبائی $=\tfrac{11}{5}$

4.6 . ایک خط کے دو پہلو:

یہ جانچ کرنے کے لیے کہ دو دیے ہوئے نقطے ایک خطِ مستقیم کی ایک ہی جانب ہیں یا مخالف جوانب، حسب ذیل قضیہ کا استعمال کیا جا سکتا ہے :

دو نقطے (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) خط $ax+by+c=0$ کی ایک ہی جانب تب ہوں گے جب عبارت ax_1+by_1+c اور ax_2+by_2+c ایک ہی علامت کی ہوں، وہ مخالف جوانب ہوں گے اگر یہ عبارتیں مخالف علامتوں کی ہوں۔

ثبوت اس طرح ہے :



شکل 24

مان لیا P اور P′ دیے ہوئے نقطے (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) ہیں اور دیے ہوئے خط AB کی مساوات

$$ax+by+c=0 \qquad (1)$$

ہے۔ P سے y- محور کے متوازی خط PM کھینچیے جو دیے ہوئے خط کو (اگر ضرورت ہو،

تو بڑھانے پر) Q میں کاٹے۔ تو Q کا طول بھی x_1 ہے ؛ مان لیا Q کا عرض y' ہے۔

اب مان لیا b مثبت ہے تو Q یعنی نقطہ (x_1, y') کے خط (1) پر رہنے کی وجہ سے عبارت

$$ax_1+by'+c$$

صفر کے برابر ہوگی۔ اب (جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے) نقطہ P خط مستقیم AB سے اوپر ہے ؛ اس لیے $y_1>y'$ ۔

لہٰذا $ax_1+by_1+c>ax_1+by'+c.$

لیکن دائیں جانب صفر ہے۔ اس لیے ax_1+by_1+c مثبت ہے۔

اسی طرح اگر P بھی AB سے اوپر ہو، تو ax_2+by_2+c بھی مثبت ہوگا۔

اس طور پر اگر P اور P' دونوں خط AB سے اوپر ہیں تو عبارتیں ax_1+by_1+c اور ax_2+by_2+c ایک ہی علامت کی ہیں۔

اسی طرح اگر P اور P' دونوں AB سے نیچے ہیں تو ax_1+by_1+c اور ax_2+by_2+c دونوں منفی اور اس لیے ایک ہی علامت کی ہوں گی۔

ظاہر ہے اس قضیہ کا عکس بھی صحیح ہے، یعنی اگر مذکورہ بالا دونوں عبارتیں ایک ہی علامت کی ہوں تو P اور P' خط کے ایک ہی جانب ہوں گے، یا دونوں اس کے نیچے یا دونوں اس کے اوپر۔

لیکن اگر مذکورہ بالا دونوں عبارتیں مخالف علامتوں کی ہوں تو ایک نقطہ خط کے نیچے اور دوسرا اوپر ہوگا۔

اس طرح قضیہ حل ہو جاتا ہے۔

نوٹ : اگر b منفی یا صفر ہو تو بھی یہ قضیہ اوپر کی طرح حل کیا جاسکتا ہے۔

ضمنی نتیجہ : مان لیا کسی خط مستقیم کی مساوات $ax+by+c=0$ ہے اور (x_1, y_1) کوئی نقطہ ہے۔ تو اوپر کے طریقے سے ظاہر ہے کہ اگر نقطہ خط کے ایک جانب ہو تو عبارت ax_1+by_1+c مثبت ہوگی، اگر نقطہ دوسری جانب ہو تو یہ

عبارت منفی ہوگی اور اگر نقطہ خط پر ہی مقیم ہو تو عبارت صفر ہوگی۔

مثال : بتلایئے کہ نقطے $(3, 4)$ اور $(2, -6)$ خط $3x-4y=8$ کے ایک ہی جانب ہیں یا نہیں ؟

عبارت $3x-4y-8$ میں محددات (x, y) کی جگہ $(3, 4)$ اور $(2, -6)$ کو رکھنے پر ہمیں حسبِ ذیل قیمتیں ملتی ہیں :

$$3\times3-4\times4-8 \quad \text{اور} \quad 3\times2-4\times(-6)-8$$

یعنی -15 اور 22، جو مخالف علامتوں کی ہیں۔

لہذا دیے ہوئے نقطے دیے ہوئے خط کے مخالف جوانب ہیں۔

مشق 12

عمود کی لمبائی نکالیے جو حسبِ ذیل حالات میں کھینچا گیا ہے : نقطہ

1. $(0, 3)$ سے خط $9x-40y=3$ پر
2. $(-4, 1)$ سے خط $3(x-4)=4(y+3)$ پر
3. $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ سے خط $x\cos\beta+y\sin\beta=a$ پر
4. دو سڑکیں جو مساوات $x+y=8$ اور $y-x=6$ کے ذریعے ظاہر ہوتی ہیں ایک دوسرے سے A پر ملتی ہیں۔ ایک ایسا جانچ گھر بنانا ہے جو ہر ایک سڑک سے 100 کی دوری پر ہو۔ محددات کے مبدا کے اعتبار سے گھر کے ممکن مقامات بتایئے۔

[رڑکی 1960]

5. دکھایئے کہ دو نقطوں $\{\pm\sqrt{(a^2-b^2)}, 0\}$ سے خطِ مستقیم $(x/a)\cos\theta+(y/b)\sin\theta=1$ پر کھینچے گئے عمودوں کی ضرب b^2 ہے۔

[علی گڑھ 1951]

6. اگر خطوطِ مستقیم $x\sec\theta-y\,\text{cosec}\,\theta=a$ اور $x\cos\theta-y\sin\theta=a\cos2\theta$ پر مبدا سے کھینچے گئے عمود p اور p' ہوں تو ثابت کیجیے کہ

$$4p^2+p'^2=a^2.$$

[الہ آباد 1960]

7. ثابت کیجیے کہ ان متوازی خطوط کے درمیان عمودی دوری جن کی مساواتیں
$ax+by+c=0$ اور $k(ax+by)+d=0$ ہیں،
$(c-d/k)\div\sqrt{(a^2+b^2)}$ ہے۔
لہذا خطوط $3x-2y=1$ اور $6x+9=4y$ کے درمیان عمودی دوری بتائیے۔

8. ثابت کیجیے کہ چار خطوط $ax\pm by\pm c=0$ ایک معین بناتے ہیں جس کا رقبہ
$2c^2/ab$ ہے۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1960]

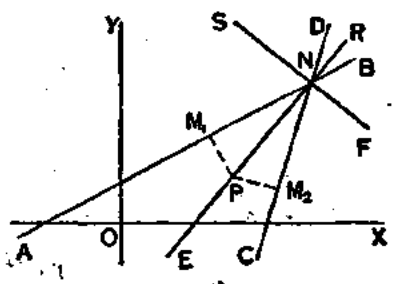
9. نقطہ $(0, a)$ سے گزرنے والے ان دو خطوط کی مساوات معلوم کیجیے جن پر
$(2a, 2a)$ سے کھینچے گئے ہر ایک عمود کی لمبائی a ہے۔
پائے عمود کو ملانے والے خطِ مستقیم کی مساوات بھی معلوم کیجیے۔ [راجپوتانہ 1941]

10. دکھائیے کہ وہ مثلث جس کے راس $(3, 7)$ ، $(-3, -1)$ اور $(-1, -1)$ ہیں،
خط $3x-8y=7$ کے مکمل طور پر ایک ہی جانب ہے۔

11. $2x-3y+5=0$ ، $3x-2y-5=0$ ، $3y-2x-15=0$ اور
$2y-3x+10=0$ سے بننے والے متوازی الاضلاع کا رقبہ نکالیے۔
[جبل پور 1960]

4.7. زاویوں کے ناصف :

دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کے درمیان کے زاویوں کی تنصیف کرنے والے خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کرنا۔



شکل 25

مان لیا $a_1x+b_1y+c_1=0$ اور $a_2x+b_2y+c_2=0$ دیے ہوئے خطوط AB اور CD کی مساوات ہیں اور یہ خطوط نقطہ N میں ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں۔ مان لیا AB اور CD

کے درمیان کے زاویوں کے ناصف NE اور NS ہیں۔

تو ناصفوں NE اور NS کی مساوات معلوم کرنا مطلوب ہے۔

ناصفوں میں سے کسی ایک پر، مان لیا NE پر کوئی نقطہ P لیا اور مان لیا اس کے محدّدات (x_1, y_1) ہیں۔

P سے بالترتیب AB اور CD پر عمود PM_1 اور PM_2 کھینچیے۔

توکیوں کہ P، $\angle ANC$ کے ناصف پر واقع ہے اس لیے P سے ان خطوط پر کھینچے گئے عمود برابر ہیں۔ اس لیے

$$\frac{a_2x_1+b_2y_1+c_2}{\sqrt{(a_2^2+b_2^2)}} \quad \text{اور} \quad \frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}} \qquad \ldots \quad (1)$$

مقدار میں برابر ہیں یعنی نقطہ (x_1, y_1) کے محدّدات حسب ذیل رشتوں میں سے ایک کو مطمئن کرتے ہیں :

$$\frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}} = \pm\frac{a_2x_1+b_2y_1+c_2}{\sqrt{(a_2^2+b_2^2)}}.$$

اس لیے (x_1, y_1) کا طریق یعنی خطوط $a_1x+b_1y+c_1=0$ اور $a_2x+b_2y+c_2=0$ کے درمیان کے زاویوں کے ناصفوں کی مساوات یہ ہیں :

$$\frac{\mathbf{a_1x+b_1y+c_1}}{\sqrt{(\mathbf{a_1^2+b_1^2})}} = \pm\frac{\mathbf{a_2x+b_2y+c_2}}{\sqrt{(\mathbf{a_2^2+b_2^2})}}. \qquad (2)$$

نوٹ : ہم دو ناصفوں میں اس طرح پہچان کر سکتے ہیں :

مان لیا دیے ہوئے خطوط کے مساوات اس طرح (اگر ضرورت ہو تو 1− سے ضرب کر کے) لکھ دیے گئے ہیں کہ ان کے مستقل رکن مثبت ہیں؛ اور مان لیا ناصفوں کی مساوات میں جو جذر المربع ہیں ان کی قیمتیں مثبت لی گئی ہیں۔

تو اس زاویہ کے ناصف میں جس میں مبدا پڑتا ہے (شکل میں ناصف NE میں) یہ خاصیت ہے کہ اس پر مقیم کوئی بھی نقطہ دونوں دیے ہوئے خطوط کے اسی

طرف پڑتا ہے جس طرف مبدا ہے [اس طرح نقطہ P ، AB اور CD کے اسی طرف پڑتا ہے جس طرف O ہے] ۔

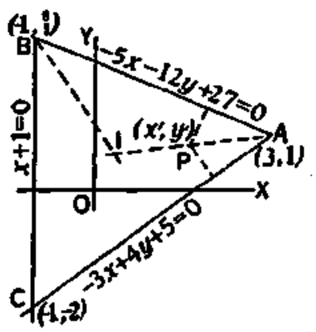
لیکن مانے ہوئے کے مطابق c_1 اور c_2 دونوں مثبت ہیں ، اس لیے مبدا کے محددات دونوں عبارتوں (1) کو مثبت بناتے ہیں۔

اس لیے دونوں عبارتیں (1) NE پر واقع ہیں ایک نقطہ P کے لیے مثبت ہوں گی۔

اس لیے مساوات (2) میں مثبت علامت لینے سے ناصف NE کی مساوات ملے گی۔

یعنی اگر c_1 اور c_2 مثبت ہیں اور جذرالمربع کی مثبت قیمتیں لی جائیں تو مساوات (2) سے ملے دو ناصفوں میں سے وہ ناصف، جو + علامت لینے سے حاصل ہوتا ہے، اس زاویہ کا ناصف ہے جس میں مبدا ہے۔

مثال : اگر کسی مثلث کے ضلعے $x+1=0$ ، $4y+5=3x$ اور $5x+12y=27$ ہیں ، تو مثلث کا داخلی مرکز نکالیے۔



شکل 26

تبدیل ترتیب سے ضلعوں کی مساوات ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں :

$x+1=0,\ -3x+4y+5=0$ اور

$5x+12y-27=0.$

مان لیا یہ ضلعے بالترتیب CA, BC, AB ہیں۔

ان مساوات کو دو دو لے کر حل کرنے پر

A, B, C بالترتیب $(3, 1)$ ، $(-1, \frac{8}{3})$ اور $(-1, -2)$ نکلتے ہیں۔

اگر A, B, C کے محددات بالترتیب BC ، CA ، AB کی مساوات کے بائیں جانب رکھے جائیں، (جو A, B, C کے روبرو ضلعے ہیں) تو نتیجہ +, +, − ہوتا ہے۔ لہٰذا تیسری مساوات کو 1− سے ضرب کیا جس سے A, B, C کے محددات کو ان کے روبرو ضلعوں کی مساوات کے بائیں جانب رکھنے سے ایک ہی

علامت (یہاں مثبت) کے نتائج ملتے ہیں۔

اب AB , CA, BC کی مساوات بالترتیب

$x+1=0$ $\quad -3x+4y+5=0$, اور $\quad -5x-12y+27=0$ ہوجائیں گی۔

مان لیا A کے داخلی ناصف AI پر P کوئی نقطہ ہے۔ تو شکل سے ظاہر ہے کہ P ضلع AB کے اس طرف ہے جس طرف C اور AC کے اس طرف ہے جس طرف B ہے۔

اس لیے P کے محددات دونوں عبارتوں

$-5x-12y+27$ اور $-3x+4y+5$

کو ایک ہی علامت (مثبت) کا بنائیں گے۔ اس لیے زاویہ BAC کے داخلی ناصف کی مساوات حسب ذیل ہونی چاہیے :

$$\frac{-5x-12y+27}{+\sqrt{\{(-5)^2+(-12)^2\}}}=+\frac{-3x+4y+5}{+\sqrt{\{(-3)^2+4^2\}}},$$

i.e $\quad 5(-5x-12y+27)-13(-3x+4y+5)=0,$

یا

$$x-8y+5=0, \qquad \ldots \quad (1)$$ (14 سے تقسیم کرنے پر)

اسی طرح زاویہ ABC کے داخلی ناصف کی مساوات حسب ذیل ہے :

$$\frac{x+1}{+\sqrt{\{1^2+0^2\}}}=+\frac{-5x-12y+27}{+\sqrt{\{(5^2)+(-12)^2\}}},$$

یعنی

$$9x+6y-7=0. \qquad \ldots \quad (2)$$

(1) اور (2) کو حل کرنے پر داخلی مرکز کے محددات $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ نکلتے ہیں۔

مشق 13

حسب ذیل خطوط کے درمیانی زاویوں کے ناصفوں کی مساوات نکالیے :

1. $8x+15y=1$ اور $3x-4y=2.$

2. $3x-2y+1=0$ اور $18x+y-5=0$.

3. $x/a+y/b=1$ اور $x/b+y/a=1$.

4. $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ اور $y=x\cot\alpha$.

5. خطوط $x-2y=5$ اور $2y-11x=6$ سے برابر نقطوں کا طریق معلوم کیجیے۔

6. خط $3x+2y=5$ پر ان نقطوں کے محددات بتائیے جو خطوط $4x+3y=7$ اور $2y-5=0$ سے برابر دوری پر ہوں۔ [گوالیار 1958]

7. نقطہ $(4, 5)$ سے گزرنے والے ان دو خطوط کی مساوات معلوم کیجیے جو خطوط مستقیم $3x=4y+7$ اور $5y=12x+6$ سے برابر زاویے بناتے ہوں۔
[انجین 1960]

8. ایک مثلث کے راس $(-9,-8)$, $(15,-2)$ اور $(-1, 11)$ ہیں۔ پہلے راس پر بنے زاویہ کے داخلی ناصف کی مساوات معلوم کیجیے۔

9. اس مثلث کے داخلی مرکز کے محددات بتائیے جس کے ضلعے y-محور و $3x+4y=10$ اور $3y-4x=15$ ہیں۔ [انجین 1962]

10. ایک مثلث کے تین راس A, B, C بالترتیب $(2, 1)$ ، $(6, 4)$ اور $(-1,-3)$ ہیں۔ زاویہ A کے ناصفوں کی مساوات نکالیے۔ ان میں سے کونسا داخلی ناصف ہے۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1959]

11. تحلیلی طور پر ثابت کیجیے کہ دو خطوط مستقیم کے درمیانی زاویوں کے ناصف ایک دوسرے پر زاویہ قائمہ بناتے ہیں۔

12. خطوط $4x+3y-7=0$ اور $24x+7y-31=0$ کے درمیانی زاویوں کے ناصفوں کی مساوات نکالیے۔ ان میں سے کون سا اس زاویہ کا ناصف ہے جس میں مبدا ہے۔ [انجین 1960]

مشق 14 (باب 1−4 پر)

1. اگر خط $x/a+y/b=1$ سے مبدا کی عمودی دوری p ہو تو ثابت کیجیے کہ

$1/p^2=1/a^2+1/b^2$ [اجمیر 1951]

2. ایک خطِ مستقیم کا وسطی نقطہ (a, b) ہے اور (x_1, y_1) اس کا ایک سرا ہے۔ دوسرے سرے کے محددات بتائیے۔

3. اگر $(1, 1)$، $(7, -3)$، $(12, 2)$ اور $(7, 21)$ کسی چارضلعی کے راس ہوں تو ثابت کیجیے کہ اس کا رقبہ 132 مربع اکائی ہے۔ [رڑکی 1945]

4. ایک خطِ مستقیم x-محور سے 4 اکائی کے برابر داخلی قطع کاٹتا ہے اور اس پر مبدا سے کھینچا گیا عمود x-محور سے 60° کا زاویہ بناتا ہے۔ خط کی مساوات معلوم کیجیے۔

5. ثابت کیجیے کہ اگر $ad=bc$ اور (a, b)، (c, d)، $(a-c, b-d)$ ہم خط ہیں۔ یہ بھی دکھائیے کہ ان نقطوں سے گزرنے والا خطِ مستقیم مبدا سے بھی گزرتا ہے۔

[الٰہ آباد 1962]

6. اس مثلث کا وسطانی مرکز نکالیے جس کے ضلعے یہ ہیں :

(i) $3x+2y=6$ ، $x-3y+9=0$ اور $4x-y=8$

(ii) $y=4$ ، $3x-4y=17$ اور $12x+5y=12$ [جبل پور '60]

7. اس مثلث کا عمودی مرکز نکالیے جس کے راس یہ ہیں :

(i) $(2, 0)$ ، $(3, 4)$ اور $(0, 3)$ [الٰہ آباد 1948]

(ii) $(0, 0)$ ، $(2, -1)$ اور $(-1, 3)$ [علی گڑھ پی۔یو۔سی 1959]

8. ثابت کیجیے کہ وہ چارضلعی جس کے راس $A(-2, 5)$، $B(4, -1)$، $C(9, 1)$ اور $D(3, 7)$ ہیں، ایک متوازی الاضلاع ہے۔ متوازی الاضلاع کا رقبہ نکالیے۔ اس نقطہ E کے محددات بتائیے جو AC کو $2:1$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ دکھائیے کہ D ، E اور AB کا وسطی نقطہ ہم خط ہیں۔

[راجپوتانہ 1950]

9. نقطے $(3, -4)$ اور $(-6, 5)$ ایک متوازی الاضلاع کے وتر کے سرے ہیں۔

تیسرا راس $(-2, -1)$ ہے۔ چوتھا راس نکالیے۔

10. ثابت کیجیے کہ اس خط مستقیم کی مساوات جو نقطہ $(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ سے گزرتا ہے اور خط مستقیم $x\sec\theta+y\,\text{cosec}\,\theta=a$ پر عمود ہے، یہ ہے :

$x\cos\theta-y\sin\theta=a\cos 2\theta.$ [الٰہ آباد 1965]

11. دکھائیے کہ مبدا سے اس خط پر عمود، جو نقطوں $(c\cos\alpha, c\sin\alpha)$ اور $(c\cos\beta, c\sin\beta)$ کو ملاتا ہے، اس خط کا ناصف بھی ہے۔ [ساگر 1965]

12. اس مثلث کا رقبہ بتائیے جس کے ضلعوں کی مساواتیں

$$y=3x+4\ ,\ y=2x\ ,\ y=x$$

ہیں۔ اس مثلث کا عمودی مرکز (ortho-centre) بھی معلوم کیجیے۔ [رڑکی 1966]

13. ثابت کیجیے کہ چار خطوط

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=2\ ,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2\ ,\ \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

ایک معین کے ضلعے ہیں۔ [علی گڑھ پی-یو-سی 1959]

[اشارہ: دکھائیے کہ متوازی خطوط کے بیچ کی دوری برابر ہے۔]

14. ایک متوازی الاضلاع کے ضلعے خطوطِ مستقیم $y=mx+a$, $y=mx+b$, $y=nx+c$, اور $y=nx+d$ کے ساتھ ساتھ ہیں۔ دکھائیے کہ متوازی الاضلاع کا رقبہ $(a-b)(c-d)/(m-n)$ ہے۔ [کشمیر 1960]

15. ایک مربع کا وتر (diagonal) خطِ مستقیم $8x-15y=0$ پر ہے اور مربع کا ایک راس $(1, 2)$ ہے۔ اس راس پر ملنے والے ضلعوں کی مساوات معلوم کیجیے۔
[الٰہ آباد 1942]

16. ایک مساوی اضلاع مثلث کا قاعدہ خطِ مستقیم $x+y=2$ ہے اور راس $(2, -1)$۔ باقی دو ضلعوں کی مساوات بتائیے۔

17. حسب ذیل متوازی خطوط کے بیچ کی دوری بتائیے :

(i) $3x+4y=12$ اور $3x+4y=3$ [بنارس 1929]

(ii) $y=2x+4$ اور $6x=3y+5$

(iii) $y=mx+c$ اور $y=mx+d$ [علی گڑھ پی۔یو۔سی 59]

18. اس خطِ مستقیم کی مساوات بتائیے جو نقطہ $(3, 5)$ کو خطوط $4x+y-1=0$ اور $7x-3y-35=0$ کے نقطۂ تقاطع سے ملاتا ہے۔ دکھائیے کہ یہ خط، مبدا اور نقطہ $(8, 34)$ سے برابر دوری پر ہے۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1961]

19. خطوطِ مستقیم $5x+12y-1=0$ اور $15x+8y-7=0$ کے درمیانی زاویہ کے ناصف x-محور سے P اور Q میں ملتے ہیں۔ دکھائیے کہ دوری $PQ=2\frac{2}{11}$۔
[رڑکی 1959]

20. ان دو خطوطِ مستقیم کی مساوات بتائیے جو نقطہ $(4, 5)$ سے گزریں اور خطوطِ مستقیم $3x=4y+7$ اور $5y=12x+6$ سے برابر زاویہ بنائیں۔ [جبل پور 1962]

21. خطوطِ مستقیم $12x+10y-3=0, 15x-18y+1=0$ اور $6x+66y-11=0$ کے بارے میں مندرجہ ذیل حقائق ثابت کیجیے :

(i) تینوں خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ [علی گڑھ 1957]

(ii) تیسرا خط پہلے دو کے درمیانی زاویہ کا ناصف ہے۔

(iii) پہلے دو خطوط ایک دوسرے پر عمود ہیں۔ [الہٰ آباد 1959]

22. ایک مثلث کے ضلعوں کی مساواتیں

$$4x+3y+7=0,\ 5x+12y+20=0 \text{ اور } 3x+4y+8=0$$

ہیں، اس کے زاویوں کے ناصفوں کی مساواتیں نکالیے اور دکھائیے کہ وہ ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔ [الہٰ آباد 1946]

23. دکھائیے کہ نقطہ $(3, -5)$، متوازی خطوط $2x+3y=7$ اور $2x+3y+12=0$ کے درمیان ہے اور ان خطوطِ مستقیم کی مساوات نکالیے جو $(3, -5)$ سے گزرتے ہیں اور اوپر کے خطوط سے $45°$ کا زاویہ بناتے ہیں۔ [رڑکی 1958]

باب 5

متفرق مسئلے

5.1. دو خطوط کے نقطۂ تقاطع سے گزرنے والے خطوط :

مان لیا دو متقاطع خطوطِ مستقیم کی مساواتیں

$$a_1x+b_1y+c_1=0, \quad \ldots \quad (1)$$

اور

$$a_2x+b_2y+c_2=0. \quad \ldots \quad (2)$$

ہیں تو ان خطوط کے نقطۂ تقاطع سے گزرنے والے خطوطِ مستقیم کی عام مساوات نکالنی ہے۔

مان لیا نقطۂ تقاطع (x_1, y_1) ہے، تو

$$a_2x_1+b_2y_1+c_2=0. \text{ اور } a_1x_1+b_1y_1+c_1=0 \quad \ldots \quad (3)$$

اب مساوات

$$(a_1x+b_1y+c_1)+\lambda(a_2x+b_2y+c_2)=0, \quad \ldots \quad (4)$$

پر غور کیجیے، جہاں λ ایک اختیاری مستقل ہے۔

مساوات (4)، خطی ہونے کی وجہ سے خطِ مستقیم ظاہر کرتی ہے۔ ساتھ ہی رشتوں (3) کی وجہ سے، مساوات (4) محددات (x_1, y_1) سے مطمئن ہوتی ہے۔ چاہے λ کی قیمت کچھ بھی ہو۔

لہٰذا λ، کی قیمت چاہے کچھ بھی ہو، مساوات (4) خطوط (1) اور (2) کے نقطۂ تقاطع سے گزرنے والا کوئی خطِ مستقیم ظاہر کرتی ہے۔

سہولت کے لیے مساوات (1) اور (2) کو $P=0$ اور $Q=0$ رکھنے سے ہمیں یہ ملتا ہے کہ خطوطِ مستقیم $P=0$ اور $Q=0$ کے ساتھ ہم نقطہ کسی خط کی

مساوات

$$P+\lambda Q=0,$$

ہے، جہاں λ کوئی اختیاری مستقل ہے۔

مثال : نقطہ $(2, -6)$ اور خطوطِ مستقیم $5x-2y+14=0$ اور $2y=8-7x$ کے نقطۂ تقاطع سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے۔

دیے ہوئے خطوط کے ہم نقطہ کسی خط کی مساوات

$$(5x-2y+14)+\lambda(2y-8+7x)=0. \qquad (1)$$

ہے۔ اب λ کو ایسا چننا ہے کہ مساوات محددات $(2, -6)$ سے مطمئن ہو جائے۔ اس لیے

$$\{5\times2-2(-6)+14\}+\lambda(2(-6)-8+7\times2)=0$$

یعنی

$$36-6\lambda=0 \quad \text{یا} \quad \lambda=6.$$

لہٰذا مطلوبہ مساوات

$$(5x-2y+14)+6(7x+2y-8)=0$$

یعنی $47x+10y=34$ ہے۔

5.2 . ہم نقطہ خطوط :

حسبِ ذیل مسئلہ پہلے مسئلہ کے برعکس ہے اور بظاہر صحیح ہے :

اگر خطوطِ مستقیم کے کسی نظام کی مساوات کا اظہار

$$(a_1x+b_1y+c_1)+\lambda(a_2x+b_2y+c_2)=0. \qquad (1)$$

کی شکل میں کیا جا سکے، جہاں λ کوئی اختیاری مستقل ہے، تو نظام کے سبھی خطوط ایک مقررہ نقطہ سے گزریں گے، یعنی خطوط $a_1x+b_1y+c_1=0$ اور $a_2x+b_2y+c_2=0$ کے نقطۂ تقاطع سے۔

مثال کے طور پر مساوات

$$(3-2\lambda)x+(\lambda-4)y=10. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

پر غور کیجیے۔ یہ حسب ذیل شکل میں لکھی جا سکتی ہے :

$$(3x-4y-10)+\lambda(y-2x)=0.$$

لہٰذا λ کی مختلف قیمتوں کے لیے (2) سے حاصل ہونے والے خطوط

$$y-2x=0 \quad \text{اور} \quad 3x-4y=10$$

کے نقطہ تقاطع سے گزرتے ہیں یعنی نقطہ $(-2, -4)$ سے۔

مثال : ایک خط مستقیم محاور سے ایسے داخلی قطع کاٹتا ہے جن کے مقلوبوں کا جوڑ مستقل ہے۔ دکھائیے کہ خط ہمیشہ ایک مقررہ نقطہ سے گزرتا ہے اور اس نقطہ کے محددات نکالیے۔ [کشمیر 1964]

مان لیا مستقل جوڑ k ہے اور خط مستقیم

$$lx+my=1, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ہے (یہ درحقیقت خط مستقیم کی عام مساوات ہے ، § 3·8 دیکھیے) ۔

یہ خط محاور سے داخلی قطع $\frac{1}{l}$ اور $\frac{1}{m}$ کاٹتا ہے۔ ان داخلی قطعوں کے مقلوب l اور m ہیں۔ اس لیے

$$l=k-m. \quad \text{یعنی} \quad l+m=k$$

اس کی مدد سے (1) سے l کو خارج کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ دی ہوئی شرط کو مطمئن کرنے والے کسی بھی خط کی مر ' ات

$$(k-m)x+my=1, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ہے، جہاں m کوئی بھی قیمت ر' سکتا ہے۔

m کے ضریبوں کو ایک جگہ نے سے ہمیں

$$(kx-1)- \quad x-y)=0,$$

ملتا ہے۔ جس سے پتہ چلتا ہے کہ m کی مختلف قیمتوں کے لیے (2) سے ظاہر ہونے والے خطوط ، خطوط

$$x-y=0, \quad \text{اور} \quad kx-1=0$$

کے نقطہ تقاطع سے گزرتے ہیں یعنی مقررہ نقطہ $(1/k, 1/k)$ سے۔

5.3 . متماثلہ اور مساوات :

رشتہ $2x+1=7$ ایک مساوات ہے۔ ہم اسے حل کر سکتے ہیں، جس سے ہمیں اس کا رشتہ 3 ملتا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ رشتہ $2x+1=7$ تبھی صحیح ہے جب $x=3$ ورنہ نہیں۔ لیکن رشتہ

$$2x+1=2(x+1)-1$$

ایک متماثلہ ہے۔ یہ x کی ہر ایک قیمت کے لیے صحیح ہے۔ درحقیقت دائیں جانب آسان کرنے پر $(2x+1)$ حاصل ہو سکتا ہے جو بالکل بائیں جانب کے برابر ہے۔ پھر رشتہ

$$2x+3y-1=0$$

ایک مساوات ہے۔ ظاہر ہے کہ x اور y کی قیمتوں کے ہر ایک جوڑے سے یہ مطمئن نہیں ہوتا۔ جب x کی قیمت دی ہوئی ہو تب ایسے رشتہ سے y کی خاص قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔

لیکن رشتہ

$$2(x+2y-1)-(4y+2x)+2=0 \qquad . \; . \; . \quad (1)$$

ایک متماثلہ ہے۔ یہ x اور y کی قیمتوں کے ہر ایک جوڑے کے لیے صحیح ہے۔ درحقیقت بائیں جانب آسان کرنے پر $0x+0y+0$ رہ جاتی ہے اور اس لیے بائیں جانب ہمیشہ دائیں جانب کے برابر ہوگی چاہے x اور y کی قیمتیں کچھ بھی ہوں۔

یہ ظاہر کرنے کے لیے کہ کوئی دیا ہوا رشتہ متماثلہ ہے نہ کہ مساوات، ہم علامت $=$ کی جگہ $\equiv$ کا استعمال کرتے ہیں۔ اس طرح اگر ہم یہ ظاہر کرنا چاہیں کہ (1) متماثلہ ہے، ہم اسے حسب ذیل طریقے سے لکھیں گے :

$$2(x+2y-1)-(4y+2x)+2\equiv 0.$$

علامت $\equiv$ کو 'مماثلاً برابر ہے' پڑھنا چاہیے۔

5·4. ہم نقطہ ہونا :

اب ہم حسب ذیل مسئلہ کو حل کرنے کے لیے دفعہ 5·1 کا استعمال کریں گے :

اگر تین مستقل λ، μ، ν ایسے ہوں کہ

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2)+\nu(a_3x+b_3y+c_3)\equiv 0, \quad (1)$$

تو خطوطِ مستقیم $a_1x+b_1y+c_1=0$ ، $a_2x+b_2y+c_2=0$ اور

$$a_3x+b_3y+c_3=0 \quad \ldots \quad (2)$$

ہم خط ہیں۔

ترتیب کو بدل کر λ سے تقسیم کرنے پر (1) کی شکل یہ ہو جاتی ہے :

$$(a_1x+b_1y+c_1)+(\mu/\lambda)(a_2x+b_2y+c_2)\equiv(-\nu/\lambda)(a_3x+b_3y+c_3).$$

اس لیے مساوات

$$a_3x+b_3y+c_3=0 \quad \ldots \quad (3)$$

اور

$$(a_1x+b_1y+c_1)+(\mu/\lambda)(a_2x+b_2y+c_2)=0 \quad \ldots \quad (4)$$

ایک ہی خطِ مستقیم ظاہر کرتی ہیں۔

لیکن مساوات (4) خطوط

$$a_2x+b_2y+c_2=0. \text{ اور } a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \ldots \quad (5)$$

کے نقطہ تقاطع سے گزرنے والے کسی خط کو ظاہر کرتی ہے۔ اس لیے مساوات (3) خطوط (5) کے نقطہ تقاطع سے گزرنے والے کسی خط کو ظاہر کرتی ہے۔

یعنی (2) سے ظاہر ہونے والے تینوں خطوط ہم نقطہ ہیں۔

نوٹ : یہ طریقہ خاص طور پر تب کارآمد ہے جب اعداد λ، μ، ν سوال کو

دیکھتے ہی معلوم ہوجائیں، جیسا کہ حسب ذیل مثال میں۔

مثال: تحلیلی طور پر ثابت کیجیے کہ مثلث کے راسوں سے سامنے کے ضلعوں پر کھینچے گئے عمود ہم نقطہ ہوتے ہیں۔ [راجستھان 1963]

مان لیا (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) اور (x_3, y_3) بالترتیب مثلث ABC کے تین راس A, B, C ہیں اور ان سے سامنے کے ضلعوں پر کھینچے گئے عمود AD ، BE اور CF ہیں۔

تو BC کا m $(y_3-y_2)/(x_3-x_2)$ ہے۔

اس لیے AD کا m $-(x_3-x_2)/(y_3-y_2)$ ہے۔

اس لیے AD کی مساوات حسب ذیل ہے:

$$(y-y_1)=-\frac{x_3-x_2}{y_3-y_2}(x-x_1),$$

یعنی

$$(y-y_1)(y_3-y_2)+(x_3-x_2)(x-x_1)=0,$$

یا

$$x(x_3-x_2)+y(y_3-y_2)-y_1(y_3-y_2)-x_1(x_3-x_2)=0 \quad \dots (1)$$

اسی طرح CF اور BE کی مساواتیں بالترتیب یہ ہیں:

$$x(x_2-x_1)+y(y_2-y_1)-y_3(y_2-y_1)-x_3(x_2-x_1)=0 \quad \dots (2)$$

اور

$$x(x_1-x_3)+y(y_1-y_3)-y_2(y_1-y_3)-x_2(x_1-x_3)=0 \quad \dots (3)$$

مساوات (1) ، (2) اور (3) کی بائیں جوانب کا جوڑ مماثلی طور پر صفر ہے، کیوں کہ جوڑ میں سبھی رکن آپس میں کٹ جاتے ہیں۔

لہٰذا عمود AD ، BE اور CF ہم خط ہیں۔

مشق 15

اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو خطوط $3x-8y-1=0$ اور

$2x-y-3=0$ کے نقطہ تقاطع سے گزرے اور :

1. خط $3x-5y=2$ کے متوازی ہو۔
2. خط $x+2y=0$ پر عمود ہو۔
3. نقطہ $(8,-1)$ سے گزرے۔
4. خطوط $2x+y=1$ اور $4x-y=3$ سے ہم نقطہ ہو۔

5. اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو نقطہ $(1,1)$ کو خطوط $2x-3y-11=0$ اور $x-3y-22=0$ کے نقطہ تقاطع سے ملائے۔ [راجپوتانہ 1948]

6. اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو مبدا کو حسب ذیل خطوط کے نقطہ تقاطع سے ملائے :

(i) $\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y=1$ اور $\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y=1$ [الہ آباد 1948]

(ii) $4x+3y-8=0$ اور $x+y=1$ [علی گڑھ 1960]

7. a کی کیا قیمت ہونی چاہیے جس سے کہ تین خطوط $3x+y-2=0$ ، $ax+2y-3=0$ اور $2x-y-3=0$ ایک نقطہ پر ملیں۔ [الہ آباد 1950]

8. اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو نقطہ $(4,1)$ کو نقطہ $(3,2)$ سے خط $2x-3y=1$ پر کھینچے گئے پائے عمود سے ملائے۔

9. اس خط مستقیم کی مساوات نکالیے جو خطوط $3x-4y+1=0$ اور $5x+y-1=0$ کے نقطہ تقاطع سے گزرے اور محاور سے برابر لمبائی کے داخلی قطع کاٹے۔ [اجمیر 1951]

10. ایک متغیر خط $ax+by+c=0$ کی مساوات میں آنے والے ضریبے شرط $a+b+c=0$ کو مطمئن کرتے ہیں۔ ثابت کیجیے کہ خط ہمیشہ ایک مقررہ نقطہ سے گزرتا ہے۔ [دہلی پری انجنیئرنگ 1961]

11. اگر $l+m+n=0$ تو دکھائیے کہ خطوط $lx+my+n=0$ ، $mx+ny+l=0$ اور $nx+ly+m=0$ ہم نقطہ ہیں۔ [الہ آباد 1966]

12. اگر تینوں خطوطِ مستقیم

$$p_1x+q_1y=1,\quad p_2x+q_2y=1 \quad \text{اور} \quad p_3x+q_3y=1$$

ایک نقطہ سے گزریں تو دکھائیے کہ وہ تین نقطے، جن کے محدّدات (p_1, q_1)،
(p_2, q_2) اور (p_3, q_3) ہیں، ہم خط ہوں گے۔ [راجپوتانہ 1956]

13. دکھائیے کہ اس خطِ مستقیم کی مساوات جو نقطہ (x_1, y_1) کو خطوط

$$ax+by+c=0 \quad \text{اور} \quad dx+ey+f=0$$

کے نقطہ تقاطع سے ملاتی ہے یہ ہے:

$$\frac{ax+by+c}{ax_1+by_1+c}=\frac{dx+ey+f}{dx_1+ey_1+f}.$$

14. ثابت کیجیے کہ مثلث کے داخلی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔ [راجپوتانہ 1953]

15. تحلیلی طور پر ثابت کیجیے کہ ہر ایک مثلث میں

(i) ضلعوں کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

(ii) دو زاویوں کے خارجی ناصف اور تیسرے زاویہ کا داخلی ناصف، ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

16. تحلیلی طور پر ثابت کیجیے کہ ہر ایک مثلث کے وسطی خطوط (medians) ہم نقطہ ہوتے ہیں۔ [الٰہ آباد 1965]

5.5. نقاطِ تقاطع کا طریق:

جب دو مساوات میں ایک ہی اختیاری مستقل ہو تو ان سے ظاہر ہونے والے منحنی خطوط کے نقطہ تقاطع کا طریق ان مساواتوں سے اختیاری مستقل کو خارج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

وجہ حسبِ ذیل مثال سے واضح ہو جائے گی:

نوٹ: منحنی خطوط (یا خطوطِ مستقیم) کے نظام کی مساوات میں جو اختیاری مستقل

ہوتا ہے وہ نظام کا پیرامیٹر کہلاتا ہے اور اکثر λ کے ذریعے ظاہر کیا جاتا ہے (دیکھیے دفعہ 4.4)۔

مثال 1: خطوط

$$x+y=4+\lambda, \quad . \; . \; . \; (1)$$

اور

$$x-y=2\lambda-3. \quad . \; . \; . \; (2)$$

کے نقطہ تقاطع کا طریق نکالیے جہاں λ متغیر ہے۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1961]

[ایسے سوالوں میں یہ سمجھا جاتا ہے کہ پہلی مساوات میں λ سبھی ممکن قیمتیں حاصل کر سکتا ہے اور جب پہلی مساوات میں λ کوئی خاص قیمت حاصل کرتا ہے تو λ وہی قیمت دوسری مساوات میں بھی لیتا ہے۔ اس طرح λ کی اس قیمت کے لیے ان دو خطوط کا ایک مقرر نقطہ تقاطع ہوگا۔ جب λ کوئی دوسری قیمت حاصل کرتا ہے تب دونوں خطوط مختلف ہو جاتے ہیں اور ہمیں کوئی دوسرا نقطہ تقاطع ملتا ہے۔

اب ہم (1) اور (2) کے نقطہ تقاطع کا طریق چاہتے ہیں یعنی ہم وہ منحنی چاہتے ہیں جس پر وہ سب نقطہ تقاطع ہوں جو λ کو مختلف قیمتیں دے کر حاصل ہوتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ طریق کی مساوات میں λ نہیں ہونا چاہیے، ورنہ جب جب λ مختلف قیمتیں حاصل کرے گا، تب تب طریق بدلتا جائے گا، جو غیر موزوں ہے۔ لہٰذا طریق نکالنے کا مطلب ہے کہ مساوات حاصل کرنا، جسے (1) اور (2) کے نقطہ تقاطع کے محدّدات مطمئن کرتے ہیں اور جس میں λ نہیں رہتا۔

مطلوبہ طریق اس طرح نکالا جا سکتا ہے:

مان لیا خطوط (1) اور (2) کا نقطہ تقاطع (x_1, y_1) ہے۔ تو کیوں کہ (x_1, y_1) خطوط (1) اور (2) دونوں پر ہے، اس لیے

$$x_1+y_1=4+\lambda, \quad . \; . \; . \; (3)$$

اور

$$x_1-y_1=2\lambda-3. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

اب ہمیں ایسی مساوات نکالنی ہے جس میں λ نہ ہو اور جو x_1 اور y_1 سے مطمئن ہو۔ اس مقصد سے ہم دونوں مساوات سے λ کو خارج (چاہے کسی بھی طریقے سے) کر سکتے ہیں۔ اس کے لیے مساوات (3) کو 2 سے ضرب کیا اور مساوات (4) کو اس میں سے گھٹایا۔ اس طرح ہمیں $x_1+3y_1=11$ ملتا ہے۔

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ λ کی ہر ایک قیمت کے لیے نقطہ تقاطع (x_1, y_1) خطِ مستقیم $x+3y=11$ پر رہتا ہے، اس لیے یہی خط مطلوبہ طریق ہے۔

اوپر کا خلاصہ عام طور پر مختصراً اس طرح لکھ دیا جاتا ہے۔ نقطہ تقاطع مساوات (1) اور (2) کو مطمئن کرتا ہے۔ ان میں سے λ کو خارج کرنے پر ہمیں $x+3y=11$ ملتا ہے۔

اس لیے یہی مطلوبہ طریق ہے۔

مثال 2 : مبدا سے گزرنے والے خطوطِ مستقیم پر نقطہ (h, k) سے عمود کھینچے جاتے ہیں۔ پائے عمودوں کا طریق نکالیے۔
[علی گڑھ 1958]

مبدا سے گزرنے والا کوئی بھی خطِ مستقیم یہ ہے :

$$y=\lambda x. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

اس لیے (h, k) سے (1) پر کھینچے گئے عمود کی مساوات

$$y-k=(-1/\lambda)(x-h),$$

یعنی

$$\lambda(y-k)=-(x-h). \quad . \quad . \quad (2)$$

ہے۔

اس عمود کا پایہ (1) اور (2) کا نقطہ تقاطع ہے، اس لیے اس کا طریق ان مساوات سے λ کو خارج کرنے سے حاصل ہو جاتا ہے۔

(1) اور (2) کے یکساں جوانب کی ضرب کرنے سے λ خارج ہو جاتا ہے اور ہمیں یہ ملتا ہے :

$$x(x-h)+y(y-k)=0 \quad \text{یعنی} \quad y(y-k)=-x(x-h)$$

یہی مطلوبہ طریق ہے۔

مشق 16

1. ایک متغیر نقطہ کے محددات حسب ذیل مساوات سے ملتے ہیں :

$$x-y=a\cos\theta, \quad \text{اور} \quad x+4y=2a\sin\theta$$

نقطہ کے طریق کی مساوات معلوم کیجیے۔

2. x-محور پر دو نقطے A اور B لیے جاتے ہیں جن میں سے ہر ایک کی مبدا O سے دوری a ہے۔ A اور B سے کھینچے گئے خطوطِ مستقیم کے نقطہ تقاطع، P کا طریق حسب ذیل حالات میں نکالیے :

(i) AP کا شرحِ ڈھال $= k \times$ BP کا شرحِ ڈھال

(ii) $\angle PAB \sim \angle PBA = \alpha$;

(iii) مثلث ABP میں $\cot A+\cot B=\lambda$, جہاں λ ایک مستقل ہے۔

[رڑکی 1956]

3. مقررہ نقطہ (h, k) سے گزرنے والے خطوطِ مستقیم پر مبدا سے کھینچے گئے پائے عمودوں کا طریق نکالیے۔

4. مبدا سے ان خطوطِ مستقیم پر عمود کھینچے جاتے ہیں جو محاور پر ایسے داخلی قطع کاٹتے ہیں جن کا جوڑ مستقل ہے۔ پائے عمودوں کا طریق نکالیے۔

5. محاور کے درمیان کٹے ہوئے متغیر خط $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ کے داخلی قطع کے وسطی نقطہ کا طریق نکالیے جہاں p مستقل ہے۔ [جبل پور 1962]

[اشارہ : خط محاور سے نقطوں $(p\sec\alpha, 0)$ اور $(0, p\operatorname{cosec}\alpha)$ پر ملتا ہے۔ اس لیے وسطی نقطہ کے محددات $2x=p\sec\alpha$ اور $2y=p\operatorname{cosec}\alpha$ سے ملتے ہیں۔ اب ان میں α کو خارج کیجیے۔]

6. ایک خطِ مستقیم اس طرح چلتا ہے کہ محاور پر اس کے داخلی قطعوں کا جوڑ ہمیشہ c رہتا

ہے۔ محاور کے درمیان اس خط کے داخلی قطع کے وسطی نقطہ کا طریق نکالیے۔
[کشمیر 1964]

7. لمبائی l کی ایک چھڑی ایک کمرے میں فرش اور دیوار کے سہارے کھڑی ہے۔ اگر چھڑی فرش پر پھسلنے لگے، تو اس کے وسطی نقطہ کا طریق نکالیے۔ [رڑکی 1945]

5·6. معیّن :

ہمیں اکثر $ad-bc$ جیسی عبارتیں ملتی ہیں۔ اس لیے ان کے لکھنے کے لیے ایک خاص طریقہ استعمال کیا جاتا ہے۔ علامت

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

کا مطلب ہے $ad-bc$، اور اسے ایک معیّن کہتے ہیں۔

اس رسم کا استعمال کر کے مساوات

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

اور

$$a_2x+b_2y+c_2=0$$

کے حل کو یعنی

$$x=\frac{b_1c_2-c_1b_2}{a_1b_2-b_1a_2} \quad \text{اور} \quad y=\frac{a_1c_2-c_1a_2}{a_1b_2-b_1a_2} \qquad (1)$$

کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں :

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}=\frac{-y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ذرا سا غور کرنے پر طالب علم کو (2) میں کسروں کے نسب نما لکھنے کا اصول معلوم

ہو جائے گا اور تب وہ (2) کو (1) کے مقابلہ زیادہ آسانی سے یاد رکھ سکے گا۔

پھر مُعیّن

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

کا مطلب ہے

$$a_1 \times \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 \end{vmatrix} - b_1 \times \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \times \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix},$$

یعنی

$$a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)$$

خیال رہے کہ یہاں ارکان باری باری سے مثبت اور منفی ہیں، پہلی قطار کے الفاظ a_1, b_1, c_1 ایک ایک رکن کے جزو ضربی ہیں اور ہر ایک رکن میں دوسرا جزو ضربی ایک چھوٹا مُعیّن ہے، جو بڑے مُعیّن سے اس قطار اور اس کالم کو چھوڑ دینے سے حاصل ہوتا ہے جس میں وہ لفظ ہے۔

اس رسم میں اس مثلث کا رقبہ، جس کے راس (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) اور (x_3, y_3) ہیں،

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

کے ذریعے ظاہر کیا جا سکتا ہے، جس کی تصدیق طالب علم آسانی سے کر سکتا ہے۔

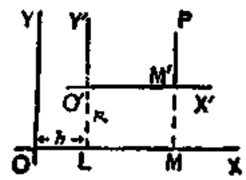
5.7 . محاور کی تبدیلی :

کبھی کبھی کوئی سوال محاور کی تبدیلی سے زیادہ آسانی سے حل کیا جا سکتا ہے۔ محاور کی تبدیلی میں یا تو (1) صرف مبدا بدلا جا سکتا ہے (نئے محاور پرانے محاور کے متوازی رہیں) یا (2) مبدا کو ایک ہی مقام پر رکھ کر محاور گھمائے جا سکتے ہیں یا

(3) مبدا اور محاور کی سمت دونوں بدلے جاسکتے ہیں۔

5.8 تبدیلی فارمولے :

مان لیا OX اور OY دیے ہوئے محاور ہیں، O' نیا مبدا ہے اور OX, OY کے لحاظ سے اس کے محدّدات (h, k) ہیں۔



شکل 27

مان لیا $O'X'$ اور $O'Y'$ بالترتیب OX اور OY کے متوازی اور ان کی ہی سمت میں کھینچے جاتے ہیں۔ مان لیا $O'X', O'Y'$ کے لحاظ سے اس نقطہ P کے محدّدات (x', y') ہیں جس کے محدّدات پہلے محاور کے لحاظ سے (x, y) ہیں۔

ہمیں x، y میں دی ہوئی کسی مساوات کی تبدیلی x'، y' کی مساوات میں کرنی ہے۔

O' اور P سے OX پر عمود $O'L$ اور PM کھینچیے اور مان لیا PM، $O'X'$ سے M' پر ملتا ہے۔ تو

$OL = h$, $LO' = k$, $OM = x$, $MP = y$, $O'M' = x'$ اور $M'P = y'$

اس لیے

$$OM = OL + LM = OL + O'M'$$

یعنی

$$x = x' + h.$$

اسی طرح

$$MP = MM' + M'P = LO' + M'P,$$

یعنی

$$y = y' + k.$$

لہٰذا x اور y میں دی ہوئی مساوات کو x' اور y' کی مساوات میں بدلنے کے لیے x اور y کی جگہ بالترتیب

$$x'+h \quad \text{اور} \quad y'+k.$$

رکھنا چاہیے۔

مثال: نقطہ $(3, 1)$ کے ذریعے پُرانے محاور کے متوازی نئے محاور لیے جاتے ہیں۔ جو نقطہ پہلے $(2, 4)$ تھا اب اس کے کیا محدّدات ہوں گے؟ ساتھ ہی نئے محاور کے لحاظ سے حسب ذیل مساوات کی نئی شکل معلوم کیجیے:

$$x^2-6x+2y^2+7=0.$$

یہاں $h=3$, $k=1$, $x=2$ اور $y=4$.

اس لیے اگر اس نقطہ کے، جو پہلے $(2, 4)$ تھا، نئے محدّدات (x_1, y_1) ہوں تو

$$x_1=x-h=2-3=-1; \quad \text{اور} \quad y_1=y-k=4-1=3.$$

پھر اگر نئے محدّدات x' اور y' ہوں تو منحنی کی نئی مساوات x کی جگہ $x'+3$ اور y کی جگہ $y'+1$ رکھنے سے حاصل ہوگی۔ اس لیے مطلوبہ مساوات حسب ذیل ہوگی:

$$(x'+3)^2-6(x'+3)+2(y'+1)^2+7=0,$$

یعنی

$$x'^2+2y'^2+4y'=0.$$

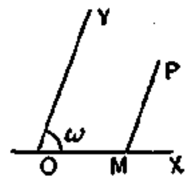
اب ہم سہولت کے لیے نئے محدّدات x' ، y' کی جگہ x ، y ہی لکھ سکتے ہیں۔ تب نئی مساوات حسب ذیل ہوگی:

$$x^2+2y^2+4y=0.$$

5.9 . مائل محاور:

یہ ضروری نہیں ہے کہ محاور ہمیشہ ایک دوسرے پر زاویہ قائمہ بنائیں۔ کبھی کبھی زاویہ حادہ یا زاویہ منفرجہ پر جھکے ہوئے محاور زیادہ مناسب ہوتے ہیں۔

مان لیا دو خطوطِ مستقیم OX اور OY ہیں جو ایک دوسرے پر زاویہ ω بناتے ہیں۔



شکل 28

مان لیا P کوئی نقطہ ہے۔ P سے OY کے متوازی PM کھینچیے جو OX سے M میں ملے۔

تو ہم OX کو x-محور اور OY کو y-محور کہتے ہیں۔ OM اور MP کو بالترتیب P کے طول اور عرض کہتے ہیں اور دونوں کو P کے محدّدات کہتے ہیں۔

علامتوں کی روایت وہی ہے جو محاور کے ایک دوسرے پر زاویہ قائمہ بنانے پر ہوتی ہے۔ اگر محاور ایک دوسرے پر زاویہ قائمہ بناتے ہیں تو ان کو مستطیل نما اور اگر ایک دوسرے پر زاویہ قائمہ نہیں بناتے تو مائل کہتے ہیں۔

فرانسیسی ریاضی داں ڈیکارت کے نام پر، جس نے اس نظام کو ترتیب دیا تھا، محدّدات کا وہ نظام جس میں ہم محاور استعمال کرتے ہیں محدّدات کا کارتیزی نظام یا صرف کارتیزی محدّدات کہلاتا ہے۔

مشق 17

1. مساوات $3x-2y-4=0$ کو $(1, 5)$ سے کھینچے گئے متوازی محاور کے لحاظ سے بدلیے۔

2. $(1, 2)$ سے کھینچے ہوئے متوازی محاور کے لحاظ سے منحنی $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ کی نئی مساوات معلوم کیجیے۔

3. اگر مبدا نقطہ (a, b) پر منتقل کردیا جائے اور محاور پہلے محاور کے متوازی ہی رہیں تو مساوات

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$$

کی کیا شکل ہوجائے گی؟

4. کس نقطہ پر مبدا کو منتقل کیا جائے کہ محاور کی سمت بدلے بغیر مساوات

$$x^2+y^2-4x+6y-7=0$$

ایک ایسی مساوات میں تبدیل ہوجائے جس میں x اور y کے پہلے درجہ کے ارکان نہ رہیں؟ بدلی ہوئی مساوات بھی نکالیے۔ [علی گڑھ '58]

مشق 18 (باب 5 پر)

1. خطوط $y-2x+2=0$ اور $y-3x+5=0$ کے نقطہ تقاطع سے گزرنے والے ان خطوطِ مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو مبدا سے $7/\sqrt{2}$ کی دوری پر ہوں۔
[الٰہ آباد 1942]

2. خطوطِ مستقیم $y-4x-1=0$ اور $2x+5y-6=0$ کے نقطہ تقاطع سے گزرنے والے اور $3y+4x=0$ پر عمود خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے۔
[الٰہ آباد 1952]

3. خطوط $3x+2y-5=0$ اور $4x+3y-7=0$ پر عمود اور مبدا سے گزرنے والے خطوطِ مستقیم کی مساوات لکھیے۔ ان نقطوں کے محددات بتائیے جن پر دیے ہوئے خطوط اپنے عمود سے ملتے ہیں اور دکھائیے کہ ان نقطوں کو ملانے والے خطِ مستقیم کی مساوات $23x+11y-35=0$ ہے۔

4. خطوط $x-7y+13=0$ اور $7x+y-9=0$ کے نقطہ تقاطع سے گزرنے والے اور خط $3x+4y+2=0$ پر عمود خطِ مستقیم کی مساوات بتائیے۔ [پلانی، فار، '65]

5. اس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو نقطہ $(2, 9)$ سے اور خطوط $3x+4y-7=0$ اور $5x-12y+7=0$ کے نقطہ تقاطع سے گزرتا ہے۔
دکھائیے کہ یہ خط دیے ہوئے خطوط کے درمیان کے زاویہ منفرجہ کا ناصف ہے اور ان کے درمیان کے زاویہ حادہ کا ناصف نکالیے۔ [اجمیر 1956]

6. اگر $L_1 \equiv a_1x+b_1y+c_1$ اور $L_2 \equiv a_2x+b_2y+c_2$، تو $pL_1+qL_2=0$ ، جہاں p اور q مستقل ہیں، کیا ظاہر کرتا ہے؟ اس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو نقطہ $(3, 2)$ کو $2x+3y=1$ اور

$3x-4y-6=0$ کے نقطہ تقاطع سے ملاتا ہے۔ [علی گڑھ 1956]

7. ثابت کیجیے کہ مساوات

$$(3x-4y+7)+k(5x-2y-7)=0$$

کے ذریعے ظاہر ہونے والا خط k کی سب قیمتوں کے لیے ایک مقررہ نقطہ سے گزرتا ہے۔
[علی گڑھ 1941]

8. ثابت کیجیے کہ خطوط

$$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)=0,$$

$$(c-a)x+(a-b)y+(b-c)=0,$$

اور

$$(a-b)x+(b-c)y+(c-a)=0$$

ہم خط ہیں۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1961]

9. دکھائیے کہ مستقل λ کو چاہے کچھ بھی قیمت کیوں نہ دی جائے مساوات

$$(a_1x+b_1y+c_1)+\lambda(a_2x+b_2y+c_2)=0$$

ایک مقررہ نقطہ سے گزرنے والا خطِ مستقیم ظاہر کرتا ہے، اور λ کی ایسی قیمت معین کیجیے کہ یہ خطِ مستقیم $a_3x+b_3y+c_3=0$ پر عمود ہو۔ [اجمیر 1957]

10. اگر خطوطِ مستقیم $a_1x+b_1y+c_1=0$ اور $a_2x+b_2y+c_2=0$ ایک دوسرے کو P میں کاٹیں، تو ثابت کیجیے کہ

(i) P کو مبدا سے ملانے والا خطِ مستقیم یہ ہے

$$c_2(a_1x+b_1y)=c_1(a_2x+b_2y)$$

(ii) P سے گزرنے والا اور $y=mx$ کے متوازی خط یہ ہے:

$$(a_1x+b_1y+c_1)/(a_1+mb_1)=(a_2x+b_2y+c_2)/(a_2+mb_2);$$

(iii) خط $ax+by+c=0$ پر P سے کھینچا گیا عمودی خط یہ ہے:

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_1a+b_1b}=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_2a+b_2b}$$ [علی گڑھ پی۔یو۔سی 1966]

11. ایک خطِ مستقیم مقررہ نقطہ (a, b) سے گزرتا ہے۔ دکھائیے کہ محاور کے درمیان کٹے ہوئے داخلی قطع کے وسطی نقطہ کا طریق $a/x+b/y=2$ ہے۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1958]

12. اس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو x اور y محاور پر بالترتیب a اور b کے داخلی قطع کاٹتا ہے۔

اگر خط اس طرح حرکت کرے کہ $1/a^2+1/b^2=1/c^2$ ، جہاں c کوئی مستقل ہے تو ثابت کیجیے کہ مبدا سے خطِ مستقیم پر پائے عمود دائرہ $x^2+y^2=c^2$ بناتا ہے۔

13. ایک خاص لمبائی کا خطِ مستقیم AB عمودی خطوط OX اور OY کے درمیان اس طرح پھسلتا ہے کہ A ہمیشہ OX پر رہتا ہے اور B خط OY پر۔ اس نقطہ P کا طریق نکالیے جو AB کو دو ایسے حصّوں PA اور PB میں تقسیم کرتا ہے کہ $PA=a$ اور $PB=b$ [علی گڑھ 1940]

14. اگر مساوی الساقین قائمہ زاویہ مثلث AOB کے، O کے ذریعے برابر ضلعے AO ، BO نقطہ P اور Q تک بڑھائے جائیں جس سے کہ $2AP \cdot BQ=AB^2$ ، تو تحلیلی طور پر ثابت کیجیے PQ ہمیشہ ایک مقررہ نقطہ سے گزرتا ہے۔

15. دو نقطوں $(3, 2)$ اور $(1, 5)$ سے ایک متغیر خط کی دوریوں کا جوڑ نقطہ $(\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$ سے اس خط کی دوری کے برابر ہے۔ دکھائیے کہ خط ہمیشہ ایک مقررہ نقطہ سے گزرتا ہے اور اس نقطہ کے محدّدات بھی بتائیے۔

16. اس نقطہ کے محدّدات بتائیے جس پر مبدا منتقل کرنے سے مساوات

$$x^2+3xy+4y^2-4x-6y+5=0$$

کی نئی شکل میں x اور y کے پہلے درجے کے ارکان نہ رہیں اور نئی مساوات بھی معلوم کیجیے۔ [راجپوتانہ 1947]

باب 6
دوخطِ مستقیم ظاہر کرنے والی مساوات

6.1 . دو یا زیادہ خطوط ظاہر کرنے والی مساوات :

ایک ہی مساوات دو یا زیادہ خطوطِ مستقیم بھی ظاہر کرسکتی ہے۔ مثال کے طور پر مساوات

$$(ax+by+c)(dx+ey+f)=0. \quad \ldots \quad (1)$$

پر غور کیجیے۔

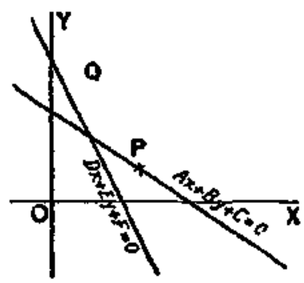
ہم جانتے ہیں کہ خطِ مستقیم $ax+by+c=0$ پر واقع کسی نقطہ P کے محدّدات کا بدل عبارت $ax+by+c$ میں کرنے سے نتیجہ صفر ملے گا۔ اس لیے جب P کے محدّدات کا بدل مساوات (1) کی بائیں جانب کیا جائے گا تو بائیں جانب صفر ہوجائے گی کیوں کہ اس کا ایک جزوِ ضربی صفر ہوجائے گا۔ اس طرح P کے محدّدات مساوات (1) کو مطمئن کرتے ہیں، یعنی نقطہ P مساوات (1) کے گراف پر واقع ہے۔

اس طرح خطِ مستقیم $ax+by+c=0$ پر واقع ہر ایک نقطہ مساوات (1) کے گراف پر واقع ہے، یعنی خطِ مستقیم $ax+by+c=0$ مساوات (1) کے گراف کا ایک حصہ ہے۔

اسی طرح خطِ مستقیم $dx+ey+f=0$ بھی مساوات (1) کے گراف کا حصہ ہے۔

لہٰذا (1) کا مکمل گراف حسبِ ذیل دو خطِ مستقیم سے بنا ہے :

$$ax+by+c=0$$



شکل 29.

اور

$$dx+ey+f=0.$$

اسی طرح زیادہ اجزاءِ ضربی لے کر ہم دو سے زیادہ خطوطِ مستقیم کو صرف ایک مساوات سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

مساوات (1) کو ضرب کرنے پر دیکھا جائے گا کہ دو خطوطِ مستقیم کو ظاہر کرنے والی مساوات دو درجی ہوتی ہے، یعنی اس کے ارکان میں زیادہ سے زیادہ درجہ دو ہوتا ہے۔ اسی طرح تین خطوطِ مستقیم کو ظاہر کرنے والی مساوات تین درجی ہوتی ہے، وغیرہ۔

ظاہر ہے کہ ایک سے زیادہ درجہ کی کوئی مساوات، مان لیا $s=0$ خطوطِ مستقیم تب ہی ظاہر کرے گی جب s خطی جزو ضربیوں میں تقسیم ہو سکے گا۔ مثال کے طور پر، مساوات $x^2-y^2-1=0$ خطوطِ مستقیم ظاہر نہیں کرتا، کیوں کہ عبارت x^2-y^2-1 خطی اجزاءِ ضربی میں تقسیم نہیں کیا جا سکتا۔

مشق 19

حسبِ ذیل خطوط کو ظاہر کرنے والی ایک مساوات معلوم کیجیے :

1. $x=2y+1$ ، $x=y$

2. $x=3$ ، $x+y=1$ ، $y=0$

3. مبدا سے گزرنے والے ان خطوطِ مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو خطوط $2x^2+3xy+y^2=0$ پر عمود ہیں۔ [الٰہ آباد 1948]

4. حسبِ ذیل مساوات سے ظاہر ہونے والے خطوطِ مستقیم علیحدہ علیحدہ بتائیے :

(i) $x^2-y^2=0;$ (ii) $xy=0;$

(iii) $x-2xy=0;$ (iv) $x^2-7x+6=0;$

(v) $x^2-5xy+4y^2=0$ (vi) $x^2-3xy-4x=0$

5 . اس مثلث کا رقبہ نکالیے جس کے ضلعے حسب ذیل ہیں :

$y^2-9xy+18x^2=0$ اور $y=9$ [رڑکی 1964]

6 . مساوات $(x-2)^2=y^2$ کیسے منحنی ظاہر کرتی ہے ؟

اگر یہ دو منحنی ظاہر کرے جو ایک نقطہ پر ملتے ہوں ، تو وہ نقطہ اور وہ زاویہ معلوم کیجیے جس پر وہ ملتے ہیں۔ [رڑکی 1957]

7 . اس مستطیل کا رقبہ نکالیے جس کے ضلعوں کی مساوات $x^2-5x+4=0$ اور $y^2-3y=0$ ہیں۔

8 . دکھائیے کہ محاور کے درمیانی زاویوں کے ناصف مساوات $x^2-y^2=0$ کے ذریعے ظاہر ہوتے ہیں۔

9 . ایک مستطیل کے روبرو ضلعوں کے دو جوڑوں کی مساوات یہ ہیں :

$x^2-7x+6=0$ اور $y^2-14y+40=0$

اس کے وتروں (diagonals) کی مساوات معلوم کیجیے۔ [الہ آباد 1931]

10. دکھائیے کہ خطوط مستقیم

$a_1x+b_1y+c_1=0$ اور $a_2x+b_2y+c_2=0$

کے درمیانی زاویوں کے ناصفوں کی مساوات یہ ہے :

$$(a_2^2+b_2^2)(a_1x+b_1y+c_1)^2=(a_1^2+b_1^2)(a_2x+b_2y+c_2)^2$$

6.2 . ہم درجہ مساوات :

ایسی مساوات جو

$$ay^n+by^{n-1}x+cy^{n-2}x^2+\dots+kx^n=0$$

کی طرح ہو اور جس کے ہر ایک رکن میں x اور y کی قوتوں کا جوڑ برابر ہو، (یہاں n) ہم درجہ مساوات کہلاتی ہے۔

اب ہم ثابت کریں گے کہ

n درجہ کی ہم درجہ مساوات مبدا سے گزرنے n خطوط مستقیم ظاہر کرتی ہے۔

حسب ذیل ہم درجہ مساوات پر غور کیجیے :

$$ay^n+by^{n-1}x+cy^{n-2}x^2+\ldots+kx^n=0$$

x^n سے تقسیم کرنے پر ہمیں حسب ذیل مساوات ملتی ہے :

$$a(y/x)^n+b(y/x)^{n-1}+c(y/x)^{n-2}+\ldots+k=0$$

یہ y/x میں n ویں درجہ کی مساوات ہے۔ مان لیا اس مساوات کے ریشے $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ہیں، تو مذکورۂ بالا مساوات کو حسب ذیل شکل میں لکھنا ضرور ممکن ہوگا :

$$a\left(\frac{y}{x}-m_1\right)\left(\frac{y}{x}-m_2\right)\left(\frac{y}{x}-m_3\right)\ldots\left(\frac{y}{x}-m_n\right)=0$$

یعنی

$$a(y-m_1x)(y-m_2x)(y-m_3x)\ldots(y-m_nx)=0$$

اس طرح وہ مساوات حسب ذیل n خطوط مستقیم ظاہر کرتی ہے :

$$y-m_1x=0,\ y-m_2x=0,\ \ldots,\ y-m_nx=0$$

یہ سبھی مبدا سے گزرتے ہیں۔

ضمنی نتیجہ : مبدا سے گزرنے والے دو خطوط مستقیم کی مساوات حسب ذیل طریقے سے لکھی جا سکتی ہے :

$$ax^2+2hxy+by^2=0$$

نوٹ 1 : اگر $m_1, m_2, \ldots$ میں سے کوئی ریشہ غیر حقیقی ہو تو متعلقہ خطوط مستقیم بھی غیر حقیقی ہوں گے (§ 7.8 دیکھیے)۔

اگر دو یا زیادہ ریشے برابر ہوں تو متعلقہ خطوط مستقیم منطبق ہوں گے۔

لہٰذا ہمیں n مختلف خطوط تبھی ملیں گے جب تمام ریشے حقیقی اور مختلف ہوں گے۔

6.3. خطوط $ax^2+2hxy+by^2=0$ کا درمیانی زاویہ :

مساوات $ax^2+2hxy+by^2=0$ کے ذریعے ظاہر ہونے والے خطوط مستقیم کا درمیانی زاویہ معلوم کرنا۔

مان لیا $ax^2+2hxy+by^2=0$ کے ذریعے ظاہر ہونے والے خطوط کی علیحدہ علیحدہ مساوات حسب ذیل ہیں :

$$y-m_1x=0 \quad \text{اور} \quad y-m_2x=0 \quad . \; . \; . \quad (1)$$

تو

$$ax^2+2hxy+by^2 \equiv b(y-m_1x)(y-m_2x)$$

ضرب کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$ax^2+2hxy+by^2 \equiv by^2-b(m_1+m_2)xy+bm_1m_2x^2$$

دونوں جانب x^2 اور xy کے ضربیوں کو برابر کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$b(m_1+m_2)=-2h \quad \text{اور} \quad bm_1m_2=a \quad . \; . \; . \quad (2)$$

لہٰذا، اگر خطوط (1) کا درمیانی زاویہ θ ہو، تو

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{\sqrt{\{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2\}}}{1+m_1m_2}$$

$$=\frac{\sqrt{\{(-2h/b)^2-4a/b\}}}{1+a/b}$$

$$=\frac{\sqrt{(4h^2-4ab)}}{b+a} \qquad [\text{(2) سے}]$$

یعنی خطوط $ax^2+2hxy+by^2=0$ کا درمیانی زاویہ حسب ذیل ہے :

$$\tan^{-1}\frac{2\sqrt{(h^2-ab)}}{a+b}$$

ضمنی نتیجہ 1 : اگر $a+b=0$، تو $\cot\theta=0$ اور اس لیے $\theta=90°$، یعنی خطوط

$ax^2+2hxy+by^2=0$ ایک دوسرے پر عمود ہیں۔ اس طرح
مساوات $ax^2+2hxy+by^2=0$ کے ذریعے ظاہر ہونے والے خطوط مستقیم کے
ایک دوسرے پر عمود ہونے کی شرط یہ ہے :

$$a+b=0$$

ضمنی نتیجہ 2 : اگر $h^2=ab$ ، تو $\tan\theta=0$ ، اس لیے $\theta=0$ ، یعنی
خطوط $ax^2+2hxy+by^2=0$ منطبق ہیں۔
یہ اس حقیقت سے بھی ظاہر ہے کہ اگر $h^2=ab$ ، تو
$ax^2+2hxy+by^2$ مکمل مربع ہے۔

6·4. دو درجی مساوات کا نظریہ :

ہم یہاں دو درجی مساوات پر تھوڑا غور کریں گے، کیوں کہ دو درجی مساوات کے نظریہ کا کہیں کہیں ہمیں استعمال کرنا پڑے گا۔

مان لیا مساوات

$$ax^2+2hxy+by^2=0 \quad . \; . \; . \; (1)$$

سے حاصل ہوئے دو خطوط کی علیحدہ علیحدہ مساوات

$$y-m_1x=0 \quad \text{اور} \quad y-m_2x=0$$

ہیں، تو § 6·3 کے رشتوں (1) سے ہمارے پاس آتا ہے

$$m_1+m_2=2h/b \quad \text{اور} \quad m_1m_2=a/b$$

ان رشتوں کی مدد سے ہم m_1 اور m_2 کی حقیقی قیمتوں کا استعمال کیے بغیر بہت سے مسئلے حل کر سکتے ہیں، جن میں جذر ہوں اور جن کا حل کرنا مشکل ہو۔

مثال : ان خطوط مستقیم کی مساوات بتائیے جو بالترتیب دو خطوط

$$ax^2+2hxy+by^2=0$$

پر عمود ہیں اور مبدا سے گزرتے ہیں۔ [علی گڑھ 1960]

مان لیا دو خطوط $ax^2+2hxy+by^2=0$ کی علیحدہ علیحدہ مساوات یہ ہیں :

$$y=m_1x \quad \text{اور} \quad y=m_2x \qquad \ldots \quad (1)$$

تو

$$m_1+m_2=-2h/b \quad \text{اور} \quad m_1m_2=a/b \qquad \ldots \quad (2)$$

اب خطوط (1) پر مبدا سے کھینچے گئے عمودوں کی مساوات حسب ذیل ہیں :

$$m_1y+x=0 \quad \text{اور} \quad m_2y+x=0$$

لہٰذا ان کی مشترکہ مساوات یہ ہے :

$$(m_1y+x)(m_2y+x)=0$$

یعنی

$$m_1m_2y+(m_1+m_2)xy+x^2=0.$$

اس میں (2) سے m_1m_2 اور m_1+m_2 کی قیمتیں رکھ کر b سے ضرب کرنے پر مطلوبہ مساوات حسب ذیل ملتی ہے :

$$ay^2+2hxy+bx^2=0$$

مشق 20

1. مندرجہ ذیل مساوات کے ذریعے ظاہر ہونے والے خطوط مستقیم کے جوڑوں کے درمیانی زاویے معلوم کیجیے :

(i) $x^2-2xy-2y^2=0$ (ii) $x^2-2qxy+y^2=0$

(iii) $x^2-qxy-y^2=0$ (iv) $x^2-2axy+(a^2-1)y^2=0$

2. مندرجہ ذیل مساوات کے ذریعے ظاہر ہونے والے خطوط مستقیم کی مساوات علیحدہ علیحدہ بتائیے :

(i) $x^2+2xy\sec\theta+y^2=0$ [راجپوتانہ 1943]

(ii) $x^2-2xy\tan\theta-y^2=0$

(iii) $x^2\cos 2\theta-4xy\cos\theta+2y^2+x^2=0$

(iv) $ab(x^2-y^2)+(a^2-b^2)xy=0$

ہر ایک مساوات کے لیے خطوط کا درمیانی زاویہ بھی بتائیے۔

3. مساوات $x^2+2xy\cot\theta+y^2=0$ کے ذریعے ظاہر ہونے والے خطوط مستقیم کا درمیانی زاویہ بتائیے۔ [الٰہ آباد 1949]

4. مبدا سے گزرنے والے اور خطوط $2x^2-xy-5y^2=0$ پر عمود خطوط مستقیم کی مساوات بتائیے۔

5. اگر مساوات $px^2-qxy-y^2=0$ کے ذریعے ظاہر ہونے والے خطوط x-محور سے زاویے α اور β بناتے ہوں تو مندرجہ ذیل عبارتوں کی قیمتیں بتائیے:

(i) $\tan^2\alpha+\tan^2\beta$ [کشمیر 65] (ii) $\cot\alpha+\cot\beta$

(iii) $\tan(\alpha+\beta)$ (iv) $\tan\alpha\div\tan\beta$

6. ثابت کیجیے کہ خطوط $(x^2+y^2)\sin^2\alpha=(x\cos\theta-y\sin\theta)^2$ کا درمیانی زاویہ 2α ہے۔

7. دکھائیے کہ جو خطوط $x^2(\tan^2\theta-\cos^2\theta)-2xy\tan\theta+y^2\sin^2\theta=0$ کے ذریعے ظاہر ہوتے ہیں، x-محور سے ایسے زاویے بناتے ہیں جن کی tangentsکا فرق 2 ہے۔ [الٰہ آباد 1951]

8. ثابت کیجیے کہ خطوط $ax^2+2hxy+by^2=0$ میں سے ایک خط محاور کے درمیانی زاویہ کا ناصف تب ہوگا جب

$(a+b)^2=4h^2$ [الٰہ آباد 1960]

9. وہ شرط بتائیے جس سے کہ خطوط $ax^2+2hxy+by^2=0$ میں سے ایک خط کا ڈھال دوسرے کے ڈھال کا λ گنا ہو۔

[راجپوتانہ 1956]

6.5 . ناصف :

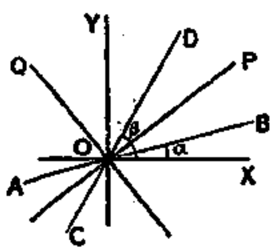
مساوات $ax^2+2hxy+by^2=0$ کے ذریعے ظاہر ہونے والے خطوط مستقیم کے درمیانی زاویوں کے ناصفوں کی مساوات نکالنا۔

مان لیا دی ہوئی مساوات خطوط مستقیم AOB اور COD ظاہر کرتی ہے، جو، مان لیا، x-محور پر زاویہ α اور β پر جھکے ہیں۔ تو

$$ax^2+2hxy+by^2\equiv b(y-x\tan\alpha)(y-x\tan\beta)$$

اس میں xy اور x^2 کے ضربیوں کو برابر کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\tan\alpha+\tan\beta=-2h/b \quad \text{اور} \quad \tan\alpha\tan\beta=a/b \qquad \dots \text{(1)}$$



شکل 30

مان لیا دیے ہوئے خطوط کے درمیانی زاویہ BOD کا داخلی ناصف OP ہے۔ تو OP x-محور سے ایک زاویہ θ ایسا بنائے گا کہ

$$\theta=\alpha+\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)$$

یعنی

$$\theta=\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

پھر، خارجی ناصف OQ x-محور سے $\theta+90^\circ$ کا زاویہ بنائے گا۔

لہذا ناصفوں کی مساوات یہ ہے :

$$(y-x\tan\theta)\{y-x\tan(90^\circ+\theta)\}=0$$

یعنی

$$(y-x\tan\theta)(y+x\cot\theta)=0$$

یعنی

$$y^2-x^2+xy(\cot\theta-\tan\theta)=0 \qquad \dots \text{(2)}$$

اب

$$\cot\theta-\tan\theta=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=2\cot 2\theta=2\cot(\alpha+\beta)$$

$$=2(1-\tan\alpha\tan\beta)/(\tan\alpha+\tan\beta)$$

$$=2\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{b}{2h}\right)$$ بذریعہ (1)،

$$=\frac{a-b}{h}$$

(2) میں یہ قیمت رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ خطوط $ax^2+2hxy+by^2=0$ کے درمیانی زاویوں کے ناصفوں کی مساوات حسب ذیل ہے :

$$\frac{x^2-y^2}{a-b}=\frac{xy}{h}$$

مشق 21

ان خطوط کے درمیانی زاویوں کے ناصفوں کی مساوات معلوم کیجیے جن کی مساوات حسب ذیل ہے :

1. $2x^2-6yx-y^2=0$
2. $3x^2-15xy+2y^2=0$
3. $(y-mx)^2=(x+my)^2$
4. مساوات $x^2\cos^2\theta-xy\sin 2\theta-y^2\sin^2\theta=0$ کے ذریعے ظاہر ہونے والے خطوط سے ہم فاصلہ نقطوں کا طریق معلوم کیجیے۔
5. ثابت کیجیے کہ خطوط $a^2x^2+2h(a+b)xy+b^2y^2=0$ کے درمیانی زاویوں کے ناصف خطوط $ax^2+2hxy+by^2=0$ کے بھی درمیانی زاویوں کے ناصف ہیں۔

[دہلی پری انجینیرنگ 1959]

6. ثابت کیجیے کہ خطوط $ax^2+2hxy+by^2+\lambda(x^2+y^2)=0$ کے ذریعے ظاہر ہونے

والے خطوط کے درمیانی زاویوں کے ناصف وہی رہتے ہیں، λ کی قیمت چاہے کچھ بھی ہو۔

لہٰذا ان عمودی خطوط مستقیم کی مساوات بتائیے جن کے درمیانی زاویوں کے ناصف وہی ہیں جو خطوط $ax^2+2hxy+by^2=0$ کے درمیانی زاویوں کے ہیں۔

7 . دکھائیے کہ خطوط $x^2+2axy-y^2=0$ اور $x^2+2bxy-y^2=0$ میں سے ہر ایک جوڑا دوسرے جوڑے کے درمیانی زاویوں کا ناصف تب ہوگا جب $ab=-1$

[الٰہ آباد 1964]

8 . دکھائیے کہ خطوط $ax^2+2hxy+by^2=0$ کے درمیانی زاویوں کے ناصفوں کے درمیانی زاویوں کے ناصف حسب ذیل ہیں :

$$(a-b)(x^2-y^2)+4hxy=0$$

9 . اگر $h(1-m^2)+m(a-b)=0$ ، تو دکھائیے کہ خطوط $ax^2-2hxy+by^2=0$ کے درمیانی زاویہ کا ناصف خط مستقیم $y=mx$ ہے۔

10 . دکھائیے کہ خطوط $y=m_1x$ اور $y=m_2x$ کے درمیانی زاویوں کے ناصف حسب ذیل خطوط ہیں :

$$(m_1+m_2)(x^2-y^2)+2(m_1m_2-1)xy=0$$

لہٰذا خطوط $ax^2+2hxy+by^2=0$ کے درمیانی زاویوں کے ناصفوں کی مساوات معلوم کیجیے۔

[دہلی پری انجینیرنگ 1961]

11 . دکھائیے کہ خطوط مستقیم $2x^2+6xy+y^2=0$ خطوط مستقیم $4x^2+18xy+y^2=0$ سے برابر زاویہ بناتے ہیں۔

[الٰہ آباد 1961]

[اشارہ : یا تو خطوط کے درمیانی زاویوں کو برابر ہونا چاہیے یا ان زاویوں کے ناصفوں کو ایک سا ہونا چاہیے۔]

6.6 . دو درجی عام مساوات :

دو درجی عام عبارت وہ عبارت ہے جس میں دو درجہ اور اس سے کم درجہ کے ارکان ہوں۔ اس لیے اس میں x^2 ، xy ، y^2 ، x ، y ارکان موجود ہونے چاہئیں۔
عام طور پر

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c \quad . \; . \; . \quad (1)$$

کو x اور y میں دو درجی عام عبارت مانا جاتا ہے۔
عبارت (1) صفر کے برابر رکھے جانے پر دو درجی عام مساوات کہلاتی ہے۔

6.61 . خطوط مستقیم کا ایک جوڑا ہونے کی شرط :

وہ شرط معلوم کرنا جس سے عام مساوات

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad \cdots \quad (1)$$

دو خطوط مستقیم ظاہر کرے۔ شرط درحقیقت وہی ہے جو (1) کی بائیں جانب کی عبارت کے دو خطی اجزائے ضربی میں تقسیم ہوسکنے کا ہے۔
مان لیا کہ $a\neq0$, (1) کو a سے ضرب کیجیے اور تب مساوات کو x کی قوتوں میں بالترتیب رکھیے، تو ہمیں

$$a^2x^2+2ax(hy+g)+a(by^2+2fy+c)=0$$

ملتا ہے۔
تیسرے رکن کو دائیں جانب لے جائیے اور دونوں جانب $(hy+g)^2$ جوڑیے، تو

$$(ax+hy+g)^2=(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)$$

یا

$$ax+hy+g=\pm\sqrt{\{(h^2-ab)y^2+2(hg-af)y+(g^2-ac)\}}$$

اس مساوات سے دو خطی مساوات تبھی حاصل ہو سکتی ہیں جب اندرونِ جذر عبارت مکمل مربع ہو اور اس کے لیے شرط یہ ہے کہ

$$(hg-af)^2-(h^2-ab)(g^2-ac)=0$$

یعنی

$$(h^2g^2-2afgh+a^2f^2)-(h^2g^2-ach^2-abg^2+a^2bc)=0$$

یا

$$-a(abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2)=0$$

لہٰذا* مساوات $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ کے دو خطوط مستقیم ظاہر کرنے کے لیے شرط یہ ہے، کہ

$$\mathbf{abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0} \quad \ldots (2)$$

نوٹ 1 : (2) کے بائیں جانب کی عبارت کو مساوات (1) کا ممیّزہ کہتے ہیں۔

نوٹ 2 : رسم مقبّن میں (§ 5.6 دیکھیے) شرط (2) کو حاشیہ میں دکھائے گئے طریقے سے لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=0$$

نوٹ 3 : مذکورہ بالا فارمولا کے اطلاق کا آسان طریقہ ضربیوں کو حاشیہ میں دیے گئے طریقے سے ترتیب دینا ہے، تب شرط (2) کو حسب ذیل شکل دی جاسکتی ہے :

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ f & g & h \\ f & g & h \end{array}$$

کالموں میں ضربیوں کی ضربوں کا جوڑ = قطاروں میں ضربیوں کی ضربوں کا جوڑ

مثال۔ λ کی کس قیمت کے لیے مساوات

$$\lambda x^2-10xy+12y^2+5x-16y-3=0$$

---

* اگر $a=0$ لیا جائے تب بھی یہ مسئلہ صحیح ثابت کیا جاسکتا ہے۔ محدد جیومیٹری پر ہماری درسی کتاب دیکھیے۔

خطوط مستقیم کا جوڑا ظاہر کرے گی ؟ جوڑے کے خطوط کی مساوات علاحدہ علاحدہ معلوم کیجیے۔ [علی گڑھ پی۔ یو۔ سی 1961]

یہاں $a=\lambda$, $b=12$, $c=-3$, $f=-8$, $g=\frac{5}{2}$, $h=-5$

اس لیے دی ہوئی مساوات کے دو خطوط مستقیم ظاہر کرنے کی شرط یہ ہے کہ

$$-36\lambda+200=64\lambda+75-75$$

یعنی

$$\lambda=2$$

دی ہوئی مساوات میں $\lambda=2$ رکھنے پر، اور اس مساوات کو x میں دو درجی مساوات کی شکل دینے پر ہمیں

$$2x^2-x(10y-5)+(12y^2-16y-3)=0$$

ملتا ہے۔ اسے x کے لیے حل کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$x=\tfrac{1}{4}[10y-5\pm\sqrt{\{(10y-5)^2-4.2.(12y^2-16y-3)\}}]$$

$$=\tfrac{1}{4}\{10y-5\pm\sqrt{(100y^2-100y+25-96y^2+128y+24)}\}$$

$$=\tfrac{1}{4}\{10y-5\pm(2y+7)\}$$

لہٰذا مطلوبہ خطوط $x=3y+\frac{1}{2}$ اور $x=2y-3$ ہیں۔

6.7 دو خطوط کا درمیانی زاویہ :

اگر مساوات

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \qquad \ldots (1)$$

دو خطوط مستقیم ظاہر کرے تو ان خطوط کا درمیانی زاویہ معلوم کرنا۔

مان لیا (1) کے ذریعے ظاہر ہونے والے خطوط حسب ذیل ہیں۔

$y=m_1x+c_1$ اور $y=m_2x+c_2$

تو (جیسے § 6.3 میں ہے)،

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$$

$$\equiv b(y-m_1x-c_1)\,(y-m_2x-c_2)\quad . \; . \; . \quad (2)$$

اور اس لیے مطلوبہ زاویہ ہے

$$\tan^{-1}\{(m_1-m_2)/(1+m_1m_2)\}\quad . \; . \; . \quad (3)$$

اب ہمیں اس کو (1) کے ضریبوں کی رکنیت میں ظاہر کرنا ہے۔ اس کے لیے (2) کی دونوں جانب x^2 اور xy کے ضریبوں کو برابر کرنے پر (جیسے § 6.3 میں)

$$m_1m_2=a/b \quad \text{اور} \quad m_1+m_2=-2h/b\quad . \; . \; . \quad (4)$$

$$m_1-m_2=\sqrt{(4h^2/b^2-4a/b)}=2\sqrt{(h^2-ab)}/b$$

(3) میں ان قیمتوں کو رکھنے پر مطلوبہ زاویہ حسب ذیل ہے:

$$\tan^{-1}\{2\sqrt{(h^2-ab)}/(a+b)\}$$

ضمنی نتیجہ: خطوط (1) کے متوازی اور مبدا سے گزرنے والے خطوط کی مساوات $ax^2+2hxy+by^2=0$ ہے۔

یہ نتیجہ مساوات $(y-m_1x)\,(y-m_2x)=0$ میں (4) کے استعمال سے فوراً ملتا ہے۔

مشق 22

1. دکھائیے کہ مساوات

$$x^2+6xy+9y^2+4x+12y-5=0$$

دو متوازی خطوط ظاہر کرتی ہے۔ [علی گڑھ 1957]

2. دکھائیے کہ مساوات

$$6x^2-xy-12y^2-8x+29y-14=0$$

خطوط مستقیم کا ایک جوڑا ظاہر کرتی ہے۔ ان خطوط کا درمیانی زاویہ معلوم کیجیے۔

[الٰہ آباد 1946]

3. λ کی وہ قیمت بتائیے جس سے مساوات

$$12x^2-10xy+2y^2+11x-5y+\lambda=0$$

دو خطوط مستقیم ظاہر کرے اور ان کا درمیانی زاویہ بتایئے۔ [علی گڑھ 1959]

λ کی ایسی قیمت نکالیے جس سے حسب ذیل مساوات خطوط مستقیم کے جوڑے ظاہر کریں اور خطوط کی مساوات علاحدہ علاحدہ بتائیے۔

4. $6x^2+11xy-\lambda y^2+x+31y-15=0$ [گوالیار 1958]

5. $x^2-\lambda xy+2y^2+3x-5y+2=0$ [کشمیر 1966]

6. $6x^2+xy-12y^2-\lambda x+43y-35=0$

7. دکھایئے کہ $8x^2+8xy+2y^2+26x+13y+15=0$ خطوط مستقیم کا ایک جوڑا ظاہر کرتی ہے۔ ان خطوط کے درمیان کی عمودی دوری بھی بتائیے۔ [رڑکی 1965]

8. دکھایئے کہ حسب ذیل مساوات خطوط مستقیم کا ایک جوڑا ظاہر کرتی ہے۔ ان خطوط کا درمیانی زاویہ بتائیے:

(i) $x^2-y^2-2x+6y-8=0$ [الٰہ آباد 1956]

(ii) $x^2+xy-6y^2+7x+31y-18=0$ [الٰہ آباد 1957]

9. مساوات $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ کے ذریعے ظاہر ہونے والے خطوط مستقیم پر مبدأ سے کھینچے گئے عمودوں کی مساوات نکالیے۔ [الٰہ آباد 1959]

6.8. منحنی اور خطِ مستقیم کے تقاطع کو مبدا سے ملانے والے خطوط:

ان خطوط مستقیم کی مساوات نکالنا جو مبدا کو منحنی

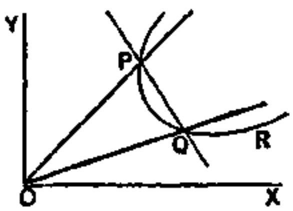
$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad \ldots (1)$$

اور خطِ مستقیم

$$lx+my=1 \quad \ldots (2)$$

کے نقاط تقاطع سے ملاتے ہیں۔

مان لیا خط مستقیم منحنی سے P اور Q میں ملتا ہے، تو P اور Q کے



شکل 31

محددات مساوات (1) اور (2) دونوں کو مطمئن کریں گے، اس لیے وہ مساوات

$$ax^2+2hxy+by^2+2(gx+fy)(lx+my)+c(lx+my)^2=0 \quad \ldots (3)$$

کو بھی مطمئن کریں گے۔

[کیوں کہ اگر کسی نقطہ تقاطع کے محددات (x_1, y_1) مساوات (2) کو مطمئن کرتے ہیں تو ان کے (3) کو مطمئن کرنے کی شرط صرف (1) کو مطمئن کرنے کی شرط ہو جاتی ہے۔]

لہٰذا مساوات (3) نقطہ P اور Q سے گزرنے والا کوئی منحنی ظاہر کرتی ہے۔

لیکن (3) دو درجی ہم درجہ مساوات ہونے کی وجہ سے مبدأ سے گزرنے والے دو خطوط ظاہر کرتی ہے۔ اس لیے (3) خطوط OP اور OQ کو ظاہر کرتی ہے اور اس لیے مطلوبہ مساوات ہے۔

اس طرح ایک منحنی اور ایک خطِ مستقیم کے نقاط تقاطع کو مبدأ سے ملانے والے خطوطِ مستقیم کی مساوات منحنی کی مساوات کو خطِ مستقیم کی مساوات کے ذریعے ہم درجہ بنانے پر حاصل ہوتی ہے۔

نوٹ : اس طریقے کا استعمال کرنے کے لیے دیے ہوئے خطِ مستقیم کی مساوات کو، اگر وہ پہلے سے ہی شکل (2) کی نہ ہو، شکل (2) میں لے آنا چاہیے۔ مثال کے طور پر مساوات $ax+by+c=0$ اس شکل میں لکھنے پر $(-a/c)x+(-b/c)y=1$ ہو جاتی ہے۔

مثال : دکھائیے کہ مبدأ کو خطِ مستقیم $3x-y=2$ اور منحنی

$$7x^2+8y^2-4xy+2x-4y-8=0$$

کے نقاط تقاطع سے ملانے والے خطوطِ مستقیم ایک دوسرے پر عمود ہیں۔

خط کی مساوات کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں :

$$\tfrac{1}{2}(3x-y)=1. \quad \ldots \quad (1)$$

منحنی کی مساوات کو (1) کی مدد سے ہم درجہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$7x^2+8y^2-4xy+2(x-2y)\cdot\tfrac{1}{2}(3x-y)-8\cdot\tfrac{1}{4}(3x-y)^2=0$$

جو آسان کرنے پر حسب ذیل شکل اختیار کرلیتی ہے :

$$-8x^2+8y^2+xy=0 \quad \ldots \quad (2)$$

یہی منحنی اور خط مستقیم کے نقاط تقاطع کو مبدأ سے ملانے والے خطوط مستقیم کی مساوات ہے۔

لیکن اس میں x^2 اور y^2 کے ضریبوں کا جوڑ صفر ہے، اس لیے خطوط (2) ایک دوسرے پر عمود ہیں [§6·3 سے]۔

مشق 23

1. خط $y=x+2$ اور منحنی $x^2+y^2=4$ کے نقاط تقاطع کو مبدأ سے ملانے والے خطوط مستقیم کے جوڑے کی مساوات معلوم کیجیے۔ [الٰہ آباد 1947]

2. دکھائیے کہ منحنی $3x^2+5xy-3y^2+2x+3y=0$ اور خط $3x-2y=1$ کے مشترک نقطوں کو مبدأ سے ملانے والے خطوط ایک دوسرے پر عمود ہیں۔
[الٰہ آباد 1962]

3. λ کی قیمت نکالیے جس کے لیے خط $x+y=1$ اور دائرہ $x^2+y^2+x-2y-\lambda=0$ کے نقاط تقاطع کو مبدأ سے ملانے والے خطوط ایک دوسرے پر عمود ہوں۔ [علی گڑھ 1958]

4. دکھائیے کہ خط $x+y=1$ اور دائرہ $4x^2+4y^2+4x-2y-5=0$ کے نقاط تقاطع کو مبدأ سے ملانے والے خطوط ایک دوسرے پر عمود ہیں۔ [راجپوتانہ 1943]

5. اگر $y=mx+1$ اور $x^2+y^2=1$ کے نقاط تقاطع کو مبدأ سے ملانے والے خطوط ایک دوسرے پر عمود ہوں، تو m کی قیمت نکالیے۔ [الٰہ آباد 1955]

6. ان دو خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو مبدأ کو خط $y+mx=2a$ اور

دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے نقاط تقاطع سے ملاتے ہیں۔
m کی کس قیمت کے لیے یہ خطوط ایک دوسرے پر عمود ہوں گے؟

7. دکھائیے کہ مبدأ کو منحنی

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx=0$$

اور

$$a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x=0$$

کے نقاط تقاطع سے ملانے والے خطوط ایک دوسرے پر عمود ہوں گے جب

$$g(a'+b')=g'(a+b)$$ [راجپوتانہ 1957]

[اشارہ: دی ہوئی دونوں مساوات سے x میں خطی ارکان کا اخراج کرنے سے جو خطوط ملیں ان کے عمود ہونے کی شرط نکالیے۔]

8. ثابت کیجیے کہ $x-y=1$ اور $5x^2+12xy-6y^2+4x-2y+3=0$ کے نقاط تقاطع سے ملانے والے خطوط محاور سے برابر زاویے بناتے ہیں۔

9. ثابت کیجیے کہ خطِ مستقیم $y=3x+2$ اور منحنی

$$x^2+2xy+y^2+4x+8y-20=0$$

کے نقاط تقاطع کو مبدأ سے ملانے والے خطوطِ مستقیم کا درمیانی زاویہ $\tan^{-1}\frac{11}{38}$ ہے۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1961]

مشق 24 (خطِ مستقیم پر)

1. دکھائیے کہ اس خطِ مستقیم کی مساوات، جس کے ذریعے محاور سے کٹے داخلی قطعوں کے مقلوب l، m ہیں، $lx+my=1$ ہے۔ [علی گڑھ 1958]

2. خطِ مستقیم $3x-2y=2$ پر وہ نقطے بتائیے جو خطِ مستقیم $3x+4y=8$ سے 3 اکائی کی دوری پر ہیں، اور اس مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے دو راس تو یہ ہیں اور تیسرا راس مبدأ ہے۔ [بھوپال 1962]

3. مبدأ سے خطوط $3x-4y=25$ اور $3x+5y=17$ پر عمود کھینچے جاتے ہیں۔

پائے عمود کو ملانے والے خط مستقیم کی مساوات بتائیے۔ [راجپوتانہ 1962]

4. اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو نقطوں $(1, 3)$ اور $(-4, 2)$ کو ملانے والے خط مستقیم پر عمود ہے اور اس کا ناصف کیا ہے۔ مبدأ سے گزرنے والے اس خط کی بھی مساوات معلوم کیجیے جو دیے ہوئے نقطوں کو ملانے والے خط پر عمود ہے۔

5. $(1, 2)$ اور $(3, 8)$ ایک مربع کے دو روبرو راس ہیں۔ مربع کے ضلعوں اور وتروں کی مساوات معلوم کیجیے۔

6. مربع کا ایک ضلع خط $4y-3x=7$ پر ہے اور ایک راس $(2, -3)$ ہے۔ دیگر راسوں کے محددات اور مربع کا رقبہ نکالیے۔

7. اس مثلث کا عمودی مرکز نکالیے جس کے ضلعوں کی مساوات حسب ذیل ہیں :

$$x+ay=a^2 \,,\; x+by=b^2 \quad \text{اور} \quad x+cy=c^2$$

8. AB کی لمبائی 4 اکائی ہے اور کسی نقطہ P پر $60°$ کا مستقل زاویہ بناتا ہے۔ اگر AB کو x-محور اور اس کے وسطی نقطہ کو مبدأ مانا جائے تو اس منحنی کی مساوات معلوم کیجیے جس پر P حرکت کرتا ہے۔ [رڑکی 1957]

9. تحلیلی طور پر ثابت کیجیے کہ مثلث کے دو ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے والا خط مستقیم تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔

10. مبدأ سے گزرنے والے دو خطوط مستقیم میں سے ہر ایک سے نقطہ $(4, 2)$ کی دوری 3 ہے، خطوط کی مساوات معلوم کیجیے۔

11. ثابت کیجیے کہ $y^2-4xy+4x^2-6x+3y+2=0$ متوازی خطوط کا ایک جوڑا ظاہر کرتی ہے اور ان خطوط کی مساوات بتائیے۔ [اجمیر 1956]

12. وہ شرط بتائیے جس سے مساوات

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

دو خطوط مستقیم ظاہر کرے۔ اس کے علاوہ وہ کون سی شرط مطلوب ہے جس سے کہ یہ خطوط متوازی ہوں ؟ مساوات

$$x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-3x-3\sqrt{3}y-4=0$$

کے ذریعے ظاہر ہونے والے متوازی خطوط کے درمیان کی دوری معلوم کیجیے۔

[بھوپال 1962]

13. دکھائیے کہ خط $x-y=2$ اور منحنی $5x^2+12xy-8y^2+8x-4y+12=0$

کے نقاط تقاطع کو مبدأ سے ملانے والے خطوط مستقیم محاور سے برابر زاویے بناتے ہیں۔

[علی گڑھ 1956]

14. مساوات $2x^2-2y^2+3xy+10x-5y=0$ اور خط $3x+y+5=0$

کے متعلق حسب ذیل حقائق ثابت کیجیے :

(i) تیسرا خط باقی دو کے درمیانی زاویہ کا ناصف ہے۔

(ii) پہلے دو خطوط ایک دوسرے پر عمود ہیں۔

(iii) تینوں خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

15. ثابت کیجیے کہ، λ کی چاہے کچھ بھی قیمت ہو، وہ خطوط، جو

$x^2+hxy-y^2+gx+fy=0$ اور $fx-gy=\lambda$ کے مشترک نقطوں کو مبدأ سے

ملاتے ہیں، ایک دوسرے پر عمود ہیں۔

[اجین 1961]

16. نقطہ $(i, 0)$ سے خطوط مستقیم کھینچے جاتے ہیں جو منحنی $2x^2+5y^2=7x$ کا

تقاطع کرتے ہیں۔ دکھائیے کہ ان میں سے ہر ایک خط کا منحنی کے ذریعے مقطوعہ

حصہ مبدأ پر زاویہ قائمہ بناتا ہے۔

[الہ آباد 1940]

17. اگر مبدأ [illegible] ہو اور دو نقطوں P_1 ، P_2 کے محددات بالترتیب (x_1, y_1)

اور ([illegible]) ہوں تو ثابت کیجیے کہ

(i) $OP_1 . OP_2 . \cos P_1OP_2 = x_1x_2+y_1y_2$

(ii) $OP_1 . OP_2 . \sin P_1OP_2 = y_1x_2-x_1y_2$

لہذا ثابت کیجیے کہ مثلث ABC میں

$\triangle = \frac{1}{2}bc \sin A$ اور b^2 [illegible] $-a^2=$ [illegible] A

18. دکھائیے کہ λ کی قیمت چاہے کچھ بھی ہو، نقطہ
$\{(x_2+\lambda(x_2-x_1), y_2+\lambda(y_2-y_1)\}$ نقطوں (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) کو ملانے
والے خط پر ہی رہے گا۔ کس نسبت میں پہلا نقطہ آخری دو نقطوں کی دوری کو تقسیم
کرتا ہے ؟

19. خطوط $x+y\sqrt{3}=6+2\sqrt{3}$ اور $x-y\sqrt{3}=6-2\sqrt{3}$ کے درمیانی زاویوں کے
ناصفوں کی مساوات معلوم کیجیے ۔ ایسے دائروں کے نصف قطر معلوم کیجیے جو دونوں
خطوط کو چھوئیں اور جن کے مرکز x اور y محور پر ہوں ۔ [رڑکی 19]

20. کسی مربع کا ایک وتر محاور کے درمیان خط $x/a+y/b=1$ کا مقطوعہ حصہ ہے ۔
دکھائیے کہ مربع کے دوسرے وتر کے سرے حسب ذیل نقطے ہیں :

$$\{\tfrac{1}{2}(a+b), \tfrac{1}{2}(a+b)\} \quad \text{اور} \quad \{\tfrac{1}{2}(a-b), \tfrac{1}{2}(b-a)\}$$

21. دکھائیے کہ خطوط $y=m_1x+a/m_1$، $y=m_2x+a/m_2$ اور $y=m_3x+a/m_3$
سے بنے مثلث کا رقبہ حسب ذیل ہے :

$$\tfrac{1}{2}a^2(m_2-m_3)(m_3-m_1)(m_1+m_2)/m_1^2m_2^2m_3^2$$

22. اگر کسی مثلث ABC کا وسطانی مرکز G ہو اور O کوئی دوسرا نقطہ ہو، تو ثابت
کیجیے کہ

$$3(GA^2+GB^2+GC^2)=BC^2+CA^2+AB^2$$

اور

$$OA^2+OB^2+OC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3GO^2$$

[اشارہ : G کو مبدأ مانیے اور (x_1, y_1) وغیرہ کو A, B, C کے
محدّدات ۔ تو
$\Sigma x_1=0=\Sigma y_1$ اس لیے $\Sigma x_1^2=-2\Sigma x_1x_2$ وغیرہ۔
لہٰذا $\Sigma(x_1-x_2)^2=2\Sigma x_1^2-2\Sigma x_1x_2=3\Sigma x_1^2$ وغیرہ ۔]

23. خطوط مستقیم $(x-3)^2-7(x-3)(y-2)+4(y-2)^2=0$ کے درمیانی زاویوں

کے ناصفوں کی مساوات معلوم کیجیے۔

[اشارہ: مبدأ کو نقطہ (3, 2) پر منتقل کیجیے اور ناصفوں کی مساوات معلوم کر کے پہلے محاور کے لحاظ سے ان کی مساوات معلوم کیجیے۔]

24. دکھائیے کہ دائروں

$$x^2+y^2=a^2 \quad \text{اور} \quad x^2+y^2+2(gx+fy)=0$$

کے نقاط تقاطع کو مبدأ سے ملانے والے خطوط مساوات $a^2(x^2+y^2)-4(gx+fy)^2=0$ کے ذریعے ظاہر ہوتے ہیں۔

25. ثابت کیجیے کہ $ax^2+2hxy+by^2=0$ سے حاصل ہوئے خطوط مستقیم پر نقطہ (p, q) سے کھینچے گئے عمودوں کی ضرب حسب ذیل ہے:

$$\frac{ap^2+2hpq+bq^2}{\sqrt{\{(a-b)^2+4h^2\}}}.$$ [الٰہ آباد 1958]

[اشارہ: مان لیا $ax^2+2hxy+by^2 \equiv b(y-m_1x)(y-m_2x)$

تو

$$ap^2+2hpq+bq^2=b(q-m_1p)(q-m_2p) \qquad (1)$$

$$\text{تب مطلوبہ ضرب} = \frac{(q-m_1p)(q-m_2p)}{\sqrt{\{(1+m_1^2)(1+m_2^2)\}}}$$

$$= \frac{ap^2+2hpq+bq^2}{b\sqrt{\{1+(m_1^2+m_2^2)+m_1^2m_2^2\}}}$$ بذریعہ (1)

اب § 6·4 کا استعمال کیجیے۔]

26. ان خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو نقطہ (1, 1) سے گزریں اور خطوط $2x^2-3y^2+3xy=0$ پر عمود ہوں۔

27. دکھلائیے کہ خطوط $x^2+4xy+y^2=0$ خط $x-y=4$ کے ساتھ ایک مساوی اضلاع مثلث بناتے ہیں۔ [راجپوتانہ 19[illegible]]

28. اگر مساوات $hxy+gx+fy+c=0$ دو خطوط مستقیم ظاہر کرتی ہے تو ثابت کیجیے کہ $fg=ch$ اور یہ بھی کہ ان خطوط اور محاور محددات سے ایک مستطیل بنتا ہے۔ مستطیل کے وتروں کی مساوات نکالیے۔ [کشمیر 1964]

29. دکھائیے کہ خطوط $ax^2+2hxy+by^2=0$ میں سے ایک خط اور خطوط $ax^2+2hxy+by^2+k(x^2+y^2)=0$ میں سے ایک خط کا درمیانی زاویہ باقی دو خطوط کے درمیانی زاویہ کے برابر ہے۔ [الٰہ آباد 1959]

30. ثابت کیجیے کہ دونوں خطوط $(x_1y-y_1x)^2=a^2(x^2+y^2)$ نقطہ (x_1, y_1) سے برابر دوری پر ہیں۔ [الٰہ آباد 1950]

[اشارہ: خط $y=mx$ ان دو خطوط میں سے ایک تب ہوگا جب $(y_1-mx_1)/\sqrt{(1+m^2)}=a$ اس مساوات اور $y=mx$ سے m کو خارج کیجیے]

31. ثابت کیجیے کہ مساوات $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ دو متوازی خطوط تب ظاہر کرے گی جب $h^2=ab$ اور $bg^2=af^2$ اور یہ کہ ان کے درمیان کی دوری $2\sqrt{(g^2-ac)}/a(a+b)$ ہے۔ [الٰہ آباد 1965]

32. شرط بتائیے کہ خطوط $ax^2+2hxy+by^2=0$ اور $a'x^2+2h'xy+b'y^2=0$ کے دو جوڑوں میں ایک خط مستقیم مشترک ہو۔ [ساگر 1965]

33. دکھائیے کہ خطوط مستقیم

$$(a^2-3b^2)x^2+8abxy+(b^2-3a^2)y^2=0$$

خط $ax+by+c=0$ کے ساتھ رقبہ $c^2/\sqrt{3}(a^2+b^2)$ کا مساوی اضلاع مثلث بناتے ہیں۔ [الٰہ آباد 1963]

34. دکھائیے کہ مساوات $ay^4+bxy^3+cx^2y^2+dx^3y+ex^4=0$ کے ذریعے ظاہر ہونے والے خطوط میں سے دو خطوط ایک دوسرے پر عمود تب ہوں گے جب

$$(b+d)(ad+be)+(e-a)^2(a+c+e)=0$$

[الٰہ آباد 1951]

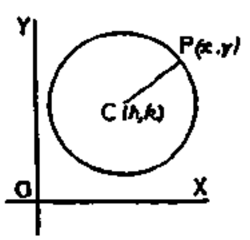
باب 7

دائرہ

7.1. دائرہ کی مساوات :

دائرہ کی مساوات نکالنا جب مرکز اور نصف قطر دیے ہوئے ہوں۔

مان لیا دائرہ کے مرکز C کے محدّدات (h, k) ہیں اور نصف قطر a ہے۔ h ، k ، a میں دائرہ کی مساوات نکالنا مطلوب ہے۔



شکل 32

مان لیا دائرہ پر کسی نقطہ P کے محدّدات (x, y) ہیں، تو

$$CP^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

پھر، $CP^2 = a^2$ ، کیوں کہ CP دائرہ کا نصف قطر ہے۔

CP^2 کی ان برابر قیمتوں سے ہم دیکھتے ہیں کہ جس دائرہ کا مرکز (h, k) اور نصف قطر a ہے، اس کی مساوات حسب ذیل ہوگی :

$$\mathbf{(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2}$$

ضمنی نتیجہ : جس دائرہ کا مرکز مبدأ اور نصف قطر a ہے، اس کی مساوات حسب ذیل ہے :

$$\mathbf{x^2 + y^2 = a^2}$$

مثال 1 : اس دائرہ کی مساوات بتائیے جس کا مرکز $(3, -4)$ اور نصف قطر 5 ہے۔

مطلوبہ مساوات حسب ذیل ہے :

$$(x-3)^2+\{y-(-4)\}^2=5^2$$

یعنی

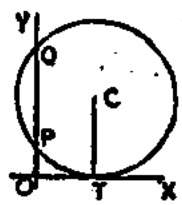
$$x^2-6x+9+y^2+8y+16=25$$

یعنی

$$x^2+y^2-6x+8y=0$$

مثال 2 : اس دائرہ کی مساوات بتائیے جو x-محور کو چھوتا ہے اور جس کا مرکز نقطہ $(1, 2)$ ہے۔ y-محور سے کٹے داخلی قطع کی لمبائی بھی نکالیے۔

کیوں کہ دائرہ x-محور کو چھوتا ہے، اس لیے مرکز C کا طول CT دائرہ کے نصف قطر کے برابر ہے۔



شکل 33

∴ دائرہ کا نصف قطر = 2 پھر مرکز $(1, 2)$ ہے۔

اس لیے دائرہ کی مساوات حسب ذیل ہے :

$$(x-1)^2+(y-2)^2=2^2$$

یعنی

$$x^2-2x+y^2-4y+1=0 \quad \cdots (1)$$

مان لیا یہ دائرہ y-محور کو نقطہ P اور Q پر کاٹتا ہے، تو P اور Q کے طول (1) میں $x=0$، رکھنے سے حاصل ہوئی مساوات کے ریشے ہیں۔ یہ مساوات $y^2-4y+1=0$ ہے یعنی $(y-2)^2=3$،

لہذا مطلوبہ طول $2+\sqrt{3}$ اور $2-\sqrt{3}$ ہیں، اس لیے y-محور سے کٹے داخلی قطع کی لمبائی

$(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})$ یعنی $2\sqrt{3}$ ہے۔

مشق 25

اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جس کا

1. نصف قطر 5 اور مرکز $(0, 3)$ ہے۔
2. نصف قطر $\sqrt{10}$ اور مرکز $(-3, -1)$ ہے۔
3. نصف قطر $a-b$ اور مرکز (a, b) ہے۔

اس دائرہ کی مساوات نکالیے جو

4. مبدأ سے گزرتا ہے اور جس کا مرکز $(-2, 3)$ ہے۔ محاور سے کٹے داخلی قطعوں کی لمبائیاں نکالیے۔
5. x- محور کو چھوتا ہے اور جس کا مرکز (a, b) ہے۔
6. y-محور کو چھوتا ہے اور جس کا مرکز $(p, -q)$ ہے۔
7. دکھائیے کہ دائرہ $x^2+y^2-2ax-2ay+a^2=0$، x اور y دونوں محاور کو چھوتا ہے۔
[الٰہ آباد 1952]
8. ان دائروں کی مساوات بتائیے جو خطوط $x=0$ ، $y=0$ اور $x=c$ کو چھوتا ہے۔
[الٰہ آباد 1958]

7·2. دائرہ کی عام مساوات :

گزشتہ دفعہ میں حاصل ہوئی مساوات

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2, \quad \dots (1)$$

کو ہم حسب ذیل طریقے سے بھی لکھ سکتے ہیں :

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-a^2=0$$

جو حسب ذیل شکل کی ہے :

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

عام طور پر اس مساوات کو دائرہ کی عام مساوات مان لیا جاتا ہے،

اگرچہ مساوات (1) بھی اتنی ہی عام ہے۔

7·3. مرکز اور نصف قطر:

یہ ثابت کرنا کہ مساوات $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ایک دائرہ ظاہر کرتی ہے، اور اس کا مرکز اور نصف قطر نکالنا۔ دی ہوئی مساوات کو ہم حسب ذیل طریقے سے لکھ سکتے ہیں:

$$(x^2+2gx+g^2)+(y^2+2fy+f^2)=g^2+f^2-c$$

یعنی

$$\{x-(-g)\}^2+\{y-(-f)\}^2=\{\sqrt{(g^2+f^2-c)}\}^2$$

اس کا موازنہ مساوات

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$$

سے کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ایک دائرہ ظاہر کرتی ہے جس کا مرکز

$$(-g,-f)$$

اور نصف قطر یہ ہے:

$$\sqrt{(g^2+f^2-c)}$$

نوٹ 1 : اگر $g^2+f^2-c=0$ تو مساوات صفر نصف قطر کا دائرہ، یعنی صرف نقطہ $(-g,-f)$ ظاہر کرتی ہے۔

اگر g^2+f^2-c کی قیمت منفی ہو تو نصف قطر کی قیمت فرضی ہے۔ اس لیے دی ہوئی مساوات کوئی بھی حقیقی طریق ظاہر نہیں کرتی، تب بھی فرضی نقطہ کے محدّدات (8·7 § دیکھیے) اسے مطمئن کرتے ہیں اور یکسانیت کے واسطے ہم دیکھتے ہیں کہ اس حالت میں مساوات ایک فرضی دائرہ ظاہر کرتی ہے۔

نوٹ 2 : ایک دائرہ سے دوسرے دائرہ میں جو باتیں مختلف ہو سکتی ہیں وہ صرف مرکز

کے محددات اور نصف قطر ہیں اور عام مساوات میں مستقل اعداد g، f، c بہ ظاہر ایسے چنے جاسکتے ہیں کہ عام مساوات کسی بھی دیے ہوئے دائرہ کو ظاہر کرے۔

یہ حقیقت ہے کہ عام مساوات میں مستقل اعداد کی تعداد تین ہے، جیومیٹری کی اس خاصیت کے مشابہ ہے کہ دائرہ تین علاحدہ علاحدہ شرائط کو مطمئن کرتا ہوا کھینچا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر دائرہ تین دیے ہوئے نقطوں سے گزرتا ہوا یا تین دیے ہوئے خطوط کو چھوتا ہوا کھینچا جاسکتا ہے۔

7.4. دائرہ کے لیے شرط:

دائرہ کی مساوات

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad \cdots (1)$$

(اوّل سے آخر تک کسی مستقل سے ضرب کرنے پر بھی) دو درجی عام مساوات

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad \cdots (2)$$

کی ایک مخصوص شکل ہے، درحقیقت وہ حالت جب $h=0$ اور $a=b$

لہٰذا دو درجی عام مساوات ایک دائرہ تب ظاہر کرتی ہے جب xy کا ضربیہ صفر ہو اور x^2 اور y^2 کے ضربیے برابر ہوں۔

مثال: نقطوں (1, 0)، (2, −2) اور (3, 1) سے گزرنے والے دائرہ کی مساوات، مرکز اور نصف قطر نکالیے۔

مان لیا دائرہ کی مساوات

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad \cdots (1)$$

ہے۔ کیوں کہ تینوں دیے ہوئے نقطے دائرہ پر ہیں، اس لیے ان کے محددات (1) کو مطمئن کریں گے۔ اس لیے

$$1+2g+c=0 \quad \cdots (2)$$

$$8+4g-4f+c=0 \quad \cdots (3)$$

$$10+6g+2f+c=0 \qquad \dots (4)$$

(2) کو (3) میں سے اور (2) کو (4) میں سے گھٹانے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$4g+2f+9=0 \quad \text{اور} \quad 2g-4f+7=0$$

انھیں حل کرنے پر ہمیں $g=-\frac{5}{2}$ اور $f=\frac{1}{2}$ ملتا ہے۔

تب مساوات (2) سے $c=4$ جس سے

$$\sqrt{(g^2+f^2-c)}=\sqrt{(\tfrac{25}{4}+\tfrac{1}{4}-4)}=\tfrac{1}{2}\sqrt{10}$$

g, f, c کی قیمتیں رکھنے پر (1)

$$x^2+y^2-5x+y+4=0$$

ہوجاتی ہے۔ یہی دائرہ کی مطلوبہ مساوات ہے۔ اس کا مرکز $(-g, -f)$ یعنی $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$ ہے، اور نصف قطر $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ہے۔

مشق 26

اس دائرہ کا نصف قطر اور مرکز نکالیے جس کی مساوات حسب ذیل ہے :

1. $x^2+y^2+4x-4y-1=0$ [الہ آباد 1956]

2. $2x^2+2y^2=3x-5y+7$ [الہ آباد 1957]

3. $9x^2+y^2=4(x^2-y^2-2x)$ [علی گڑھ 1952]

4. (i) نقطوں $(0, 0)$ ، $(2, 3)$ اور $(3, 4)$ سے گزرنے والے دائرہ کی مساوات نکالیے۔ [الہ آباد 1959]

(ii) ایک مثلث کے راس $(3, 1)$ ، $(14, -1)$ اور $(11, 5)$ ہیں، اس مثلث کے محیطی دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے۔ [رڑکی 1945]

5. خطوط $y=x$ ، $y=2x$ اور $y=3x+2$ کے ذریعے بنے مثلث کے محیطی دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے۔ [الہ آباد 1948]

6. دیے ہوئے مربع کے دو متصل ضلعوں کو محاور مان کر مربع کے محیطی دائرہ کی مساوات حاصل کیجیے۔

7. اس دائرہ کی مساوات بتائیے جو مبدأ سے گزرے اور محاور کے مثبت حصّوں سے 3 اور 4 کے داخلی قطعے کاٹے۔ [الٰہ آباد 1957]

8. اس دائرہ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کیجیے جو نقطہ $(3, -6)$ سے گزرے اور دونوں محاور کو چھوئے۔ [علی گڑھ پی۔ یو۔ سی 1959]

9. ایک دائرہ x-محور کو مبدأ سے 4 کی دوری پر چھوتا ہے اور y-محور پر 6 کا داخلی قطع کاٹتا ہے۔ اس کی مساوات اور نصف قطر معلوم کیجیے۔ [الٰہ آباد 1962]

10. اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جس کا مرکز $(1, -3)$ ہے اور جو خط $2x-y-4=0$ کو چھوتا ہے۔ [الٰہ آباد 1951]

11. اس دائرہ کی مساوات بتائیے جو نقطوں $(3, -2)$ اور $(-2, 0)$ سے گزرے اور جس کا مرکز خط مستقیم $2x-y=3$ پر ہو۔

12. نقطہ $(-1, 0)$ سے گزرنے والے اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جو y-محور کو نقطہ $(0, \sqrt{3})$ پر چھوتا ہے۔ اس کا مرکز اور نصف قطر بھی نکالیے۔

[گوالیار 1958]

13. A اور B دو مقررہ نقطے ہیں۔ دکھائیے کہ اس نقطہ P کا طریق، جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ $PA^2+PB^2=c$ ایک دائرہ ہے۔

14. A اور B دو مقررہ نقطے ہیں۔ دکھائیے کہ ایسے نقطہ P کا طریق جو اس طرح حرکت کرے کہ $PA=n \cdot PB$ ایک دائرہ ہے جس کا مرکز AB کو $n^2 : 1$ کی نسبت میں خارجی طور پر تقسیم کرتا ہے۔ دائرہ کا نصف قطر نکالیے۔

15. تحلیلی طور پر ثابت کیجیے کہ نصف دائرہ میں بنا زاویہ، زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

[اشارہ : قطر کے سروں کو $(-a, 0)$ اور $(a, 0)$ مانیے۔]

16. اس دائرہ کی مساوات بتائیے جو نقطوں $(-1, 5)$ اور $(-7, 5)$ سے گزرے اور خط $3x+4y=17$ کو چھوتا ہے۔

[راجپوتانہ 1957]

7.5 . دائرہ کے لحاظ سے کسی نقطہ کا مقام :

ہم جانتے ہیں کہ دائرہ ایک بند منحنی ہے جس پر وہ سب نقطے واقع ہیں جو مرکز سے نصف قطر کے برابر دوری پر ہیں۔ مان لیا دائرہ کا مرکز C اور نصف قطر a ہے، تو نقطہ P دائرہ کے برابر تب ہوگا جب دوری CP ، a سے بڑی ہوگی اور اندر تب ہوگا جب دوری CP ، a سے کم ہوگی۔ اس لیے نقطہ (x_1, y_1) کا دائرہ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ کے باہر یا اندر ہونا اس پر منحصر ہے کہ

$$\sqrt{[\{x_1-(-g)\}^2+\{y_1-(-f)\}^2]} > \text{ یا } < \sqrt{(g^2+f^2-c)}$$

مربع کرکے ترتیب بدلنے پر

$$(x_1+g)^2+(y_1+f)^2-(g^2+f^2-c) > \text{ یا } < 0$$

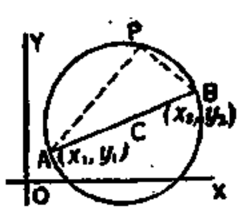
یا

$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c > \text{ یا } < 0$$

اگر عبارت $x^2+y^2+2gx+2fy+c$ کو S سے ظاہر کریں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ نقطہ (x_1, y_1) کا دائرہ $S=0$ کے باہر، دائرہ پر، یا دائرہ کے اندر ہونا اس پر منحصر ہے کہ $x=x_1$ اور $y=y_1$ کے لیے S کی قیمت صفر سے زیادہ ہے، یا برابر ہے، یا کم۔

7.6 . دیے ہوئے قطر پر دائرہ :

اس دائرہ کی مساوات معلوم کرنا جس کے ایک قطر کے سرے (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) ہوں۔



شکل 34

دیے ہوئے نقطوں کے نام A اور B رکھیے۔ مان لیا دائرہ پر کسی نقطہ P کے محددات (h, k) ہیں۔ تو $\angle APB$ نصف دائرہ میں ہونے کی وجہ

سے ایک زاویہ قائمہ ہے۔

اس لیے AP اور BP کے m کا حاصل ضرب -1 ہے، یعنی

$$\frac{k-y_1}{h-x_1}\times\frac{k-y_2}{h-x_2}=-1$$

یا

$$(h-x_1)(h-x_2)+(k-y_1)(k-y_2)=0$$

k ، h کی جگہ بالترتیب x ، y لکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ نقطوں (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) کو ملانے والے خط کو قطر مان کر کھینچے گئے دائرہ کی مساوات حسب ذیل ہے:

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

مشق 27

1. ایک دائرہ کے قطر کے سرے $(3, 0)$ اور $(7, -1)$ ہیں۔ دائرہ کی مساوات بتائیے۔
[علی گڑھ 1939]

2. دکھائیے کہ نقطوں (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) کو ملانے والے خط کو قطر مان کر کھینچا گیا دائرہ وہی ہے جو (x_1, y_2) اور (x_2, y_1) کو قطر کے سرے مان کر کھینچا گیا دائرہ۔ بتائیے ایسا کیوں ہے؟

3. دکھائیے کہ وہ شرط جس سے نقطوں $(a, 0)$ اور $(-a, 0)$ کو ملانے والا خط نقطہ (x_1, y_1) پر زاویہ θ بنائے، حسب ذیل ہے:

$$x_1^2+y_1^2-a^2\pm 2ay_1 \cot\theta=0$$

لہٰذا دکھائیے کہ اس نقطہ کے طریق کی مساوات جس پر دیا ہوا خط ایک مستقل زاویہ بناتا ہے، ایک دائرہ ہے۔

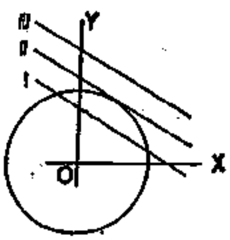
4. دکھائیے کہ راسوں $(3, 8)$, $(3, 2)$, $(2, -1)$ سے بنا مثلث مکمل طور سے دائرہ $x^2+y^2-10x-6y-3=0$ کے اندر ہے۔
[اشارہ: دکھائیے کہ ہر ایک راس دائرہ کے اندر ہے۔]

5. اگر $y=x-2$، دائرہ $x^2+y^2-2x=0$ کے کسی وتر کی مساوات ہے تو اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جس کا قطر یہ وتر ہے۔ [کشمیر 1965]

6. اگر $y=2x$، دائرہ $x^2+y^2=10x$ کے کسی وتر کی مساوات ہو، تو اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جس کا قطر یہ وتر (chord) ہے۔

[علی گڑھ پی۔ یو۔ سی 1966]

7.7. خط اور دائرہ کا تقاطع :



شکل 35

مان لیا

$$x^2+y^2=a^2 \quad . . . (1)$$

ایک دائرہ ہے اور

$$y=mx+c \quad . . . (2)$$

ایک خط مستقیم۔

(1) اور (2) کے نقاط تقاطع نکالنا مطلوب ہے۔

دائرہ اور خط مستقیم کے نقطے (یا نقاط) تقاطع کے محددات (1) اور (2) دونوں کو مطمئن کرتے ہیں، اس لیے وہ (1) اور (2) کو ہمزاد مساوات مان کر نکالے جا سکتے ہیں۔ (2) سے y کی قیمت مساوات (1) میں رکھنے پر y خارج ہو جاتا ہے اور x کے لیے ہمیں حسب ذیل مساوات ملتی ہے:

$$x^2+(mx+c)^2=a^2$$

یعنی

$$(1+m^2)x^2+2mcx+(c^2-a^2)=0 \quad . . . (3)$$

یہ x میں دو درجی ہے۔ اس لیے دو نقاط تقاطع ملتے ہیں۔

لیکن دو درجی مساوات کے ریشے (i) حقیقی اور جدا جدا (ii) منطبق یا (iii) فرضی ہو سکتے ہیں۔ الجبرا سے ہم جانتے ہیں کہ (3) کے ریشوں کے حقیقی ہونے کی شرط

یہ ہے کہ

$$(2mc)^2-4(1+m^2)(c^2-a^2)>0\,,$$

یعنی

$$4\{m^2c^2-(c^2-a^2+m^2c^2-m^2a^2)\}>0,$$

یا

$$a^2(1+m^2)-c^2>0,$$

یا

$$a^2(1+m^2)>c^2$$

اگر یہ شرط مطلق ہو، تو دونوں نقاط تقاطع کے لیے x کی قیمتیں حقیقی اور مختلف ہوں گی۔ ساتھ ہی مساوات (2) سے حاصل ہوئی y کی مطابق قیمتیں بھی حقیقی ہوں گی۔ اس لیے اس حالت میں خط دائرہ کو دو حقیقی اور مختلف نقطوں میں کاٹتا ہے (شکل میں خط مستقیم I دیکھیے)۔

پھر اگر $a^2(1+m^2)=c^2$ ہو، تو x کی دو قیمتیں برابر ہوں گی۔ ساتھ ہی مساوات (2) سے ہم دیکھتے ہیں کہ y کی دونوں مطابق قیمتیں بھی برابر ہوں گی۔ اس لیے اس حالت میں دائرہ اور خط مستقیم کے دونوں نقاطِ تقاطع منطبق ہوں گے اور خط مستقیم دائرہ کا خط مماس ہے، جیسا ہم آگے چل کر دیکھیں گے (شکل میں خط مستقیم II دیکھیے)۔

آخر میں اگر $a^2(1+m^2)<c^2$ تو x کی دونوں قیمتیں فرضی ہوں گی۔ لہذا دائرہ اور خط مستقیم کے نقاط تقاطع اس حالت میں فرضی ہیں۔ (شکل میں خط مستقیم III اور § 7·8 دیکھیے۔)

نوٹ : تینوں حالتوں کو ہم $c/\sqrt{(1+m^2)}<,=$ یا $>a$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ لیکن خط $y=mx+c$ کی مرکز سے دوری $c/\sqrt{(1+m^2)}$ ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی خط مستقیم کا دائرہ کو دو نقطوں میں کاٹنا، یا چھونا، یا بالکل نہ کاٹنا اس پر منحصر ہے کہ مرکز سے خط کی دوری نصف قطر سے کم ہے، یا اس کے برابر ہے، یا اس

سے زیادہ ہے۔ یہ جیومیٹری سے بھی ظاہر ہے۔

مثال 1 : دکھائیے کہ خط $3x+y=\lambda$ دائرہ $x^2+y^2-2x+4y-5=0$ کو صرف تبھی کاٹتا ہے جب λ کی قیمت 11 اور 9− کے درمیان رہتی ہے۔

خط اور دائرہ کی مساوات میں سے y کا اخراج کرنے پر ہمیں

$$x^2+(\lambda-3x)^2-2x+4(\lambda-3x)-5=0$$

یعنی

$$10x^2-2(3\lambda+7)x+(\lambda^2+4\lambda-5)=0$$

ملتا ہے۔

اس مساوات کے ریشے نقاط تقاطع کے x-محددات ہیں۔ یہ حقیقی تب ہوں گے جب

$$4(3\lambda+7)^2-4.10(\lambda^2+4\lambda-5)>0$$

یعنی

$$4(-\lambda^2+2\lambda+99)>0,$$

یا

$$(9+\lambda)(11-\lambda)>0$$

یہ شرط تبھی مطمئن ہوتی ہے جب λ ، 11 اور 9− کے درمیان ہو، کیوں کہ تب دونوں اجزائے ضربی مثبت ہوں گے۔ [اگر λ ، 11 سے زیادہ ہے یا 9− سے کم ہے، تو ایک جزو ضربی منفی ہوگا اور دوسرا مثبت اور شرط مطمئن نہیں ہو سکتی۔]

مثال 2 : دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے ان وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق نکالیے جو نقطہ (h, k) سے گزرتے ہیں۔

(h, k) سے گزرنے والے کسی بھی وتر کی مساوات حسب ذیل ہوگی :

$$y-k=\lambda(x-h), \quad \ldots \quad (1)$$

جہاں λ اختیاری ہے۔

وتر (1) کا وسطی نقطہ وہ نقطہ ہے جہاں مرکز سے وتر پر کھینچا گیا عمود وتر سے ملتا

ہے۔ اس عمود کی مساوات حسب ذیل ہے :

$$x = -\lambda y, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

جس میں مستقل رکن صفر ہے کیوں کہ خط مبدأ سے گزرتا ہے۔ (1) اور (2) سے λ کا اخراج کرنے پر ہمیں وسطی نقطہ کا طریق ملے گا۔ [دیکھیے § 5·5]

اب (1) اور (2) کی مخالف جوانب کو ضرب کرنے سے λ کٹ جاتا ہے۔ لہٰذا مطلوبہ طریق

$$x(x-h)+y(y-k)=0$$

ہے، جو بظاہر مبدأ اور دیے ہوئے نقطہ (h, k) کو ملانے والے خط کو قطر مان کر کھینچا گیا دائرہ ہے۔

7·8. فرضی نقطے :

ابتدائی حساب میں منفی اعداد کی کوئی اہمیت نہیں ہوتی، لیکن جیسا کہ طلبا کو اندازہ ہوگیا ہوگا کہ جیوں جیوں ہمارا علم ریاضی کا مطالعہ وسیع ہوتا جاتا ہے تیوں تیوں ہمیں ان کی شدّت سے ضرورت پڑتی ہے۔ اسی طرح ابتدائی حساب میں ہم رقم $\sqrt{(-1)}$ کے بغیر کام چلا سکتے ہیں، لیکن اگر ہم اسے ترک کر دیں تو اعلا ریاضی میں ترقی رک جائے گی۔

بدنصیبی ہے کہ وہ اعداد جن میں $\sqrt{(-1)}$ آتا ہے، فرضی اعداد کہلاتے ہیں، جس کی وجہ سے مبتدی یہ سمجھ لیتے ہیں کہ ایسے اعداد کا وجود ہی نہیں ہوتا۔ لیکن حقیقت یہ ہے کہ یہ اعداد اتنی ہی افادیت کے ہیں اور اتنی ہی کثرت سے خالص اور اطلاقی ریاضی کی کچھ شاخوں میں آتے ہیں جتنا کہ دوسری قسم کے اعداد۔

فرضی اعداد کا مطلب سمجھنے میں مبتدی کو اسی طرح کی دُشواری ہوتی ہے جیسی اسکولی بچّے کو اعداد کے ہجوم میں منفی اعداد کو شامل کرنے میں ہوتی ہے۔

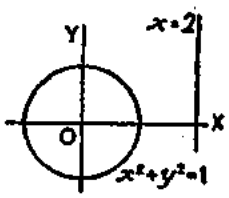
زمانہ قدیم کے نامور ریاضی داں بھی جبری مساوات کے رشتوں کو غلط ریشے

مانتے تھے۔

محدّد جیومیٹری میں فرضی اعداد کا استعمال کچھ زیادہ دشوار ہے۔ کیوں کہ محدّد جیومیٹری میں ہم شکل کھینچتے ہیں اور اگر نقطہ کے محدّدات فرضی ہیں تو ہم اسے شکل میں نہیں دکھا سکتے۔

تب بھی محدّد جیومیٹری میں ہم فرضی اعداد کا استعمال کرتے ہیں۔ جب بھی کسی سوال کے حل میں ایسا نقطہ آتا ہے جس کے کسی محدّد کی قیمت میں $\sqrt{(-1)}$ آتا ہو، تو ہم کہتے ہیں کہ نقطہ فرضی ہے۔

مثال کے طور پر مان لیا کہ ہمیں دائرہ $x^2+y^2=1$ اور خط مستقیم $x=2$ کے نقاط تقاطع کے محدّدات نکالنے ہیں، تو شکل سے ظاہر ہے کہ خط مستقیم دیے ہوئے دائرہ کو کاٹتا ہی نہیں۔ .... (A)



شکل 36

لیکن محدّد جیومیٹری میں ہم x اور y والی جبری مساوات کا مطلب لگاتے ہیں۔ اب ہم اگر عام تحلیلی طریقے سے مذکورہ بالا دائرہ اور خط مستقیم کے نقاط تقاطع نکالیں تو ہم دیکھتے ہیں کہ دو نقاط تقاطع ہیں جن کے محدّدات حسب ذیل ہیں:

$$x=2, y=\pm\sqrt{(-3)}$$

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ خط مستقیم $x=2$ دائرہ $x^2+y^2=1$ کو دو فرضی نقطوں $(2, i\sqrt{3})$ اور $(2, -i\sqrt{3})$ میں کاٹتا ہے۔ .... (B)

دو بیانوں، (A) اور (B) میں سے ریاضی داں بیان (B) کو زیادہ اچھا سمجھتا ہے۔ ایسا سمجھنے میں ایک بڑا فائدہ یہ ہے کہ وہ اپنے قضیوں کو ایسی شکل میں رکھ سکتا ہے جن کا کوئی استثنا نہ ہو۔

ہر ایک خط مستقیم ایک دائرہ سے دو نقطوں میں ملتا ہے۔

یہ نقطے کچھ حالتوں میں فرضی اور کچھ میں منطبق بھی ہو سکتے ہیں، لیکن فرضی

اور منطبق کے شامل کرنے پر قضیہ ہر ایک حالت میں صحیح ہو جاتا ہے۔ یعنی اس کا کوئی استثنا نہیں رہ جاتا۔ اس کے برعکس، اگر ہم فرضی نقطوں کو ترک کر دیں تو قضیہ حسب ذیل شکل اختیار کرے گا:

" خط مستقیم دائرہ سے کبھی دو نقطوں میں ملتی ہے، کبھی ایک میں اور کبھی کبھی کسی بھی نقطہ میں نہیں " قضیہ کی یہ شکل اتنی مفید نہیں جتنی اوپر دی گئی شکل ہے۔

طالب علم کو شروع ہی سے یہ سمجھ لینا چاہیے کہ وہ بغیر سوچے کوئی فرضی نقطہ لے کر یقین سے یہ نہیں کہہ سکتا کہ وہ نقطہ دائرہ پر واقع ہے، یا وہ نقطہ ایسے منحنیات کا نقطہ تقاطع ہے جو شکل میں ایک دوسرے کو کاٹتے ہوئے نظر نہیں آتے۔ مثال کے طور پر نقطہ $(2, i\sqrt{5})$ دائرہ $x^2+y^2=1$ پر واقع نہیں ہے، کیوں کہ جب ہم اس کے محددات مساوات کی بائیں جانب رکھتے ہیں تو ہمیں $4-5$ ملتا ہے جو دائیں جانب کے برابر نہیں ہے۔ اس لیے نقطہ $(2, i\sqrt{5})$ دائرہ $x^2+y^2=1$ پر واقع نہیں ہے، لیکن نقطہ $(2, i\sqrt{3})$ اس دائرہ پر ہے، اگرچہ دونوں نقطے فرضی ہیں۔

جب کبھی ہم یہ کہتے ہیں کہ دو منحنی ایک دوسرے کو اتنے فرضی نقطوں میں کاٹتے ہیں تو ہمارا مطلب صرف یہ ہوتا ہے کہ متعلقہ مساوات کو حل کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ اتنے نقاط تقاطع کے محددات میں $\sqrt{(-1)}$ آتا ہے۔

مشق 28

1. (i) خط $y=2x+1$ سے دائرہ $x^2+y^2=9$ کے ذریعے کٹے ہوئے وتر (chord) کی لمبائی اور اس کا وسطی نقطہ نکالیے۔

(ii) خط مستقیم $x-7y+50=0$ دائرہ $x^2+y^2=100$ سے ملتا ہے۔ کٹنے والے وتر کی لمبائی نکالیے اور دکھائیے کہ وتر کا عمودی ناصف دائرہ کے مرکز سے گزرتا ہے۔ [گوالیار 1959]

2. نقطہ $(1,-1)$ سے گزرنے والے اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے جو

دائرہ $x^2+y^2-6x+4y-3=0$ سے $4\sqrt{3}$ لمبائی کا وتر کاٹتا ہے۔

3. c کی قیمت نکالیے جس سے دائرہ $x^2+y^2=3$ کے وتر $x-2y=c$ کی لمبائی 2 ہو۔

4. دائرہ $x^2+y^2-2x-6y=10$ کے ان وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق نکالیے جو مبدأ سے گزرتے ہیں۔

5. دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے اس وتر کی مساوات بتائیے جس کا وسطی نقطہ (h, k) ہے۔ [علی گڑھ 1958]

6. دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے ان وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق نکالیے جو خط $y=mx$ کے متوازی ہیں۔ [کشمیر 1965]

7. دکھائیے کہ دائرہ کے ان وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ایک دائرہ ہے جو مرکز سے $b(<a)$ کی دوری پر ہے۔

8. ایک دائرہ x-محور کو چھوتا ہے اور y-محور سے مستقل لمبائی $2l$ کاٹتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ اس کے مرکز کا طریق $y^2-x^2=l^2$ ہے۔
[کشمیر 1964]

9. دکھائیے کہ دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے ذریعے خط $y=mx+c$ سے کٹے ہوئے وتر کی لمبائی اور اس کا وسطی نقطہ بالترتیب حسب ذیل ہیں :

$$\left(-\frac{mc}{1+m^2}, \frac{c}{1+m^2}\right) \quad \text{اور} \quad 2\sqrt{\left(a^2-\frac{c^2}{1+m^2}\right)}$$

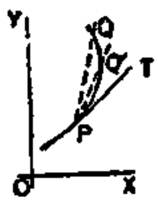
10. دکھائیے کہ خط $3x-4y=\lambda$ دائرہ $x^2+y^2-4x-8y-5=0$ کو حقیقی نقطوں میں تب کاٹے گا جب λ کی قیمت -35 اور 15 کے درمیان ہوگی۔
[دہلی پری انجینیرنگ 1961]

باب 8

دائروں کے مماسی خطوط

8.1 . خط مماس :

مان لیا ایک منحنی پر P کوئی دیا ہوا نقطہ ہے اور Q اس پر کوئی دوسرا نقطہ ہے۔ تو جیسے جیسے نقطہ Q نقطہ P کی طرف بڑھتا ہے ویسے ویسے خط مستقیم PQ عام طور پر ایک مقرر خط مستقیم (شکل میں یہ PT ہے) کی طرف بڑھتا ہے۔ جس خط مستقیم کی طرف منحنی کا وتر (chord) PQ بڑھتا ہے جب Q ، P کی طرف بڑھتا ہے، وہ خط مستقیم P پر منحنی کا خط مماس کہلاتا ہے۔



شکل 37

فقرہ 'نقطہ Q نقطہ P کی طرف بڑھتا ہے' کے معنی ہیں کہ PQ بہت چھوٹا ہوتا جارہا ہے اور بالآخر ہر ایک چنی ہوئی چھوٹی لمبائی سے چھوٹا ہو جائے گا۔ اندازاً ہم کہہ سکتے ہیں کہ نقطہ Q نقطہ P سے منطبق ہونے جارہا ہے، اس لیے اکثر کہا جاتا ہے کہ خط مماس منحنی سے دو منطبق نقطوں پر ملتا ہے۔ اکثر علامت → فقرہ 'کی طرف بڑھتا ہے' کے لیے استعمال کی جاتی ہے۔

8.2 . خطِ مماس کی مساوات :

دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے کسی نقطہ پر خط مماس کی مساوات معلوم کرنا۔

مان لیا دائرہ $x^2+y^2=a^2$ پر دیے ہوئے نقطہ P کے محددات (x_1, y_1) ہیں

تو

$$x_1^2+y_1^2=a^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

دائرہ پر کوئی دوسرا نقطہ Q (x_2, y_2) لیجیے، تو

$$x_2^2+y_2^2=a^2 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

اب PQ کی مساوات حسب ذیل ہے :

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1). \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

[ہم سیدھے (3) سے خط مماس کی مساوات حاصل نہیں کر سکتے، کیوں کہ جب Q ، P کی طرف بڑھتا ہے تب $x_2 \to x_1$ اور $y_2 \to y_1$ ۔ اس لیے (3) میں کسر $(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$ کے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں صفر کی طرف بڑھتے ہیں اور ہمیں 0/0 ملتا ہے جو بے معنی ہے۔ اس لیے ہم مساوات (1) اور (2) کا استعمال کر کے کسر کو ایک معادل کسر میں تبدیل کرتے ہیں جو Q کے P کی طرف بڑھنے پر 0/0 کی شکل اختیار نہ کرے۔]

(1) میں سے (2) کو گھٹائیے اور ایک رکن دوسری طرف لے جائیے ،

تب
$$y_1^2-y_2^2=x_2^2-x_1^2,$$

یعنی
$$(y_1-y_2)(y_1+y_2)=(x_2-x_1)(x_2+x_1),$$

اس لیے

$$(y_2-y_1)/(x_2-x_1)=-(x_2+x_1)/(y_2+y_1) \ldots . (4)$$

لہذا جب Q ، P کی طرف بڑھتا ہے، یعنی $x_2 \to x_1$ اور $y_2 \to y_1$ ،

تب
$$(y_2-y_1)/(x_2-x_1) \to -2x_1/2y_1,$$

اور مساوات (3) حسب ذیل مساوات کی طرف بڑھتی ہے :

$$y-y_1=-(x_1/y_1)(x-x_1),$$

یعنی
$$xx_1-x_1^2+yy_1-y_1^2=0,$$

یا

بذریعہ (1) $xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2=a^2$.

اس طرح دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے نقطہ (x_1, y_1) پر خط مماس کی مساوات یہ ہے :

$$xx_1+yy_1=a^2$$

دوسرا طریقہ : ہم خطِ مماس کی مساوات اس صفت کا استعمال کرکے زیادہ آسانی سے حاصل کر سکتے ہیں کہ دائرہ میں خط مماس، نقطہ تماس سے گزرنے والے نصف قطر پر عمود ہوتا ہے۔ لیکن یہ طریقہ دوسرے منحنیات میں قابلِ اطلاق نہیں۔

مان لیا دائرہ کی مساوات

$$x^2+y^2=a^2 \quad \ldots \quad (1)$$

ہے اور (x_1, y_1) اس پر ایک دیئے ہوئے نقطہ P کے محدّدات ہیں۔ تو

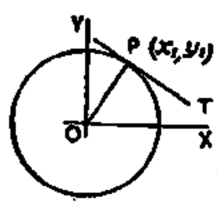
$$x_1^2+y_1^2=a^2 \quad \ldots \quad (2)$$

اب دائرہ کے مرکز کے محدّدات (0, 0) ہیں۔ لہذا OP کا m

$(y_1-0)/(x_1-0)$. یعنی y_1/x_1 ہے۔

اس لیے OP پر عمود خط کا $m = -x_1/y_1$

لہذا نقطہ P پر OP کے عمود کی مساوات حسب ذیل ہے :



شکل 38

$$(y-y_1)=(-x_1/y_1)(x-x_1)$$

یعنی

$$y_1(y-y_1)+x_1(x-x_1)=0$$

یا

بذریعہ (2) $xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2=a^2$

نوٹ : کسر $(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$ کو معادل کسر (4) میں تبدیل کرکے حد کی

جانب بڑھنے پر $x_2 \to x_1$ یعنی نقطہ P (x_1, y_1) پر تفرقی ضربیہ dy/dx نکالنے پر اور تفرقی احصار کے ایک نتیجے کا استعمال کرتے پر، نقطہ P پر خط مماس کی مساوات فوراً لکھی جاسکتی ہے جو حسب ذیل ہے :

$$y-y_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_1(x-x_1) \qquad \ldots (3)$$

جہاں $(dy/dx)_1$ کا مطلب ہے، نقطہ (x_1, y_1) پر dy/dx کی قیمت۔

یہ فارمولا تمام منحنیات کے لیے قابل اطلاق ہے اور حسب ذیل دفعہ میں اس کا استعمال ہے، جہاں، اس دفعہ کے طریقے بھی بے شک استعمال کیے جاسکتے ہیں۔

8.3 . عام دائرہ کا خطِ مماس :

عام مساوات کے ذریعے دیے ہوئے دائرہ کے کسی نقطہ پر خط مماس کی مساوات نکالنا۔

مان لیا دائرہ کی مساوات

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \qquad \ldots (1)$$

ہے اور (x_1, y_1) اس پر کوئی دیا ہوا نقطہ P ہے۔

اب چونکہ P دائرہ (1) پر واقع ہے، اس لیے

$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0 \qquad \ldots (2)$$

x کے لحاظ سے (1) کا تفرقی ضربیہ نکالنے پر

$$2x+2y\, dy/dx+2g+2f\, dy/dx=0$$

یعنی

$$\frac{dy}{dx}(y+f) = -(x+g)$$

اس طرح (x_1, y_1) پر dy/dx کی قیمت حسب ذیل ہے :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = -\frac{x_1+g}{y_1+f}$$

لہٰذا نقطہ (x_1, y_1) پر دائرہ (1) کا خط مماس حسب ذیل ہے :

$$y - y_1 = -\frac{x_1+g}{y_1+f}(x - x_1)$$

یعنی

$$(x_1+g)(x-x_1)+(y_1+f)(y-y_1)=0$$

x اور y کے ارکان علاحدہ کرنے پر ،

$$(x_1+g)x+(y_1+f)y-(x_1^2+gx_1+y_1^2+fy_1)=0$$

یا

بذریعہ (2) ؛ $(x_1+g)x+(y_1+f)y+(gx_1+fy_1+c)=0$

اس طرح دائرہ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ کے نقطہ (x_1, y_1) پر خط مماس کی مساوات حسب ذیل ہے :

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$$

ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ (x_1, y_1) پر خط مماس کی مساوات دائرہ کی مساوات میں x^2 کی جگہ xx_1 ، y^2 کی جگہ yy_1 ، $2x$ کی جگہ $x+x_1$ اور $2y$ کی جگہ $y+y_1$ لکھنے سے حاصل ہو سکتی ہے۔

8.4 . m کی رکنیت میں خطِ مماس :

دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے خط مماس کی مساوات اس کے ڈھال کی رکنیت میں نکالنا۔ مان لیا دائرہ

$$x^2+y^2=a^2 \quad \ldots \quad (1)$$

کے خط مماس کی مساوات

$$y=mx+c \quad \ldots \quad (2)$$

ہے ، تو ہمیں c کی قیمت m کی رکنیت میں اس شرط سے نکالنی ہے کہ خط (2) دائرہ (1) کا خط مماس ہے۔

اب (1) اور (2) کے نقاط تقاطع کے طول اس مساوات کے ذریعے ملتے ہیں جو ان مساوات سے y کا اخراج کرنے پر حاصل ہوتی ہے۔ یہ مساوات حسب ذیل ہے :

$$x^2+(mx+c)^2=a^2,$$

یعنی

$$(1+m^2)x^2+2mcx+(c^2-a^2)=0 \quad \cdots (3)$$

لیکن خط (2) کے دائرہ (1) کو چھونے کی شرط یہ ہے کہ مساوات (3) کے ریشے منطبق ہوں۔ اس لیے

$$m^2c^2-(1+m^2)(c^2-a^2)=0,$$

یعنی

$$m^2a^2-c^2+a^2=0$$

جس سے

$$c=a\sqrt{(1+m^2)}$$

جہاں جذر کی کوئی بھی علامت ہو سکتی ہے۔

c کی یہ قیمت (2) میں رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ خط مستقیم

$$y=mx+a\sqrt{(1+m^2)}$$

دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کا خط مماس ہے، m کی قیمت چاہے کچھ بھی ہو اور جذر کی علامت چاہے مثبت ہو یا منفی۔

8·41 . شرطِ مماس :

اوپر کے نتیجے سے ظاہر ہے کہ خط مستقیم $y=mx+c$ کے دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کو چھونے کی شرط یہ ہے کہ

$$c=a\sqrt{(1+m^2)}$$

ضمنی نتیجہ : مان لیا $y=mx+c$ کسی دیے ہوئے خط مستقیم کی مساوات ہے۔

تو اس خط مستقیم کے متوازی دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے خطوط مماس دو ہوں گے اور ان کی مساوات حسب ذیل ہیں :

$$y=mx\pm a\sqrt{(1+m^2)}$$

مثال 1 : دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے خطوط مماس پر نقطہ $(b, 0)$ سے کھینچے گئے عمودوں کے پائے کا طریق نکالیے۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1959]

دائرہ کا کوئی خط مماس

$$y=mx+a\sqrt{(1+m^2)} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

ہے، اور نقطہ $(b, 0)$ سے اس پر کھینچے گئے عمود کی مساوات

$$my+x-b=0 \quad . \; . \; . \quad (2)$$

ہے۔ اب پائے عمود (1) اور (2) کا نقطہ تقاطع ہے اور اس کا طریق ان مساوات میں سے m کو خارج کرنے سے حاصل ہوسکتا ہے۔ لہذا، (2) سے m کی قیمت نکال کر (1) میں رکھنے پر مطلوبہ طریق حسب ذیل شکل میں نکلتا ہے :

$$\{y-x(b-x)/y\}^2=a^2\{1+(b-x)^2/y^2\}$$

یعنی

$$(y^2+x^2-bx)^2=a^2\{y^2+(x-b)^2\}$$

مثال 2 : دائرہ $x^2+y^2-8x-10y-8=0$ کے وہ خطوط مماس نکالیے جو خط $5x-12y=2$ کے متوازی ہیں۔ [گوالیار 1960]

دیے ہوئے خط کے متوازی کسی بھی خط مستقیم کی مساوات

$$5x-12y+\lambda=0 \quad . \; . \; . \quad (1)$$

ہے۔ دائرہ کا مرکز $(4, 5)$ ہے اور نصف قطر

$$\sqrt{\{4^2+5^2-(-8)\}} \text{ یعنی } 7$$

ہے۔ اب خط (1) دائرہ کا خط مماس تب ہوگا جب مرکز سے اس کی دوری نصف قطر کے برابر ہوگی، یعنی جب

$$(5.4-12.5+\lambda)/\sqrt{(5^2+12^2)}=\pm 7$$

جس سے $\lambda = 131$ یا -51

لہٰذا مطلوبہ خطوط مماس حسب ذیل ہیں :

$$5x-12y+131=0 \quad \text{اور} \quad 5x-12y=51$$

مثال 3 : خط $lx+my+n=0$ کے دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کو چھونے کی شرط نکالیے۔ نقطۂ تماس بھی معلوم کیجیے۔ [علی گڑھ 1958]

مان لیا دیا ہوا خط دیے ہوئے دائرہ کو (x_1, y_1) پر چھوتا ہے ، تو

$$x_1^2+y_1^2=a^2, \qquad \ldots \quad (1)$$

اور دی ہوئی مساوات

$$lx+my+n=0 \qquad \ldots \quad (2)$$

کو وہی ہونا چاہیے جو (x_1, y_1) پر کھینچے ہوئے خط مماس کی مساوات ہے ، یعنی (2) اور حسب ذیل مساوات کو ایک ہی ہونا چاہیے

$$xx_1+yy_1-a^2=0 \qquad \ldots \quad (3)$$

مساوات (2) اور (3) کا موازنہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$x_1/l=y_1/m=-a^2/n,$$

جس سے ، نقطۂ تماس (x_1, y_1) حسب ذیل نقطہ ہے :

$$(-a^2l/n, -a^2m/n)$$

x_1 ، y_1 کی ان قیمتوں کو (1) میں رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$a^4l^2/n^2+a^4m^2/n^2=a^2,$$

یعنی

$$a^2(l^2+m^2)=n^2,$$

یہی مطلوبہ شرط ہے ۔

8.5 عماد : تعریف : منحنی کے کسی نقطہ پر عماد وہ خط مستقیم ہے جو اس نقطہ سے گزرے اور منحنی کے اس نقطہ پر کھینچے گئے خط مماس پر عمود ہو۔

کسی دائرہ کے دیے ہوئے نقطہ پر عماد کی مساوات نکالنا۔

(i) مان لیا دائرہ کی مساوات

$$x^2+y^2=a^2,$$

ہے اور مان لیا (x_1, y_1) اس پر دیا ہوا کوئی نقطہ ہے۔

تو (x_1, y_1) پر دائرہ کا خط مماس

$$xx_1+yy_1=a^2$$

ہے۔ اس پر عمود کسی خط مستقیم کی مساوات حسب ذیل شکل کی ہوگی :

$$xy_1-yx_1=\lambda$$

λ کو ایسا چنیے کہ عمود نقطہ (x_1, y_1) سے گزرے، تو

$$\lambda=x_1y_1-y_1x_1=0$$

لہذا دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے نقطہ (x_1, y_1) پر عماد حسب ذیل ہے :

$$yx_1-xy_1=0$$

(ii) اگر دائرہ کی مساوات

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0,$$

ہو، تو اسی طرح یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ اس کے نقطہ (x_1, y_1) پر عماد حسب ذیل ہے۔

$$y(x_1+g)-x(y_1+f)+fx_1-gy_1=0$$

نوٹ : عماد کی مساوات سے ظاہر ہے کہ دائرہ کے عماد مرکز سے گزرتے ہیں، یعنی دائرہ کے عماد نصف قطر ہیں جو جیومیٹری کے ذریعے ظاہر ہے۔

مشق 29

1. حسب ذیل دائرہ کے خط مماس اور عماد کی مساوات نکالیے :

(i) $x^2+y^2-2x-4y+3=0$ کے نقطہ $(2, 3)$ پر۔ [الہٰ آباد 53]

(ii) $3x^2+3y^2-4x-6y=0$ کے مبدأ پر۔ [پلانی فار ۔ 65]

2. دائرہ $x^2+y^2=169$ کے نقطہ $(5, 12)$ اور $(12, -5)$ پر خطوط مماس کی مساوات معلوم کیجیے۔ ثابت کیجیے کہ یہ خطوط مماس ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر کاٹتے ہیں اور ان کا نقطہ تقاطع معلوم کیجیے۔ [الٰہ آباد 1952]

3. دائرہ $2x^2+2y^2=5$ کے ان خطوط مماس کی مساوات معلوم کیجیے جو $y=2x$ پر عمود ہیں۔

4. دائرہ $x^2+y^2-6x+4y=12,$ کے ان خطوط مماس کی مساوات معلوم کیجیے جو خط $4x+3y+5=0$ کے متوازی ہیں۔ [رڑکی 1966]

5. دائرہ $x^2+y^2=25$ کے ان خطوط مماس کی مساوات معلوم کیجیے جو x-محور سے $30°$ کے زاویہ پر جھکے ہیں۔ [راجپوتانہ 1952]

6. دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے خط مماس PT کی مساوات حسب ذیل شکل میں نکالیے:

(i) PT خط $y=mx+c$ پر عمود ہے۔

(ii) PT محاور سے ایسا مثلث بناتا ہے جس کا رقبہ a^2 ہے۔

(iii) PT نقطہ $(a, 2a)$ سے گزرتا ہے۔

7. دکھائیے کہ خط مستقیم $lx+my+n=0$ کے دائرہ $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ کو چھو سکنے کی شرط حسب ذیل ہے:

$$(hl+km+n)^2=a^2(l^2+m^2)$$ [الٰہ آباد 1955]

8. اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جس کا مرکز (α, β) ہے اور جو مبدأ سے گزرتا ہے اور ثابت کیجیے کہ مبدأ پر اس کے خط مماس کی مساوات $\alpha x+\beta y=0$ ہے۔

[دہلی پری انجینیرنگ 1957]

9. اگر خط $lx+my=1$ دائرہ $x^2+y^2=a^2,$ کو چھوئے، تو ثابت کیجیے کہ نقطہ (l, m) ایک دائرہ پر واقع ہے۔

10. c کی ایسی قیمت نکالیے کہ خط $y=mx+c$ دائرہ $x^2+y^2=4y$ کا خط

مماس m کی سبھی قیمتوں کے لیے ہو۔ [رڑکی 1965]

11. اس دائرہ کی مساوات بتائیے جس کے ایک قطر کے سرے مبدأ اور نقطہ $(2, -4)$ ہیں:
اس دائرہ کے ان خطوط مماس کی مساوات بھی معلوم کیجیے جو اس قطر کے متوازی ہیں۔
[جبل پور 1962]

12. دائرہ $x^2+y^2-22x-4y+25=0$ کے ان خطوط مماس کی مساوات نکالیے جو خط $5x+12y+8=0$ پر عمود ہیں۔ [الہ آباد 1954]

13. ثابت کیجیے کہ a کی قیمت چاہے کچھ بھی ہو، خطوط

$$x \sin a - y \cos a = a \quad \text{اور} \quad x \cos a + y \sin a = a$$

دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے خطوط مماس ہیں۔

لہذا ان نقطوں کا طریق معلوم کیجیے جن سے دائرہ $x^2+y^2=a^2$ پر ایک دوسرے کے عمود خطوط مماس کھینچے جا سکتے ہیں۔

14. ایک متغیر دائرہ کے مرکز کا طریق نکالیے جو ایک معیّنہ خطوط مستقیم اور ایک معیّنہ دائرہ کو چھوتا ہے۔ [رڑکی 1955]

[اشارہ : $x^2+y^2=a^2$ کو معینہ دائرہ اور $y+b=0$ کو معینہ خط مانیے۔ اگر (x_1, y_1) مرکز کا کوئی مقام ہے، تو $y_1+b=\sqrt{(x_1^2+y_1^2)}\pm a$]

8·6. ایک نقطہ سے خطوطِ مماس :

مان لیا $x^2+y^2=a^2$ ایک دیا ہوا دائرہ ہے اور (x_1, y_1) ایک دیا ہوا نقطہ۔
دائرہ کا کوئی بھی خط مماس

$$y=mx+a\sqrt{(1+m^2)} \quad \ldots \quad (1)$$

ہے۔ یہ خط مماس نقطہ (x_1, y_1) سے تب گزرے گا جب

$$y_1=mx_1+a\sqrt{(1+m^2)},$$

یا

$$(y_1-mx_1)^2=a^2(1+m^2),$$

یعنی

$$m^2(x_1^2-a^2)-2mx_1y_1+y_1^2-a^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

m میں یہ مساوات ان خطوط مماس کے لیے m کی قیمتیں دیتی ہے جو (x_1, y_1) سے گزرتے ہیں اور چونکہ یہ دو درجی ہے اس لیے اس کے دو ریشے ہیں۔

اب m کی ہر قیمت کے لیے نقطہ (x_1, y_1) سے گزرنے والا ایک خط مستقیم ہے۔ لہٰذا (x_1, y_1) سے دائرہ پر دو خطوط مماس کھینچے جا سکتے ہیں۔

(i) اگر مساوات (1) کے ریشے حقیقی اور جدا جدا ہیں تو (x_1, y_1) سے دائرہ کے دو حقیقی اور جدا جدا خطوط مماس کھینچے جا سکتے ہیں۔ ریشوں کے حقیقی ہونے کی شرط حسب ذیل ہے:

$$x_1^2y_1^2-(x_1^2-a^2)(y_1^2-a^2)>0,$$

یعنی

$$a^2(x_1^2+y_1^2-a^2)>0,$$

یا

$$x_1^2+y_1^2>a^2,$$

جس کا مطلب ہے کہ (x_1, y_1) دائرہ کے باہر ہے۔

(ii) اگر ریشے منطبق ہیں، تو دو منطبق خطوط مماس ہوں گے، اور جس کے لیے شرط حسب ذیل ہے:

$$x_1^2+y_1^2=a^2,$$

جس کا مطلب ہے کہ (x_1, y_1) دائرہ پر واقع ہے۔

(iii) اگر ریشے فرضی ہیں، تو دو فرضی خطوط مماس ہوں گے۔ جس کے لیے شرط حسب ذیل ہے:

$$x_1^2+y_1^2<a^2,$$

جس کا مطلب ہے کہ (x_1, y_1) دائرہ کے اندر ہے۔

لہٰذا ایک نقطہ سے دائرہ پر دو خطوط مماس کھینچے جا سکتے ہیں اور ان کا حقیقی اور جدا جدا یا منطبق یا فرضی ہونا اس بات پر منحصر ہے کہ نقطہ دائرہ کے برابر ہے، دائرہ پر ہے یا دائرہ کے اندر ہے۔

یہ جیومیٹری کے ذریعے بھی ظاہر ہے۔

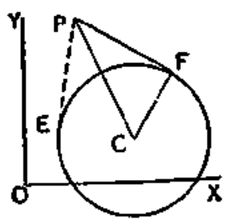
8.7 . خطِ مماس کی لمبائی :

مان لیا دائرہ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

ہے اور (x_1, y_1) اس کے باہر کوئی نقطہ ہے۔ مان لیا P سے دائرہ کا ایک خط مماس PF ہے اور F اس کا نقطۂ تماس ہے۔

تو PF کو خط مماس کی لمبائی کہتے ہیں اور ہم اسے x_1, y_1, g, f, c کی رکنیت میں نکالیں گے۔



شکل 39

دائرہ کا مرکز $C(-g, -f)$ ہے اور

$CF^2 = (\text{نصف قطر})^2 = g^2+f^2-c$

پھر $\triangle CFP$ کا $\angle F$ زاویہ قائمہ ہے۔

اس لیے

$$PF^2 = PC^2 - CF^2$$

$$= \{x_1-(-g)\}^2+\{y_1-(-f)\}^2-(g^2+f^2-c)$$

$$= (x_1^2+2gx_1+g^2)+(y_1^2+2fy_1+f^2)-(g^2+f^2-c)$$

لہٰذا نقطہ (x_1, y_1) سے دائرہ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ پر کھینچے گئے خط مماس کا مربع حسب ذیل ہے :

$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c$$

نوٹ : ہم دیکھتے ہیں کہ اگر مساوات اس طرح لکھی گئی ہو کہ دائیں جانب صفر

ہو اور x^2 اور y^2 کے ضریبے 1 ہوں تو نقطہ (x_1, y_1) سے کھینچے گئے خطوط مماس کی لمبائی کا مربع دائرہ کی مساوات کی بائیں جانب x کی جگہ x_1 اور y کی جگہ y_1 رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اگر دائرہ کی مساوات

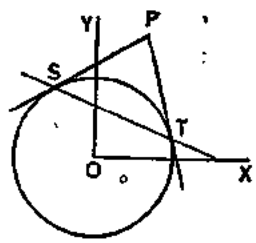
$$ax^2+ay^2+2gx+2fy+c=0,$$

ہو تو پہلے a سے تقسیم کر دینا چاہیے، تب نقطہ کے محددات کا بدل کرنا چاہیے۔

8.8. وتر تماس : (Chord of contact)

تعریف : اگر ایک خارجی نقطہ سے دائرہ کے دو خطوط مماس کھینچے جائیں تو نقاط تماس کو ملانے والا خط اس نقطہ سے کھینچے گئے خطوط مماس کا وتر تماس کہلاتا ہے۔

وتر تماس کی مساوات نکالنا : مان لیا دائرہ کی مساوات $x^2+y^2=a^2$ ہے اور مان لیا (x_1, y_1) ایک خارجی نقطہ P ہے۔



شکل 40

مان لیا P سے کھینچے گئے خطوط مماس PS اور PT کے نقاط تماس S اور T بالترتیب (p_1, q_1) اور (p_2, q_2) ہیں۔ تو PT وتر تماس ہے۔

(p_1, q_1) پر کھینچے گئے خط مماس SP کی مساوات یہ ہے :

$$p_1x+q_1y=a^2$$

یہ خط نقطہ $(x_1 y_1)$ سے گزرتا ہے، اس لیے

$$p_1x_1+q_1y_1=a^2 \quad . \; . \; . \quad (1)$$

اسی طرح T پر کھینچے گئے خط مماس پر غور کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$p_2x_1+q_2y_1=a^2 \quad . \; . \; . \quad (2)$$

مساوات (1) اور (2) سے ظاہر ہے کہ نقطہ (p_1, q_1) اور (p_2, q_2) یعنی S اور T دونوں، طریق

$$xx_1+yy_1=a^2. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

پر واقع ہیں۔ لیکن یہ مساوات خطی ہونے کی وجہ سے ایک خط مستقیم ظاہر کرتی ہے۔ اس لیے یہ مساوات خط مستقیم ST کو ظاہر کرتی ہے۔

لہذا نقطہ (x_1, y_1) سے دائرہ $x^2+y^2=a^2$ پر کھینچے گئے خطوط مماس کے وتر تماس کی مساوات حسب ذیل ہے:

$$\mathbf{xx_1+yy_1=a^2}.$$

نوٹ 1 : اگر نقطہ (x_1, y_1) دائرہ کے اندر ہو تو دونوں خطوط مماس فرضی ہوں گے، تب بھی اوپر لکھے فارمولے سے وتر تماس کی مساوات حقیقی نکلتی ہے۔ اس میں تعجب کی کوئی بات نہیں، کیوں کہ فرضی نقاط تماس حقیقی منحنی خطوط پر واقع ہو سکتے ہیں (§ 7·8 دیکھیے)۔

نوٹ 2 : اگر دائرہ کی مساوات $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0,$ ہو، تو ہم اسی طرح (§ 8·3 کے نتیجے کا استعمال کر کے) دکھا سکتے ہیں کہ نقطہ (x_1, y_1) سے کھینچے گئے خطوط مماس کے وتر تماس کی مساوات یہ ہوگی:

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$$

8·81. متبادل طریقہ :

مان لیا نقطہ P (x_1, y_1) سے دائرہ $x^2+y^2=a^2$ پر کھینچے گئے خطوط مماس کے نقاطِ تماس S (p_1, q_1) اور T (p_2, q_2) ہیں۔ تو ST کی مساوات

$$y-q_1=\{(q_2-q_1)/(p_2-p_1)\}(x-p_2) \qquad (1)$$

ہوگی۔ ہمیں اسے ایسی شکل میں بدلنا ہے جس میں x_1 اور y_1 ہوں لیکن p_1, q_1، p_2, q_2 نہ ہوں۔

اب S (p_1, q_1) پر خط مماس کی مساوات

$$p_1x+q_1y=a^2$$

ہے۔ اور چونکہ نقطہ (x_1, y_1) اس پر واقع ہے۔ اس لیے

$$p_1x_1+q_1y_1=a^2 \quad . \quad . \quad (2)$$

اسی طرح

$$p_2x_1+q_2y_1=a^2 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

(2) کو (3) میں سے گھٹانے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$(p_2-p_1)x_1+(q_2-q_1)y_1=0$$

اس سے $(q_2-q_1)/(p_2-p_1)$ کی قیمت نکال کر (1) میں رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ ST کی مساوات حسب ذیل ہے :

$$y-q_2=-\frac{x_1}{y_1}(x-p_2)$$

یعنی

$$yy_1+xx_1=p_2x_1+q_2y_1,$$

یا (3) سے

$$xx_1+yy_1=a^2$$

مثال : نقطہ (4, 5) سے دائرہ $x^2+y^2-3x-4y+3=0$ پر خطوط مماس کھینچے جا سکتے ہیں۔ ان خطوط مماس اور وتر تماس (chord of contact) سے بنے مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1960]

مان لیا دیا ہوا نقطہ P ہے، AB وتر تماس ہے اور P سے AB پر عمود PM ہے (§ 8·9 کی شکل دیکھیے)۔ تو § 8·7 سے

$$PB^2=4^2+5^2-3\times4-4\times5+3=12$$

وتر تماس AB کی مساوات حسب ذیل ہے :

$$4x+5y-3(x+4)-2(y+5)+3=0,$$

یعنی

$$\tfrac{5}{2}x+3y-13=0$$

لہٰذا P سے AB پر ڈالے گئے عمود کا مربع، یعنی

$$PM^2=(\tfrac{5}{2}\times 4+3\times 5-13)^2/((\tfrac{5}{2})^2+9)=\tfrac{576}{61}$$

$$\therefore \quad MB=\sqrt{(PB^2-PM^2)}=\sqrt{(12-\tfrac{576}{61})}=\sqrt{\tfrac{156}{61}},$$

اس لیے

$\triangle PAB=PM.MB=\sqrt{\tfrac{576}{61}}\times\sqrt{\tfrac{156}{61}}=\tfrac{48}{61}\sqrt{39}$ کا رقبہ

بصورتِ دیگر، اگر دائرہ کا مرکز C ہو، تو

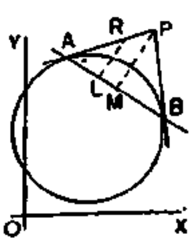
$$\triangle APB=AM.MP=(AC.AP/CP)(AP^2/CP)$$

$$=AC.AP^3/CP^2=$$ وغیرہ

8.9. ایک نقطہ سے خطوطِ مماس کا جوڑا:

مان لیا دائرہ کی مساوات

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$



شکل 41

ہے اور P (x_1, y_1) کوئی خارجی نقطہ ہے۔ تو P سے کھینچے گئے خطوط مماس کے وترِ تماس AB کی مساوات

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0 . . . (2)$$

ہے۔

مان لیا کسی ایک خط مماس PA پر کوئی نقطہ $R(h, k)$ ہے، اور مان لیا R اور P سے AB پر عمود بالترتیب RL اور PM ہے۔

تو مشابہ مثلثوں ARL اور APM سے

$$AR/AP=RL/PM$$

اس کا مربع کرکے اور AR^2 وغیرہ کی قیمتیں رکھ کر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{h^2+k^2+2gh+2fk+c}{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}=\left\{\frac{hx_1+ky_1+g(h+x_1)+f(k+y_1)+c}{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}\right\}^2$$

اس سے ظاہر ہے کہ (h, k)

$$(x^2+y^2+2gx+2fy+c)(x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c)$$
$$=\{xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c\}^2 \quad . . . \quad (3)$$

پر واقع ہے۔

ظاہر ہے، اگر ہم (h, k) کو PB پر لیتے تب بھی یہی مساوات حاصل ہوتی۔

لہٰذا (3) دو درجی ہونے کی وجہ سے، PA اور PB دونوں کی مساوات ظاہر کرتی ہے۔

(1) اور (2) کی بائیں جوانب کو S اور T سے اور عبارت

$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c_1$ کو S_1 سے ظاہر کرکے، ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ (x_1, y_1)

سے دائرہ $S=0$ پر کھینچے گئے خطوط مماس کے جوڑے کی مساوات حسبِ ذیل ہے:

$$SS_1=T^2$$

مشق 30

وترِ تماس کی مساوات، لمبائی اور وسطی نقطہ معلوم کیجیے جب

1. نقطہ $(4, -3)$ سے دائرہ $x^2+y^2=9$ پر خطوط مماس کھینچے جاتے ہیں۔

2. نقطہ $(3, 1)$ سے دائرہ $2x^2+2y^2-3x+5y=0$ پر خطوط مماس کھینچے جاتے ہیں۔ [گوالیار' 58]

3. $(a, -b)$ سے دائرہ $(x+a)^2+y^2-2by=b^2$ پر خطوط مماس کھینچے جاتے ہیں۔ [اجمیر 1957]

4. نقطہ $(4, 6)$ سے دائرہ $x^2+y^2=5$ پر خطوط مماس کھینچے جاتے ہیں۔ ان خطوط مماس اور ان کے وترِ تماس سے بنے مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے۔

5. نقطہ (x_1, y_1) سے دائرہ $x^2+y^2=a^2$ پر خطوط مماس کے وترِ تماس کے مرکز پر زاویہ قائمہ بنانے کی شرط نکالیے۔ [راجپوتانہ 1955]

6. نقطہ P سے دائروں $3x^2+3y^2=4$ اور $2x^2+2y^2+6x-8y+3=0$, پر کھینچے گئے خطوط مماس PT اور PT' ایسے ہیں کہ $PT : PT'=3 : 2$

P کا طریق معلوم کیجیے۔ طریق کی مساوات کیا ظاہر کرتی ہے۔ [جبل پور 1960]

7. اگر نقطہ (f, g) سے دائرہ $x^2+y^2=6$ پر کھینچے گئے خط ماس کی لمبائی اسی نقطہ سے دائرہ $x^2+y^2+3x+3y=0$ پر کھینچے گئے خط ماس کی دوگنی ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$f^2+g^2+4f+4g+2=0$$

8. دائرہ $x^2+y^2=a^2$ پر نقطہ (h, k) سے خطوط ماس کھینچے جاتے ہیں۔ دکھائیے کہ ان سے اور ان کے وتر تماس سے بنے مثلث کا رقبہ $a(x_1^2+y_1^2-a^2)^{3/2}/(x_1^2+y_1^2)$ ہے۔
[الہ آباد' 60]

9. دکھائیے کہ مبدأ سے دائرہ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ پر کھینچے گئے خطوط ماس کی مساوات حسب ذیل ہے :

$$(gx+fy)^2=c(x^2+y^2)$$

[علی گڑھ 1958]

10. نقطہ $(2, 2)$ سے دائرہ $x^2+y^2=1$ پر کھینچے گئے خطوط ماس کی مساوات معلوم کیجیے۔
[راجپوتانہ 1951]

11. ثابت کیجیے کہ ایسے نقطہ کا طریق جس سے دو ہم مرکز دائروں تک کھینچے گئے خطوط ماس ایک مستقل نسبت میں ہوتے ہیں، ایک ہم مرکز دائرہ ہے۔

12. ثابت کیجیے کہ اس نقطے کا طریق جس سے ایک مقررہ نقطہ کی دوری اور ایک دیے ہوئے دائرہ پر کھینچے گئے خط ماس کی نسبت ایک مستقل ہے، ایک دائرہ ہے۔

13. ثابت کیجیے کہ x-محور پر ایسے دو نقطے ہیں جن سے دائرہ $x^2+y^2-10x-8y+31=0$ پر کھینچے گئے خطوط ماس ایک دوسرے پر عمود ہیں۔ ان نقطوں کے محددات اور خطوط ماس کی مساوات بتائیے۔

14. دکھائیے کہ خط $y=mx+c$ دائرہ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

کا خط ماس تب ہوگا جب

$$m^2(a^2-r^2)+2ma(c-b)+(c-b)^2=r^2$$

نقطہ $(0, 1)$ سے دائرہ $x^2+y^2-2x+4y=0$ پر کھینچے گئے دو خطوط ماس کی مساوات

معلوم کیجیے۔ [راجپوتانہ 1945]

15. دکھائیے کہ نقطہ $(2, -1)$ سے دو دائروں $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ اور $x^2+y^2-10y=3$ پر کھینچے گئے خطوط مماس کے وتر تماس ایک ہی ہیں۔ ثابت کیجیے کہ ایک ایسا نقطہ اور ہے جس کے وتر تماس بھی ایک ہی ہیں اور اس نقطہ کے محدّدات معلوم کیجیے۔

16. دائروں $x^2+y^2-2px+b^2=0$ اور $x^2+y^2+2qx+b^2=0$ کے مرکز A اور B ہیں۔ ایک نقطہ P اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس سے ان دائروں پر کھینچے گئے خطوط مماس کے مربع $m:n$ کی نسبت میں ہیں۔ ثابت کیجیے کہ P کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز C، AB کو اس طرح تقسیم کرتا ہے کہ $AC : BC = m : n$

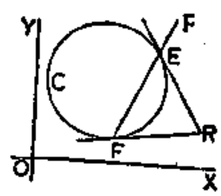
[راجپوتانہ 1948]

باب 9

قطبی خط، جذری محور وغیرہ

9.1 . قطب اور قطبی خط :

دائرہ کے ان دو مماسی خطوط کے نقطۂ تقاطع کا طریق، جو کسی مقررہ نقطہ سے گزرنے والے وتر تماس کے سروں پر کھینچے جاتے ہیں، اس نقطہ کا قطبی خط کہلاتا ہے۔ اس طرح اگر دائرہ EFC کے باہر یا اندر ایک دیا ہوا نقطہ P ہے اور نقطہ P سے گزرنے والا کوئی وتر تماس EF ہے (یا بڑھانے پر EF نقطہ P سے گزرتا ہے) اور اگر E اور F پر کھینچے گئے دائرہ کے خطوط مماس R میں ملتے ہیں، تو R کا طریق P کا قطبی خط ہے۔ ہم نیچے ثابت کریں گے کہ قطبی خط ایک خط مستقیم ہوتا ہے۔

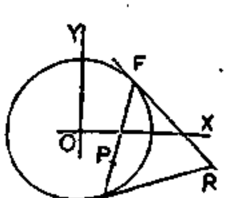


شکل 42

اگر خط مستقیم LR نقطہ P کا طریق ہے تو نقطہ P خط مستقیم LR کا قطب کہلاتا ہے۔

دائرہ کے لحاظ سے کسی نقطہ کا قطبی خط نکالنا۔

مان لیا دائرہ کی مساوات $x^2+y^2=a^2$ اور (x_1, y_1) ایک دیا ہوا نقطہ P ہے۔ مان لیا P سے جانے والا کوئی وتر تماس EF ہے اور مانا E اور F کے خطوط مماس R میں ملتے ہیں جس کے محددات مانا (h, k) ہیں۔



شکل 43

تب EF نقطہ (h, k) سے کھینچے گئے خطوط مماس کا وتر تماس ہے اور اس

لیے اس کی مساوات

$$hx+ky=a^2$$

ہے۔ لیکن یہ وتر نقطہ (x_1, y_1) سے گزرتا ہے۔ اس لیے

$$hx_1+ky_1=a^2$$

اس سے ظاہر ہے کہ نقطہ (h, k) خط $xx_1+yy_1=a^2$ پر واقع ہے۔ لہٰذا (h, k) کا طریق، یعنی دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے لحاظ سے نقطہ کا قطبی خط حسب ذیل ہے:

$$\mathbf{xx_1+yy_1=a^2}$$

اسی طریقے سے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ نقطہ (x_1, y_1) کا قطبی خط دائرہ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

کے لحاظ سے یہ ہے:

$$\mathbf{xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0}$$

نوٹ: ہم دیکھتے ہیں کہ قطبی خط کی مساوات وہی ہے جو وتر تماس کی۔ اس لیے کبھی کبھی قطبی خط کو صرف وتر تماس کہہ کر تعریف دے دی جاتی ہے۔

9.11. دیے ہوئے خط کا قطب:

ایک دیے ہوئے خط کا قطب، مانا (x_1, y_1)، ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے حسب ذیل قاعدہ سے نکالا جاتا ہے:

(x_1, y_1) کے قطبی خط کی مساوات دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے لکھیے اور اس کا موازنہ دیے ہوئے خط کی مساوات سے کیجیے۔

اس طرح قطب کے مطلوبہ محدّدات (x_1, y_1) نکالنے کے لیے دو مساوات مل جائیں گی۔ حسب ذیل مثالوں سے طریقہ واضح ہوجائے گا۔

مثال 1: دائرہ $8x^2+8y^2-11x-9y-24=0$ کے لحاظ سے خط $x-5y=10$

کا قطب نکالیے۔

مان لیا مطلوبہ قطب (x_1, y_1) ہے تو دیا ہوا خط اور حسب ذیل خط ایک ہی ہیں :

$$8xx_1+8yy_1-\tfrac{11}{2}(x+x_1)-\tfrac{9}{2}(y+y_1)-24=0,$$

یعنی

$$(8x_1-\tfrac{11}{2})x+(8y_1-\tfrac{9}{2})y=\tfrac{11}{2}\,x_1+\tfrac{9}{2}\,y_1+24$$

اس کا موازنہ دی ہوئی مساوات $x-5y=10,$ سے کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$8x_1-\tfrac{11}{2}=-\tfrac{1}{5}(8y_1-\tfrac{9}{2})=\tfrac{1}{10}(\tfrac{11}{2}x_1+\tfrac{9}{2}y_1+24)$$

$$\therefore 5(8x_1-\tfrac{11}{2})+8y_1-\tfrac{9}{2}=0$$

اور

$$-4(8y_1-\tfrac{9}{2})=11x_1+9y_1+48,$$

یعنی

$$11x_1+41y_1+30=0 \quad \text{اور} \quad 5x_1+y_1-4=0$$

ان مساوات کو حل کرنے پر قطب $(1, -1)$ نکلتا ہے۔

مثال 2 : ایک متغیر دائرہ x- محور کو مبدأ پر چھوتا ہوا کھینچا جاتا ہے۔ اس کے لحاظ سے خط $lx+my+n=0$ کے قطب کا طریق نکالیے۔ [انجین 1962]

مبدأ سے گزرنے والا کوئی دائرہ

$$x^2+y^2+2gx+2fy=0 \quad \dots\dots \quad (1)$$

ہے۔ یہ x- محور، یعنی $y=0$ کو تب چھوئے گا جب یہ اس محور سے دو منطبق نقطوں میں ملے گا، یعنی اگر $x^2+2gx=0$ کے دو منطبق ریشے ہوں گے، یعنی اگر $g=0$ ۔ لہٰذا (1) حسب ذیل شکل اختیار کر لیتا ہے :

$$x^2+y^2+2fy=0 \quad \dots\dots \quad (2)$$

مان لیا دائرہ کے لحاظ سے دیے ہوئے خط کا قطب (x', y') ہے تو $lx+my+n=0$ اور حسب ذیل ایک ہی ہیں :

$$xx' + yy' + f(y + y') = 0$$

اس لیے ضریبوں کا موازنہ کرنے پر، ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{x'}{l} = \frac{y' + f}{m} = \frac{fy'}{n}$$

ان دو مساوات سے پیرامیٹر f کا اخراج کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$x'/l = y'^2/(my' - n)$$

اس لیے مطلوبہ طریق $x(my - n) = ly^2$ ہے۔

9.2 . قطبی خط پر مسئلے :

(1) اگر کسی نقطہ P کا قطبی خط نقطہ R سے گزرے تو R کا قطبی خط P سے گزرے گا۔

مان لیا P اور R بالترتیب نقطہ (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) ہیں، اور دائرہ کی مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ ہے۔

تو (x_1, y_1) کا قطبی خط $xx_1 + yy_1 = a^2$ ہے۔

یہ نقطہ (x_2, y_2) سے گزرتا ہے، اس لیے

$$x_2x_1 + y_2y_1 = a^2$$

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ نقطہ (x_1, y_1) خط

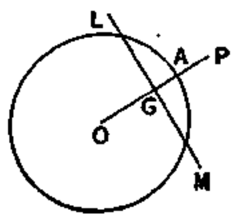
$$xx_2 + yy_2 = a^2$$

پر واقع ہے، لیکن یہ خط نقطہ (x_2, y_2) کا قطبی خط ہے۔ لہٰذا مسئلہ حل ہو جاتا ہے۔

یہ مسئلہ اس کتاب میں درج سبھی منحنیات کے لیے صحیح ہے، لیکن حسب ذیل مسئلہ صرف دائروں کے لیے صحیح ہے۔

اگر دائرہ کا مرکز O ہے اور P کوئی نقطہ ہے تو (i) P کے قطبی خط پر OP عمود ہے؛ اور (ii) اگر OP (ضروری ہو تو بڑھا کر) P کے قطبی خط کو G میں

کاٹے تو $OP \cdot OG = (\text{نصف قطر})^2$.



شکل 44

مان لیا دائرہ کی مساوات $x^2+y^2=a^2$ ہے
اور (x_1, y_1) کوئی دیا ہوا نقطہ P ہے۔
تو P کے قطبی خط، مان لیا LM، کی مساوات حسب ذیل ہے:

$$xx_1+yy_1=a^2 \quad . \; . \; . \; (1)$$

(i) OP کی مساوات $x/x_1=y/y_1$ ہے۔
خطوط (1) اور (2) کے m کی ضرب، $(-x_1/y_1)\times(y_1/x_1)$ یعنی -1 ہے۔
لہٰذا OP، LM پر عمود ہے۔

(ii) پھر چوں کہ OG، O سے (1) پر کھینچا گیا عمود ہے، اس لیے

$OP=\sqrt{(x_1^2+y_1^2)}$ اور $OG=a^2/\sqrt{(x_1^2+y_1^2)}$

اس لیے

$$OP \cdot OG=a^2$$

نوٹ: اس مسئلے سے قطبی خط کھینچنے کا ایک آسان طریقہ ملتا ہے۔ مان لیا نصف قطر a کے کسی دائرہ کا مرکز O ہے، اور P ایک دیا ہوا نقطہ ہے۔ تو دائرہ کے لحاظ سے P کا قطبی خط کھینچنے کے لیے OP پر ایک نقطہ G ایسا لیجیے کہ $OG=a^2/OP$۔ پھر OP کے نقطہ G پر عمود کھینچیے۔ یہی عمود مطلوبہ قطبی خط ہے۔

مشق 31

1. دائرہ $x^2+y^2-4x-6y+12=0$ کے لحاظ سے نقطہ $(4, 5)$ کا قطبی خط معلوم کیجیے۔
[الٰہ آباد 1948]

2. حسب ذیل حالتوں میں قطبی خط نکالیے:

(i) خط $2x+3y-6=0$ کا دائرہ $x^2+y^2-5=0$ کے لحاظ سے
[علی گڑھ 1964]

(ii) خط $2x-y=6$ کا دائرہ $5x^2+5y^2=9$ کے لحاظ سے۔

[الٰہ آباد 1947]

(iii) خط $x-y+3=0$ کا دائرہ $2x^2+2y^2+3x-7y+10=0$ کے لحاظ سے۔

3. دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے لحاظ سے نقطہ P کا قطبی خط دائرہ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=b^2$ کو چھوتا ہے؛ ثابت کیجیے کہ P کا طریق حسب ذیل منحنی ہے:

$$(\alpha x+\beta y-a^2)^2=b^2(x^2+y^2)$$

[علی گڑھ پی۔یو۔سی 66]

4. اگر دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے لحاظ سے نقطہ (x_1, y_1) کا قطبی خط دائرہ $(x-a)^2+y^2=a^2$، کو چھوئے، تو دکھائیے کہ نقطہ (x_1, y_1) منحنی $y^2+2ax=a^2$ پر واقع ہے۔ [الٰہ آباد 1955]

5. ثابت کیجیے کہ اگر دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے لحاظ سے کسی خط مستقیم کا قطب دائرہ $x^2+y^2=9a^2$، پر واقع ہو، تو قطبی خط دائرہ $x^2+y^2=\frac{1}{9}a^2$ کا ایک خط مماس ہے۔ [علی گڑھ 1959]

6. ثابت کیجیے کہ اگر کسی دائرہ کے لحاظ سے AB کا قطب CD پر ہو تو CD کا قطب AB پر ہوگا۔

7. دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے ان خطوط مماس کا نقطہ تقاطع معلوم کیجیے جو خط $x \text{ cox } \alpha+y\sin\alpha=p$ اور دیے ہوئے دائرہ کے تقاطع پر کھینچے جاتے ہیں۔

8. ایک مقررہ نقطہ $(2, 3)$ سے دائرہ $x^2+y^2=25$ کے وتر (chords) کھینچے جاتے ہیں۔ ان وتروں کے سروں پر کھینچے گئے خطوط مماس کے نقاط تقاطع کا طریق معلوم کیجیے۔ [راجپوتانہ 1934]

9. ثابت کیجیے کہ دائرہ کے مرکز سے دو نقطوں کی دوریوں میں وہی نسبت ہوتی ہے جو ہر ایک نقطہ کی دوسرے نقطہ کے قطبی خط سے نپی دوریوں میں ہے۔

10. ثابت کیجیے کہ کسی دیے ہوئے نقطہ کا دائرہ $x^2+y^2-2kx+a^2=0$ کے لحاظ سے قطبی خط ہمیشہ ایک مقررہ نقطہ سے گزرتا ہے، k کی چاہے کچھ بھی قیمت ہو۔ [الٰہ آباد 1957]

11. A اور B دو ایسے نقطے ہیں کہ ایک دائرہ کے لحاظ سے A کا قطبی خط B سے گزرتا ہے، اور AB کا وسطی نقطہ M ہے۔ ثابت کیجیے کہ M سے دائرہ پر خطوط مماس کی لمبائی MA ہے۔

9.3. دو منحنیات کا زاویہ تقاطع :

دو منحنیات کے کسی نقطہ تقاطع پر ان کا درمیانی زاویہ وہ زاویہ ہوتا ہے جو اس نقطہ پر کھینچے گئے منحنیات کے خطوط مماس کے درمیان بنتا ہے۔

دو منحنی ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر کاٹتے ہیں، قائم الزاویہ منحنی کہلاتے ہیں۔

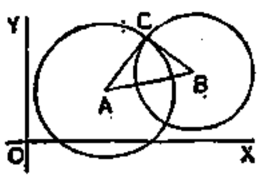
(i) **دو دائروں کے زاویہ قائمہ پر کاٹنے کی شرط نکالنا۔** مان لیا دو متقاطع دائروں کی مساوات حسب ذیل ہیں :

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad . \; . \; . \quad (1)$$

اور

$$x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0. \quad . \; . \; . \quad (2)$$

مان لیا ان کے مرکز $A(-g, -f)$ اور $B(-g', -f')$ ہیں۔



شکل 45

اب اگر C ان کا ایک نقطہ تقاطع ہے، تو ان دائروں کے زاویہ قائمہ پر کاٹنے کی ، یعنی $\angle ACB$ کے زاویہ قائمہ ہونے کی، شرط یہ ہے کہ

$$AB^2=AC^2+BC^2 \quad . \; . \; . \quad (3)$$

یعنی

$$(-g+g')^2+(-f+f')^2=g^2+f^2-c+g'^2+f'^2-c'$$

اسے آسان کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (1) اور (2) سے ظاہر ہونے والے دائرے قائم الزاویہ تب ہوتے ہیں (یعنی ایک دوسرے کو قائمہ زاویہ پر تب کاٹتے ہیں) جب

$$2gg'+2ff'=c+c'$$

(ii) **دو دائروں کا زاویہ تقاطع نکالنا۔** مان لیا A اور B دو دائروں کے مرکز ہیں اور C ان کا ایک نقطہ تقاطع۔

دائروں کے نقطہ C پر کھینچے گئے خطوط مماس نصف قطروں CA اور CB پر عمود ہیں۔ اس لیے دونوں دائروں کا زاویہ تقاطع نصف قطروں کے درمیانی زاویہ ABC کے یا اس کے تکملہ کے برابر ہے۔

لیکن مثلثات سے ہم جانتے ہیں کہ $\triangle ACB$ میں

$$\cos ACB=(AC^2+BC^2-AB^2)/2AC.BC$$

جس سے $\angle ACB$ معلوم ہوجاتا ہے۔

9.4. مساوات $S+\lambda S'=0$:

مان لیا S اور S' ، x اور y میں دو عبارتیں ہیں، تو مساوات

$$S+\lambda S'=0$$

جہاں λ کوئی مستقل یا x کا تفاعل ہے، ایک ایسے منحنی کو ظاہر کرتی ہے جو منحنیات $S=0$ اور $S'=0$ کے نقطہ (یا نقاط) تقاطع سے گزرتا ہے۔

مان لیا منحنیات $S=0$ اور $S'=0$ کے نقاط تقاطع میں سے ایک (x_1, y_1) ہے۔ تو چونکہ (x_1, y_1) ، $S=0$ پر واقع ہے، اس لیے عبارت S میں x کی وجہ x_1 اور y کی جگہ y_1 رکھنے سے نتیجہ صفر ملے گا۔

اسی طرح عبارت S' میں x اور y کی جگہ بالترتیب x_1 اور y_1 رکھنے سے S' صفر ہوجائے گی۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ عبارت $S+\lambda S'$ میں x اور y کی جگہ x_1 اور y_1 رکھنے سے عبارت $S+\lambda S'$ صفر ہوجائے گی۔

اس کا مطلب یہ ہے کہ نقطہ (x_1, y_1) مساوات

$$S+\lambda S'=0$$

کے ذریعے ظاہر ہونے والے منحنی پر واقع ہے۔

اس طرح مسئلہ حل ہو جاتا ہے۔

نوٹ : اگر $S=0$ اور $S'=0$ کے نقاط تقاطع فرضی ہیں یعنی ان کے محددات میں $\sqrt{(-1)}$ آتا ہے، تو منحنی $S+\lambda S'=0$ ان فرضی نقاط تقاطع سے بھی گزرتا ہے یعنی ان نقطوں کے محددات، اگرچہ وہ فرضی ہیں، مساوات $S+\lambda S'=0$ کو مطمئن کرتے ہیں۔

مثال : اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جو نقطہ $(-2, 4)$ سے اور خط $3x+2y=5$ اور $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ کے نقاط تقاطع سے گزرتا ہے اور دکھائیے کہ دونوں دائرے ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر کاٹتے ہیں۔ [راجپوتانہ 1951]

دیے ہوئے دائرہ اور خط مستقیم کے نقاط تقاطع سے گزرنے والا کوئی منحنی

$$x^2+y^2-2x-6y+6+\lambda(3x+2y-5)=0, \quad \ldots (1)$$ ہے۔

جہاں λ کوئی مستقل ہے اور یہ مساوات ایک دائرہ ظاہر کرتی ہے (§7·3)۔

دائرہ (1) نقطہ $(-2, 4)$ سے گزرے گا اگر

$$(4+16+4-24+6)+\lambda(-6+8-5)=0,$$ یعنی $\lambda=2$

(1) میں $\lambda=2$ رکھ کر آسان کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ مطلوبہ مساوات یہ ہے :

$$x^2+y^2+4x-2y-4=0 \quad \ldots (2)$$

اس دائرہ اور دیے ہوئے دائرہ کے لیے عبارت $2gg'+2ff'-(c+c')$ کی قیمت

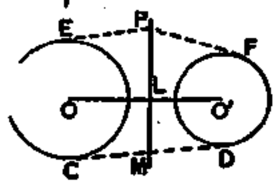
$$-2.2-6(-1)-(6-4)$$ یعنی 0 ہے۔

لہٰذا دائرہ (2) دیے ہوئے دائرہ کو زاویہ قائمہ پر کاٹتا ہے۔

9·5. جذری محور اور مشترک وتر :

تعریف : دو دائروں کا جذری محور اس نقطہ کا طریق ہے جس سے دونوں دائروں پر کھینچے گئے خطوط مماس برابر لمبائی کے ہوتے ہیں۔

[ہم نیچے ثابت کریں گے کہ دو دائروں کا جذری محور ایک خط مستقیم ہوتا ہے۔ شکل میں یہ MP ہے۔]



شکل 46

دو دائروں کا جذری محور نکالنا۔ مان لیا دو دائروں کی مساوات یہ ہیں :

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

اور

$$x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

اور مان لیا (x_1, y_1) ایک ایسا نقطہ ہے جس سے ان دونوں دائروں پر کھینچے گئے خطوط مماس برابر لمبائی کے ہیں۔

اب (x_1, y_1) سے دائرہ (1) پر خط مماس کی لمبائی کا مربع $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c$ ہے۔

اسی طرح دوسرے دائرہ پر خط مماس کی لمبائی کا مربع $x_1^2+y_1^2+2g'x_1+2f'y_1+c'$ ہے۔

ان دو عبارتوں کو برابر کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$2(g-g')x_1+2(f-f')y_1+c-c'=0$$

لہٰذا نقطہ (x_1, y_1) کا طریق، یعنی دونوں دائروں کا جذری محور حسب ذیل ہے :

$$2(g-g')x+2(f-f')y+c-c'=0$$

جو ایک خط مستقیم ہے۔

(1) اور (2) کی بائیں جوانب کو S اور S' سے ظاہر کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ دائروں $S=0$ اور $S'=0$ کا جذری محور حسب ذیل ہے :

$$S-S'=0$$

نوٹ : ہم جانتے ہیں کہ $S-S'=0$ دائروں $S=0$ اور $S'=0$ کے نقاط تقاطع سے گزرنے والا کوئی منحنی ہے۔ لہٰذا دو دائروں کا جذری محور ان کا

مشترک وتر (common chord) ہوتا ہے۔

اگر دو دائرے ایک دوسرے کو حقیقی نقطوں میں نہ کاٹیں، تو جذری محور ان کے فرضی نقاط تقاطع سے گزرتا ہے۔

اگر دائرے $S=0$ اور $S'=0$ ایک دوسرے کو چھوئیں تو ان کا جذری محور $S-S'=0$، ان کے نقطۂ تماس پر کھینچا گیا خط مماس ہے، جسے طالب علم آسانی سے ثابت کر سکتا ہے۔

مثال 1 : دائروں $x^2+y^2=2x$ اور $2x^2+2y^2-3y=5$ کا جذری محور نکالیے۔

پہلی مساوات کو 2 سے ضرب کرکے اس میں سے دوسری کو گھٹانے پر ہم دیکھتے ہیں کہ مطلوبہ جذری محور کی مساوات یہ ہے :

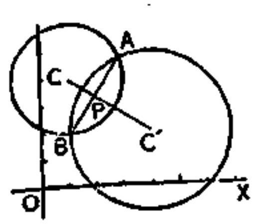
$$2(x^2+y^2-2x)-(2x^2+2y^2-3y-5)=0,$$

یعنی

$$-4x+3y+5=0$$

مثال 2 : دائروں $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ اور $x^2+y^2-8x-4y+11=0$ کے مشترک وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

مشترک وتر، مانا AB، کی مساوات یہ ہے :



شکل 47

$$(x^2+y^2-2x-8y+13)-(x^2+y^2-8x-4y+11)=0,$$

یعنی

$$3x-2y+1=0$$

پہلے دائرہ کا مرکز، مانا C، نقطہ $(1, 4)$ ہے اور اس کا نصف قطر $AC=\sqrt{(1+16-13)}=2$ ہے۔

لہٰذا C سے AB پر کھینچے گئے عمود CP کی لمبائی $=(3\times1-2\times4+1)/\sqrt{(9+4)}$ یعنی $4/\sqrt{13}$۔

اس لیے

$$\therefore AB = 2AP = 2\sqrt{(AC^2 - PC^2)}$$

$$= 2\sqrt{(4 - \tfrac{16}{13})} = 12\sqrt{(\tfrac{1}{13})}$$

9.51. ایک دائرہ کے لحاظ سے دوسرے کی حالت :

مان لیا دو دائروں کے نصف قطر r_2, r_1 ($r_1 <$) اور ان کے مرکزوں کے درمیان کی دوری d ہے۔ پھر مانا نصف قطر r_1 والے دائرہ کے مرکز کی دونوں دائروں کے جذری محور سے دوری p ہے۔ تب حسب ذیل مسئلے ظاہر ہیں ! یہاں * کے معنی ہیں کہ دونوں دائروں کے مرکز جذری محور کی ایک ہی جانب ہیں اور ** کے معنی ہیں کہ دونوں دائروں کے مرکز جذری محور کی مختلف جوانب ہیں۔

دونوں دائروں کا مقام	حالت	متبادل حالت
(i) ایک دائرہ دوسرے دائرہ کے باہر ..	$d > r_1 + r_2$	$p > r_1$ **
(ii) چھوٹا دائرہ بڑے دائرہ کے اندر ..	$d < r_2 - r_1$	$p > r_1$ *
(iii) ایک دوسرے کو خارجی طور پر چھوتے ہوئے ..	$d = r_1 + r_2$	$p = r_1$ **
(iv) چھوٹا دائرہ بڑے دائرہ کو داخلی طور پر چھوتے ہوئے ..	$d = r_2 - r_1$	$p = r_1$. *
(v) ایک دوسرے کو کاٹتے ہوئے ..	$r_2 - r_1 < d < r_2 + r_1$	$p < r_1$

مثال : ثابت کیجیے کہ دائرے $x^2+y^2+2ax+c=0$ اور $x^2+y^2+2by+c=0$ ایک دوسرے کو تب چھوئیں گے جب $1/a^2 + 1/b^2 = 1/c$ [دہلی پری انجینیرنگ 1958]

دونوں دائروں کا جذری محور یہ ہے :

$$(x^2+y^2+2ax+c) - (x^2+y^2+2by+c) = 0$$

یعنی

$$ax - by = 0$$

دائرے ایک دوسرے کو تب چھوئیں گے جب یہ خط انھیں چھوئے گا، یعنی جب دونوں دائروں میں سے کسی ایک کے مرکز سے اس خط کی دوری اس دائرہ کے نصف قطر کے برابر ہوگی۔

اب، پہلے دائرہ کا مرکز $(-a, 0)$ ہے اور اس کا نصف قطر $\sqrt{(a^2-c)}$ ہے۔ لہٰذا مطلوبہ شرط حسب ذیل ہے:

$$\{-a^2/\sqrt{(a^2+b^2)}\}^2=a^2-c \quad \text{یعنی} \quad (a^2+b^2)(a^2-c)=a^4$$

یا

$$a^4+b^2a^2=a^2c+b^2c+a^4 \quad \text{یعنی} \quad 1/c=1/b^2+1/a^2$$

نوٹ: دونوں دائروں کے مرکز جذری محور کی مختلف جوانب ہیں، لہٰذا دائرے ایک دوسرے کو خارجی طور پر چھوئیں گے۔

مشق 32

حسب ذیل دائروں کے جوڑے کا جذری محور نکالیے:

1. $x^2+y^2=8$ اور $x^2+y^2-2x+y=0$

2. $2x^2+2y^2-8x+6=0$ اور $x^2+y^2-3y+2=0$

3. دائروں $x^2+y^2+4x-6y-4=0$ اور $x^2+y^2-x+6y+2=0$ کے مشترک وتر کی مساوات نکالیے۔

مشترک وتر کی لمبائی بھی نکالیے اور اس وتر کو قطر مان کر کھینچے گئے دائرہ کی مساوات بھی نکالیے۔ [اجمیر 1957]

4. دائروں $x^2+y^2-6x-8y+14=0$ اور $x^2+y^2-8x-6y+14=0$ کے مشترک وتر کی لمبائی نکالیے۔

5. دائروں $x^2+y^2+2x+3y+1=0$ اور $x^2+y^2+4x+3y+2=0$ کے مشترک وتر کی لمبائی نکالیے۔ [راجپوتانہ 1957]

6. ثابت کیجیے کہ دائرے $x^2+y^2=2$ اور $x^2+y^2-6x-6y+10=0$ ایک دوسرے کو چھوتے ہیں اور نقطۂ تماس پر ان کے مشترک خط مماس کی مساوات نکالیے۔

7. $x^2+y^2=4$ اور $x^2+y^2-2(3x+4y)=\lambda$ دو دائروں کی مساوات ہیں۔ دونوں دائروں کے ایک دوسرے کو چھونے کی شرط نکالیے۔ مشترک خط مماس کی مساوات اور نقطۂ تماس کے محددات بھی معلوم کیجیے۔

8. دائروں $x^2+y^2=25$ اور $x^2+y^2-26y+25=0$ کے نقاط تقاطع نکالیے اور ثابت کیجیے کہ دائرے ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر کاٹتے ہیں۔

[ایچ۔ایس۔ایس۔پریاگ 1956]

9. اس دائرہ کی مساوات نکالیے جو دائروں $x^2+y^2+15x+14=0$ اور $x^2+y^2-9x+14=0$ کو زاویہ قائمہ پر کاٹتا ہے اور نقطہ (2, 5) سے گزرتا ہے۔

[الٰہ آباد 1965]

10. اگر دو دائرے $x^2+y^2+2gx+2fy=0$ اور $x^2+y^2+2g'x+2f'y=0$ ایک دوسرے کو چھوئیں تو دکھائیے کہ $f'g=fg'$

[علی گڑھ 1965]

[اشارہ : دائروں کے مشترک نقطہ (0, 0) پر کھینچے گئے خطوط مماس کی مساوات کا موازنہ کیجیے۔]

11. دائرہ $x^2+y^2=12$ کے ان نقطوں پر خطوط مماس کھینچے جاتے ہیں جہاں وہ دائرہ $x^2+y^2-5x+3y-2=0$ سے ملتا ہے۔ ان خطوط مماس کا نقطہ تقاطع نکالیے۔

[انجینئرنگ 1960]

12. ثابت کیجیے کہ دو دائرے جو نقطوں $(0, a)$ اور $(0, -a)$ سے گزرتے ہیں اور خط $y=mx+c$ کو چھوتے ہیں، ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر کاٹیں گے اگر $c^2=a^2(2+m^2)$

[راجپوتانہ 1955]

13. دائروں $x^2+y^2-4=0$ اور $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ کے نقاط تقاطع سے گزرنے والے اور خط $x^2+2y=0$ کو چھونے والے دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے۔

[گوالیار 1958]

14. نقطوں $(a, 5a)$ اور $(4a, a)$ سے گزرنے والے دو دائرے y- محور کو چھوتے ہوئے

کھینچے جاتے ہیں۔ وہ زاویہ بتائیے جس پر وہ ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں۔

9.6 . جذری محور پر قضیے :

(1) دو دائروں کا جذری محور ان کے مرکز کو ملانے والے خط پر عمود ہوتا ہے۔

مان لیا دائروں کی مساوات یہ ہیں :

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

اور

$$x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$$

ان دائروں کے مرکز $(-g,-f)$ اور $(-g',-f')$ ہیں۔

لہٰذا دونوں مرکز کو ملانے والے خط کا 'm $(f-f')/(g-g')$ ہے۔

پھر دونوں دائروں کے جذری محور کی مساوات

$$2(g-g')\,x+2(f-f')\,y+c-c'=0$$

ہے اور اس کا 'm $-(g-g')/(f-f')$ ہے۔

ظاہر ہے کہ دونوں دائروں کے مرکز کو ملانے والے خط اور جذری محور کے m کی ضرب -1 ہے۔ لہٰذا قضیہ ثابت ہو جاتا ہے۔

(2) تین دائروں کے جذری محاور (دو دو کے جوڑے لے کر) ایک نقطہ میں ملتے ہیں۔

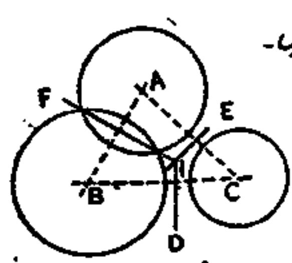
مان لیا تین دائروں کی مساوات

$$S=0\,,\ S'=0 \text{ اور } S''=0$$

ہیں اور مان لیا ان سب میں x^2 کے ضریبے برابر ہیں۔

تو دو دو دائرے لے کر ان کے جذری محاور

یہ ہیں :



شکل 48

$$S-S'=0$$

$$S'-S''=0$$

اور

$$S''-S=0$$

کیوں کہ ان تین مساوات کی بائیں جوانب کا جوڑ صفر ہے اس لیے ان سے ظاہر ہونے والے خطوط ایک نقطہ میں ملتے ہیں (§ 5·4 دیکھیے)۔

تعریف : تین دائروں سے دو دائرے لینے پر تینوں جذری محاور جس نقطہ پر ملتے ہیں وہ تینوں دائروں کا **جذری مرکز** کہلاتا ہے۔ اوپر کی شکل میں تینوں دائروں کا جذری مرکز I ہے۔

نوٹ : مذکورہ بالا قضیہ جیومیٹری سے ظاہر ہے کیوں کہ مرکز A اور B والے دائروں کا جذری محور، ان دائروں کے جذری محور سے I پر ملتا ہے جن کے مرکز B اور C ہیں، تو I سے دائروں A اور B پر خطوط مماس برابر ہیں اور اسی طرح دائروں B اور C کے بھی۔ لہٰذا I سے دائروں A اور C پر خطوط مماس بھی برابر ہوں گے یعنی ان دائروں کا جذری محور I سے گزرتا ہے۔

(3) دو دائروں کا جذری محور ان کے مشترک خطوط مماس کا ناصف ہوتا ہے۔

مان لیا ایک مشترک خط مماس CD، جذری محور سے M میں ملتا ہے (§ 9·5 کی شکل دیکھیے)؛ تو M سے ان دو دائروں کے خطوط مماس MC اور MD ہیں اور M کے جذری محور PM پر واقع ہونے کی وجہ سے برابر ہیں۔

اس قضیہ سے ایک دوسرے کو نہ کاٹنے والے دو دائروں کا جذری محور کھینچنے کا آسان طریقہ حاصل ہوتا ہے۔ دونوں دیے ہوئے دائروں کے دو خطوط مماس کھینچیے۔ تو جذری محور ان خطوط مماس کے وسطی نقطوں کو ملانے والا خط مستقیم ہے۔

مشق 33

حسب ذیل دائروں کے سٹ کا جذری مرکز نکالیے :

1. $x^2+y^2+2x+4y+5=0$ ، $x^2+y^2+x+2y+3=0$

اور $x^2+y^2-7x-8y+9=0$ [الٰہ آباد 1956]

2. $x^2+y^2+4x-7=0$ ، $2x^2+2y^2+3x+5y-9=0$
اور $x^2+y^2+y=0$ [اجمیر 1960]

3. $3x^2+3y^2+4x-6y-1=0,$ ، $2x^2+2y^2-3x-2y-4=0$
اور $2x^2+2y^2-x+y-1=0$ [الٰہ آباد 1955]

4. اگر تین دائرے $x^2+y^2-16x+16=0$ ، $3x^2+3y^2-56x+8=0$
اور $x^2+y^2-16x-12y+8=0$ دیے ہوں تو وہ نقطہ بتائیے جس سے ان تینوں دائروں پر خطوط مماس برابر ہوں گے۔ ان خطوط مماس کی لمبائی بھی بتائیے۔
[اجمیر 1955]

5. دکھائیے کہ اس نقطہ کا طریق جس سے دو دیے ہوئے دائروں پر کھینچے گئے خطوط مماس کے برابر مربعوں کا فرق مستقل ہے، ان دائروں کے جذری محور کے متوازی ایک خط مستقیم ہے۔
[الٰہ آباد 1954]

6. اگر دو دائرے ایک تیسرے دائرہ کو زاویہ قائمہ پر کاٹیں تو ثابت کیجیے ان دو دائروں کا جذری محور تیسرے دائرہ کے مرکز سے گزرتا ہے۔ [راجپوتانہ 1940]
[اشارہ : تیسرے دائرہ کے مرکز کو مبدأ مانیے۔]

7. ثابت کیجیے کہ اس دائرہ کے مرکز کا طریق، جو دو دیے ہوئے دائروں کو زاویہ قائمہ پر کاٹتا ہے، ان دو دائروں کا جذری محور ہے۔

9·7 . ہم محوری دائرے :

تعریف : دائروں کا نظام ہم محوری تب کہلاتا ہے جب ان دائروں کے ہر ایک جوڑے کے لیے ایک ہی جذری محور ہوتا ہے۔ دو مقررہ نقطوں سے گزرنے والے دائرے بظاہر ہم محوری ہوتے ہیں کیوں کہ مشترک وتر ہی دائروں کے ہر ایک جوڑے کا جذری محور ہے۔

ہم محوری دائروں کی مساوات :

(i) ہم محوری دائروں کے نظام کی مساوات معلوم کرنا جب جذری محور اور نظام کے ایک دائرہ کی مساوات دیے ہوں۔

مان لیا دیے ہوئے دائرہ کی مساوات $S=0$ ہے، جہاں

$$S\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c$$

اور مان لیا جذری محور $P=0$, ہے، جہاں

$$P\equiv lx+my+n$$

تو مساوات $S+\lambda P=0$ یعنی

$$x^2+y^2+(2g+l\lambda)x+(2f+\lambda m)y+c+\lambda n=0$$

جہاں λ کوئی اختیاری مستقل ہے، ایک دائرہ ظاہر کرتی ہے کیوں کہ اس میں x^2 اور y^2 کے ضریبے برابر ہیں اور xy میں کوئی رکن نہیں ہے۔

اب مان لیا λ کو دو مختلف قیمتیں دے کر دو دائرے $S+\lambda_1P=0$ اور $S+\lambda_2P=0$ حاصل ہوتے ہیں؛ تو ان کا جذری محور یہ ہے :

$$S+\lambda_1P-(S+\lambda_2P)=0$$

یعنی

$$(\lambda_1-\lambda_2)P=0,$$

یعنی

$$P=0$$

اس سے ظاہر ہے کہ نظام $S+\lambda P=0$ کے دائروں کے ہر ایک جوڑے کے لیے ایک ہی جذری محور $P=0$ ہے، اور اس لیے ہم محوری دائروں کی مطلوبہ مساوات حسب ذیل ہے :

$$S+\lambda P=0 \qquad \ldots \quad (1)$$

(i) اسی طرح ہم دکھا سکتے ہیں کہ دائروں $S=0$ اور $S'=0$ سے

ہم محوری دائروں کی مساوات یہ ہے :

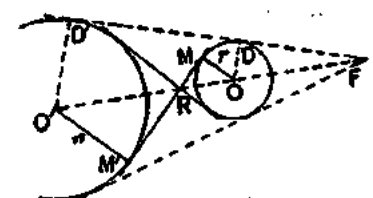
$$S+\lambda S'=0 \quad . \; . \; . \; (2)$$

مساوات (1) اور (2) سے ہم دیکھتے ہیں کہ ہم محوری دائروں کے نظام کے سبھی دائرے دو مقررہ نقطوں سے گزرتے ہیں یعنی ایک حالت میں دائرہ $S=0$، اور $P=0$ نقاط تقاطع سے اور دوسری حالت میں دائروں $S=0$ اور $S'=0$ کے نقاط تقاطع سے۔

9.8 . دو دائروں کے مشترک مماسی خطوط :

حسب ذیل قضیے آسانی سے ثابت کیے جاسکتے ہیں :

(i) دو دائروں کے راست مشترک مماسی خطوط ان کے مرکزوں سے گزرنے والے خط پر ملتے ہیں اور اسے نصف قطروں کی نسبت میں خارجی طور پر تقسیم کرتے ہیں (یہ شکل میں مثلثوں FOD اور $FO'D'$ کی مشابہت سے ظاہر ہے)۔



شکل 49

(ii) اریب مشترک مماسی خطوط بھی دائروں کے مرکزوں سے گزرنے والے خط پر ملتے ہیں اور اسے نصف قطروں کی نسبت میں داخلی طور پر تقسیم کرتے ہیں (یہ شکل میں $\triangle OMR$ اور $\triangle O'M'R$ کی مشابہت سے ظاہر ہے)۔

لہٰذا مشترک مماسی خطوط کی مساوات حاصل کرنے کے لیے ہمیں حسب ذیل اصول ملتا ہے :

مان لیا دو دیے ہوئے دائروں کے مرکز O, O' اور نصف قطر r, r' ہیں۔ دو نقطے، مانا F اور R ایسے معلوم کیجیے جو OO' خارجی اور داخلی طور پر $r:r'$ کی نسبت میں کاٹیں۔ تو راست مشترک مماسی خطوط کی مساوات حاصل کرنے کے لیے F سے گزرنے والے ان خطوط مستقیم کی مساوات حاصل کیجیے جو O سے دوری r پر،

ہوں اور اریب مشترک مماسی خطوط کے لیے R سے گزرنے والے ان خطوط مستقیم کی مساوات حاصل کیجیے جو O سے دوری r پر ہوں۔

نقطہ R اور F جو مرکزوں سے گزرنے والے خط OO' کو داخلی اور خارجی طور پر نصف قطروں کی نسبت میں تقسیم کرتے ہیں دونوں دائروں کے مراکز مشابہت کہلاتے ہیں۔

مثال : دائروں $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ اور $x^2+y^2+6x-8y+9=0$ کے راست مشترک مماسی خطوط نکالیے۔

ان دو دائروں کے مرکز $(1, -2)$ اور $(-3, 4)$ ہیں اور ان کے نصف قطر $\sqrt{(1+4+4)}$ اور $\sqrt{(9+16-9)}$ یعنی 3 اور 4 ہیں۔

اس لیے مرکزوں سے گزرنے والے خط کو $4 : 3$ کی نسبت میں خارجی طور پر تقسیم کرنے والا نقطہ

$$[\{4\times 1-3(-3)\}/(4-3), \{4(-2)-3\times 4\}/(4-3)]$$

یعنی $(13, -20)$ ہے۔

راست مشترک مماسی خطوط نقطہ $(13, -20)$ سے گزرتے ہیں، اس لیے ان کی مساوات حسب ذیل شکل کی ہوگی :

$$y+20=m(x-13) \qquad \cdots \quad (1)$$

پہلے دائرہ کو چھونے کے لیے مرکز $(1, -2)$ سے اس خط کی دوری 3 ہونی چاہیے۔ لہٰذا

$$\{(-2+20)-m(1-13)\}/\sqrt{(1+m^2)}=3,$$

یعنی $(4m+6)^2=1+m^2$ یعنی $15m^2+48m+35=0$

اس لیے

$$m=\tfrac{1}{15}(-24+\sqrt{51})$$

یا

$$\tfrac{1}{15}(-24-\sqrt{51})$$

m کی ان قیمتوں کو (1) میں رکھنے پر مطلوبہ مساوات ملتی ہیں۔

مشق 34

1. دائروں $x^2+y^2=a^2$ اور $x^2+y^2+2ax=2a^2$ سے ہم محوری اور مبدأ سے گزرنے والے دائرہ کی مساوات نکالیے۔

2. اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جو دائروں

$$x^2+y^2=2ax \quad \text{اور} \quad x^2+y^2=2by$$

کے نقاطِ تقاطع سے گزرتا ہے اور جس کا مرکز خطِ مستقیم $x/a-y/b=2$ پر ہے۔

[دہلی پری انجینیرنگ 1961]

3. اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جس کا قطر دائروں

$$x^2+y^2+2x+3y+1=0 \quad \text{اور} \quad x^2+y^2+4x+3y+2=0$$

کا مشترک وتر ہے۔ [علی گڑھ 1961]

[اشارہ : § 9·4 کا استعمال کیجیے اور λ کو ایسا چنیے کہ دائرہ کا مرکز مشترک وتر پر ہو۔]

4. خط $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کو M اور N میں کاٹتا ہے۔ دکھائیے کہ MN کو قطر مان کر کھینچا گیا دائرہ $x^2+y^2-a^2=2p(x\cos\alpha+y\sin\alpha-p)$ ہے۔

[علی گڑھ 1960]

5. ان دائروں کے مشترک وتر کی لمبائی (اور وسطی نقطہ) معلوم کیجیے جن کی مساوات $(x-a)^2+y^2=a^2$ اور $x^2+(y-b)^2=b^2$ ہیں۔

یہ بھی ثابت کیجیے کہ اس دائرہ کی مساوات، جس کا قطر یہ مشترک وتر ہے،

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=2ab(bx+ay)$ ہے۔ [رڑکی 1962]

6. $(2a, 0)$ سے گزرنے والے اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جس کا اور دائرہ $x^2+y^2-a^2=0$ کا جذری محور $x=\frac{1}{2}a$ ہے۔ [راجپوتانہ 1956]

7. P اور Q دو مقررہ نقطے ہیں اور R ایسا متغیر نقطہ ہے کہ $RP=c.\,QR$: تو ثابت کیجیے کہ R کا طریق ایک دائرہ ہے اور c کی مختلف قیمتوں کے لیے یہ دائرے ہم محور ہیں۔

[الٰہ آباد 1947]

8 . دائروں $x^2+y^2+4x+2y+1=0$ اور $x^2+y^2-2x+6y-6=0$ سے ہم محوری دائروں کے نظام کی مساوات معلوم کیجیے۔

اس مخصوص دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جس کا مرکز جذری محور پر ہے۔

[راجپوتانہ 1937]

9 . دائروں $x^2+y^2=25$ اور $x^2+y^2-24x+143=0$ کے مشترک خطوط مماس کی مساوات معلوم کیجیے۔ [رڑکی 1945]

10 . دکھائیے کہ دائروں $x^2+y^2+2x=0$ اور $x^2+y^2-6x=0$ کے مشترک خطوط مماس سے ایک مساوی اضلاع مثلث بنتا ہے۔ [الہ آباد 1952]

11 . دائروں $x^2+y^2-x-2y+1=0$ اور $x^2+y^2-\frac{3}{2}x+2y=0$ کے اریب مشترک خطوط مماس کی مساوات بتائیے۔ ان کے وسطی نقطے اور لمبائیاں بھی معلوم کیجیے۔

[اشارہ : § 9·6 کے قضیہ 3 کا استعمال کیجیے۔]

9·9 . پیرامیٹری محدّدات :

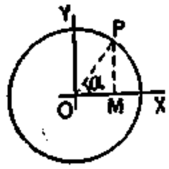
جب ہم کسی دائرہ پر، مانا $x^2+y^2=a^2$ پر کوئی نقطہ (x_1, y_1) لیتے ہیں تو x_1 اور y_1 آزاد نہیں رہتے، کیوں کہ ان کے درمیان رشتہ $x_1^2+y_1^2=a^2$ رہتا ہے۔ اس طرح ہم x_1 اور y_1 میں سے صرف ایک رقم ہی مرضی کے مطابق چن سکتے ہیں۔ ہم آسانی سے محدّدات x_1 اور y_1 کو صرف x_1 کی رکنیت میں یا صرف y_1 کی رکنیت میں یا کسی تیسرے متغیّر کی رکنیت میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر دائرہ پر کسی نقطہ کے محدّدات کو ہم $\{x_1, \sqrt{(a^2-x_1^2)}\}$ یا $\{\sqrt{(a^2-y_1^2)}, y_1\}$ مان سکتے ہیں۔

لیکن اگر ہم $x_1=a\cos\alpha$ رکھیں تو دائرہ کی مساوات میں یہ قیمت رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ $y_1=a\sin\alpha$ ۔ لہٰذا دائرہ پر کسی نقطہ کے محدّدات کو ہم

$$(a\cos\alpha,\ a\sin\alpha)$$

لکھ سکتے ہیں جہاں α پیرامیٹر ہے۔ یہ طریقہ دوسرے طریقوں کے مقابلے زیادہ موزوں ہے۔

یہ دیکھنا آسان ہے کہ اگر دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے کسی نقطہ P کے محددات $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ ہوں تو α زاویہ XOP ہے۔ عام طور پر دائرہ $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ کے نقطہ $x^2+y^2=a^2$ کو نقطہ 'α' کہتے ہیں۔



شکل 50

اگر دائرہ کی مساوات زیادہ عام شکل کی ہو، جیسے

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$$

تو ہم دائرہ پر کسی نقطہ P کے محددات کو

$$(h+a\cos\alpha,\ k+a\sin\alpha)$$

مان سکتے ہیں، جہاں α پیرامیٹر ہے، کیوں کہ یہ محددات دائرہ کی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں؛ α کی چاہے کچھ بھی قیمت ہو۔

مثال : دائرہ $x^2+y^2=a^2$ پر واقع نقطوں α اور β سے گزرنے والے خط مستقیم کی مساوات نکالیے؛ اور اس طرح نقطہ α پر خط مماس کی مساوات حاصل کیجیے۔

دیے ہوئے نقطے $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ اور $(a\cos\beta, a\sin\beta)$ ہیں۔ ان نقطوں کو ملانے والے خط کا m یہ ہے :

$$\frac{a\sin\beta-a\sin\alpha}{a\cos\beta-a\cos\alpha}=\frac{2a\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}{2a\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}$$

$$=-\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}$$

لہذا دیے ہوئے نقطوں کو ملانے والے خط کی مساوات حسب ذیل ہے :

$$(y-a\sin\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)+(x-a\cos\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)=0$$

یعنی

$$x\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)+y\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)-a\cos\{\alpha-\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)\}=0$$

یا

$$x\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+y\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=a\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta). \quad \ldots (1)$$

نقطہ $(a\cos\alpha,\ a\sin\alpha)$ پر دائرہ کے خط مماس کی مساوات (1) میں $\beta\to\alpha$ ہونے دینے پر حاصل ہوتی ہے ؛ اس طرح خط مماس کی مساوات یہ ہے :

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=a$$

مشق 35

1. نقطوں (1, 2) ، (2, 1) اور (8, 9) سے گزرنے والے دائرہ کا نصف قطر اور مرکز نکالیے۔ [الٰہ آباد 1956]

2. اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جس کا مرکز نقطہ (1, −2) پر ہے اور جو خط $x+y+5=0$ کو چھوتا ہے۔ [راجپوتانہ 1949]

3. اس دائرہ کی مساوات نکالیے جو نقطہ (1, −4) سے گزرتا ہے اور خطوط $3x+4y=5$ اور $x+1=0$ کو چھوتا ہے۔ کیا نقطہ (2, −1) دائرہ کے اندر ہے یا اس کے باہر؟ [رڑکی 1958]

4. (i) اس دائرہ کی مساوات حاصل کیجیے جس کا نصف قطر r ہے اور مرکز (a, b) ہے۔ ان نقطوں کو ملانے والے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے جن میں خط $y=mx+c$ دائرہ سے ملتا ہے۔ وہ شرط بھی معلوم کیجیے جس سے خط دائرہ کا (1) خط مماس ہو، (2) عماد ہو۔ [بنارس 1946]

(ii) p کی وہ قیمت نکالیے جس سے خط $x\cos\theta+y\sin\theta=p$ دائرہ $x^2+y^2-2ax\cos\alpha-2by\sin\alpha-a^2\sin^2\alpha=0$ کو چھوئے۔ [الٰہ آباد 1956]

5. ثابت کرو کہ خطوط $\sqrt{3}x+y=0$، $\sqrt{3}y+x=0$، $\sqrt{3}x+y=1$ اور $\sqrt{3}y+x=1$ سے بنا چارضلعی ایک معیّن ہے۔ اگر یہ چارضلعی $OABC$ ہو، (جہاں O مبدأ ہے) اور $ABCD$ دَوری چارضلعی ہو، تو D کا طریق معلوم کیجیے۔

6. تین دائروں $x^2+y^2-2\lambda x=c^2$ کی مبدأ سے دوریاں (جہاں c مستقل اور λ متغیر ہے) جیومیٹریہ تسلسل میں ہیں۔ ثابت کیجیے کہ دائرہ $x^2+y^2=c^2$ کے کسی نقطہ سے ان دائروں پر کھینچے گئے خطوط مماس کی لمبائیاں بھی جیومیٹریہ تسلسل میں ہوں گی۔ [اجین 1962]

7. ان دائروں کی مساوات نکالیے جو محاور محددات اور خط $3x+4y=6$ کو چھوتے ہیں
اور پہلے ربع میں ہیں۔
[رڑکی 1964]

8. مبدأ کو خط $x/a+y/b=1$ اور دائرہ $x^2+y^2=c^2$ کے نقاطِ تقاطع سے ملانے والے خطوط مستقیم کے جوڑے کی مساوات نکالیے۔ لہٰذا ثابت کیجیے کہ اگر یہ خط دائرہ کو چھوئے، تو
$1/a^2+1/b^2=1/c^2$ ۔
[الٰہ آباد 1958]

9. مبدأ سے گزرنے والے اس دائرہ کی مساوات نکالیے جو خطوط $y=x$ اور $y=-x$
دونوں سے لمبائی b کے وتر کاٹتا ہے۔
[کشمیر 1960]

10. اگر دائرہ $x^2+y^2-2ax=0$, کے ایک وتر کی مساوات $y=mx$ ہو، تو ثابت کیجیے کہ
اس دائرہ کی مساوات جس کا قطر یہ وتر ہے، $(1+m^2)\ (x^2+y^2)-2a(x+my)=0$
ہے۔
[علی گڑھ پی۔یو۔سی 1958]

[اشارہ : مان لیا قطر کا دوسرا سرا $(\lambda, m\lambda)$ ہے۔ تو $(1+m^2)\lambda^2=2a\lambda$ وغیرہ۔
اب § 7·6 کا استعمال کیجیے۔]

11. دائرہ $x^2-2ax+y^2=0$ کا ایک وتر مبدأ سے گزرتا ہوا کھینچا جاتا ہے۔ دکھائیے کہ اس وتر (chord) کو قطر مان کر کھینچے گئے دائرہ کے مرکز کا طریق دیے ہوئے دائرہ کے مرکز سے گزرنے والا ایک دائرہ ہے۔

12. اس نقطہ کا طریق نکالیے جس سے دائرہ $x^2+y^2=16$ پر کھینچے گئے خطوط مماس کا وتر تماس (chord of contact) اس دائرہ کے مرکز پر ایک زاویہ قائمہ بناتا ہے۔
[الٰہ آباد 1946]

13. دکھائیے کہ دائرہ $x^2+y^2=a^2$ پر واقع دو نقطوں (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) کے
درمیان کی دوری کا مربع

$$2(a^2-x_1x_2-y_1y_2)$$

کے برابر ہے۔ اس طرح، یا دوسرے طریقے سے، دکھائیے کہ وہ خط مستقیم جو دائرہ کے محیط پر نقطہ (x_1, y_1) سے برابر دوری a پر واقع محیط کے دو نقطوں سے گزر کر جاتا ہے

ہے:

$$xx_1+yy_1-a^2+\tfrac{1}{2}d^2=0$$

اس کا استعمال کرکے (x_1, y_1) پر خط مماس کی مساوات نکالیے۔

14. دائروں $x^2+y^2=12$ اور $x^2+y^2-5x+2y-2=0$ کے مشترک وتر کی مساوات معلوم کیجیے اور دائرہ $x^2+y^2=12$ کے لحاظ سے اس کا قطب نکالیے۔

[بمبئی 1940]

15. دکھائیے کہ دائرے $x^2+y^2+2x-8y+8=0$ اور $x^2+y^2+10x-2y+22=0$ ایک دوسرے کو چھوتے ہیں۔ ان کا نقطۂ تماس اور اس پر خط مماس کی مساوات نکالیے۔

[رڑکی 1959]

16. ان دائروں کے مرکزوں کا طریق معلوم کیجیے جو دو دائروں $x^2+y^2=a^2$ اور $x^2+y^2=4ax$ کو چھوتے ہیں اور ان دونوں دائروں کے باہر ہیں۔

17. دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے ان وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق نکالیے جو نقطہ $(c, 0)$ پر زاویہ قائمہ بناتے ہیں۔

18. دائروں $x^2+y^2=9$ اور $x^2+y^2-2(x\sqrt{3}+y)+3=0$ کے مشترک خط مماس کی مساوات معلوم کیجیے اور دکھائیے کہ یہ خط مماس، بڑے دائرہ کا وہ خط مماس جو مشترک خط مماس پر عمود ہے اور x-محور، ان تینوں سے بنے مثلث کا رقبہ $3\sqrt{3}(2+\sqrt{3})$ ہے۔

[رڑکی 1946]

19. ان سب دائروں کی عام مساوات معلوم کیجیے جن میں سے کسی ایک جوڑے کا جذری محور وہی ہے جو دائروں $x^2+y^2=4$ اور $x^2+y^2+2x+y=6$ کا ہے۔

[راجپوتانہ 1946]

20. اس دائرہ کی مساوات نکالیے جو مبدأ سے گزرتا ہے اور دائروں

$$x^2+y^2-6x+8=0 \quad \text{اور} \quad x^2+y^2-2x-2y+7=0$$

کو زاویہ قائمہ پر کاٹتا ہے۔ [الٰہ آباد 1954]

21. ثابت کیجیے کہ دائرہ پر کے کسی نقطہ سے دائرہ کے کسی وتر پر کھینچا گیا عمود اس نقطہ سے وتر کے سروں پر کھینچے گئے خطوط مماس پر ڈالے گئے عمودوں کا اوسط متناسب ہوتا ہے۔

[اشارہ : وتر کے سروں کو نقطہ α ، β مانیے۔]

22. دائرہ $x^2+y^2-6ax+5a^2=0$ پر دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے نقطوں سے کھینچے گئے خطوط مماس کے وتر تماس کے وسطی نقطوں کا طریق معلوم کیجیے۔

23. دکھائیے کہ خطوط $5x+3y=9$، $x=3y$، $2x=y$ اور $x+4y+2=0$ کو بالترتیب لینے پر ایک دَوری چار ضلعی بنتا ہے۔ اس کے محیطی دائرہ کی مساوات نکالیے۔

[دہلی پری انجینیرنگ 1961]

24. ثابت کیجیے کہ خطوط $x=d$، $y=e$ اور $ax+by+c=0$ سے بنے مثلث کے محیطی دائرہ کی مساوات حسب ذیل ہے :

$$(ax+by+c)=(a^2+b^2)(x-d)(y-e) \quad (bx+ay-bd-ae)$$

[علی گڑھ 1961]

25. دکھائیے کہ مبدأ سے دائرہ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ پر کھینچے گئے خطوط مماس اور ان کے وتر تماس سے ایک مساوی الساقین مثلث بنتا ہے جس کے رقبہ اور راسی زاویہ بالترتیب

$$\frac{\sqrt{\{c^3(g^2+f^2-c)\}}}{g^2+f^2} \text{ اور } \tan^{-1}\frac{2\sqrt{\{c(g^2+f^2-c)\}}}{g^2+f^2-2c}$$ ہیں۔

26. دائروں $x^2+y^2-2x=0$ اور $x^2+y^2+8x=0$ کے مشترک خطوط مماس کی مساوات نکالیے۔

[الٰہ آباد 1955]

27. دکھائیے کہ کسی دائرہ کے مرکز کا طریق جو دو دیے ہوئے دائروں میں سے ہر ایک کو زاویہ قائمہ پر کاٹتا ہے، دیے ہوئے دائروں کا جذری محور ہے۔

[الٰہ آباد 1966]

28. اس دائرہ کی مساوات نکالیے جس کا نصف قطر 3 ہے اور جو دائرہ $x^2+y^2-4x-6x-12=0$ کو نقطہ $(-1,-1)$ پر داخلی طور سے چھوتا ہے۔

[راجپوتانہ 1956]

29. اس دائرہ کی مساوات نکالیے جو دائروں $x^2+y^2-2x+3y-7=0$ ،

$x^2+y^2+5x-5y-9=0$ اور $x^2+y^2+7x-9y+29=0$ کو زاویہ قائمہ پر کاٹتا ہے۔ [اجمیر 1956]

30. ثابت کیجیے کہ دائروں $x^2+y^2-2px+b^2=0$ اور $x^2+y^2-2qy-b^2=0$ کے مشترک وتر کی لمبائی $\sqrt{\{(p^2-b^2)(q^2+b^2)/(p^2+q^2)\}}$ ہے۔ [الہ آباد 1959]

31. دیے ہوئے دائرہ پر واقع کسی نقطہ سے دوسرے دیے ہوئے دائرہ پر خطوط مماس کھینچے جاتے ہیں، ثابت کیجیے کہ وتر تماس کے وسطی نقطہ کا طریق ایک تیسرا دائرہ ہے۔
[رڑکی 1960]

باب 10

مکافی

10.1 مخروطی تراش :

مخروطی تراش یا مخروطی اس نقطہ کا طریق ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کی ایک مقررہ نقطہ اور ایک معین خط مستقیم سے فاصلوں میں ایک مستقل نسبت رہتی ہے۔

مقررہ نقطہ کو مخروطی کا ماسکہ کہتے ہیں۔

معین خط مستقیم کو مخروطی کی مہتمہ کہتے ہیں۔

ایسے خط مستقیم کو جو ماسکہ سے گزرے اور مہتمہ پر عمود ہو مخروطی کا محور کہتے ہیں۔

مخروطی اور اس کے محور کے نقطہ تقاطع کو مخروطی کا راس کہتے ہیں۔

ماسکہ اور مہتمہ سے مخروطی پر واقع مقررہ نقطہ کے فاصلوں کی مستقل نسبت کو بے مرکزیت کہتے ہیں اور e سے ظاہر کرتے ہیں۔

جب بے مرکزیت ایک کے برابر ہو یعنی $e=1$ تو مخروطی کو مکافی کہتے ہیں ؛ جب $e<1$ تو مخروطی کو ناقص کہتے ہیں، اور جب $e>1$ تو مخروطی کو مکافی زائد کہتے ہیں۔

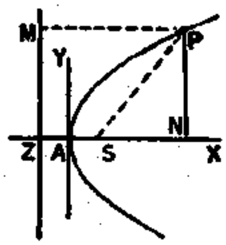
اس طرح مکافی اس نقطہ کا طریق ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کی ایک مقررہ نقطہ سے (جسے ماسکہ کہتے ہیں) اور ایک معین خط مستقیم سے (جسے مہتمہ کہتے ہیں) فاصلے ہمیشہ برابر رہتے ہیں۔

نوٹ : مخروطی تراش اس لیے موسوم ہے کیوں کہ یہ منحنیات شروع میں مخروطی کو مختلف طریقوں سے تراش کر حاصل کیے گئے تھے (§ 13.9 دیکھیے)۔

10.2. مکافی کی معیاری مساوات :

مکافی کی تعریف کے ذریعے اس کی مساوات معلوم کرنا۔

مان لیا S ماسکہ، ZM ہادیہ اور P متحرک نقطہ ہے۔



شکل 51

S سے ہادیہ پر عمود SZ کھینچیے، تو تعریف کے مطابق SZ مکافی کا محور ہے۔

اب SZ کا وسطی نقطہ، مانا A، نقطہ P کا طریق ہوگا کیوں کہ $AS=AZ$

محاور کے مبدأ کو A پر لیجیے، x-محور کو AS کے ساتھ ساتھ اور y- محور کو A پر AS کے عمود کے ساتھ ساتھ، جیسا کہ شکل میں ہے۔

مان لیا $AS=a,$ تو ZA بھی a ہے۔

مان لیا متحرک نقطہ P کے محددات کسی حالت میں (x,y) ہیں۔ تو

$$MP=ZA+AN=a+x$$

لیکن تعریف کے مطابق $MP=PS,$ یعنی $MP^2=PS^2$

لہٰذا

$$(a+x)^2=(x-a)^2+(y-0)^2$$

یعنی

$$y^2=(x^2+2ax+a^2)-(x^2-2ax+a^2)=4ax$$

لہٰذا، اگر مبدأ راس ہے اور x-محور مکافی کا محور، تو مکافی کی مساوات حسب ذیل ہوتی ہے :

$$\mathbf{y^2=4ax}$$

مکافی اور اس کے محور کا نقطہ تقاطع ہونے کی وجہ سے A راس ہے۔ ہم دیکھتے

ہیں کہ راس نقطہ (0, 0) ہے، ماسکہ نقطہ (a, 0) اور ہادیہ خط مستقیم $x=-a$ ہے۔

10·3 . مکافی کا خاکہ کھینچنا :

اب ہم مکافی

$$y^2=4ax, \qquad . \quad . \quad . \quad (1)$$

کا خاکہ کھینچیں گے۔ مان لیا a مثبت ہے۔

(i) اگر x منفی ہے تو بذریعہ (1) حاصل کی ہوئی y کی قیمت فرضی ہے۔ لہذا منحنی پر ایسا کوئی نقطہ نہیں ہے جس کا x محدد منفی ہو، یعنی منحنی کا کوئی حصہ y۔محور کی بائیں جانب نہیں ہے۔

(ii) x کی ہر ایک مثبت قیمت کے لیے y کی دو برابر اور مخالف علامتوں کی قیمتیں ہیں؛ یعنی اگر منحنی پر کوئی نقطہ (h, k) ہے تو $(h, -k)$ بھی منحنی پر واقع ہے۔ لہذا منحنی x-محور کے لحاظ سے متشاکل ہے۔

(iii) اگر $y=0,$ تو $x=0,$ یعنی x-محور منحنی سے مبدأ A پر ملتا ہے۔

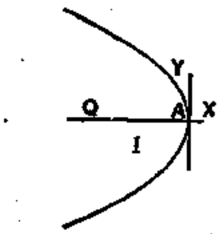
(iv) آخر میں، جیسے جیسے x بڑھتا ہے، تیسے تیسے y کی عددی قیمت بڑھتی جاتی ہے۔ جب x لامتناہی کی جانب بڑھتا ہے تب y بھی لامتناہی کی طرف بڑھتا ہے؛ لہذا منحنی y۔محور کی دائیں جانب لامتناہی تک پھیلا ہوا ہے۔

مذکورہ بالا باتوں پر غور کرنے اور کچھ ایسے نقطوں کی ترسیم کرنے پر جن کے محددات مساوات (1) کو مطمئن کرتے ہیں، منحنی کی وہی شکل ملتی ہے جو گذشتہ دفعہ میں ہے۔

نوٹ 1 : فقرہ ' x لامتناہی کی جانب بڑھتا ہے ' کے معنی ہیں کہ x کو بڑی سے بڑی قیمتیں دیتے جاتے ہیں اور ایسا کوئی عدد نہیں ہے جس سے x کا کم رہنا ضروری ہو۔

نوٹ 2 : آگے بتایا جائے گا (§ 10·8 دیکھیے) کہ مبدأ پر مکافی $y^2=4ax$ کا خط مماس y۔محور ہے۔ مکافی کھینچتے وقت اس بات کا خیال رکھنا چاہیے۔

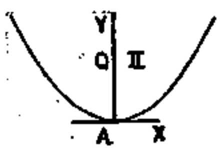
نوٹ 3 : مذکورہ بالا طریقوں پر غور کرنے سے ہم حسب ذیل مکافی کھینچ سکتے ہیں :



شکل 52

I. $y^2=-4ax$ ، $a>0$ ۔ یہاں x کے مثبت ہونے پر y کی قیمت منفی نکلتی ہے اور لہٰذا y فرضی ہو جاتا ہے؛ اس لیے منحنی کا کوئی حصہ y-محور کی دائیں جانب نہیں ہے۔ پھر x-محور کے لحاظ سے متشاکل ہے، کیوں کہ y کی جگہ $-y$ رکھنے پر مساوات نہیں بدلتی۔

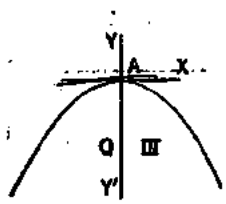
لہٰذا اس حالت میں مکافی شکل I کی طرح ہے۔



شکل 53

II. $x^2=4ay$ ۔ یہاں اگر y منفی ہے تو x فرضی ہے۔ پھر، y-محور کے لحاظ سے متشاکل ہے۔

لہٰذا مکافی شکل II میں دکھائی گئی حالت میں ہے۔ اور مکافی کا محور y-محور ہے۔



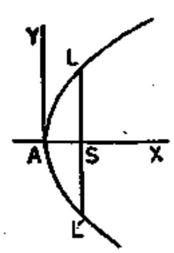
شکل 54

III. $x^2=-4ay$ ، $a>0$ ۔ اس حالت میں منحنی x-محور سے نیچے رہتا ہے اور y-محور کے لحاظ سے متشاکل ہے۔

ان تینوں میں سے ہر ایک حالت میں مبدأ ہی راس ہے۔

10.4. وترِ عمود ماسکی :

تعریف : مکافی کا وتر جو ماسکہ سے گزرے اور محور پر عمود ہو وترِ عمود ماسکی کہلاتا ہے۔ شکل میں LSL' وترِ عمود ماسکی ہے؛ اور



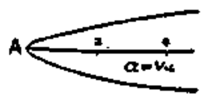
شکل 55

$$LSL' = 2\ (\text{پر عرض}\ \ x=a)$$

$$= 2\sqrt{(4a \cdot a)} = 4a$$

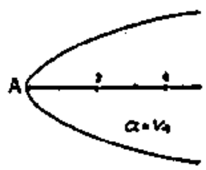
اس طرح وترِ عمود ماسکی $= 4a$

مکافی کی شکل اور سائز :



شکل 56

مساوات $y^2=4ax$ میں صرف ایک اختیاری مستقل a ہے، لہذا مکافی کی شکل اور سائز دونوں وتر عمود ماسکی کی لمبائی سے مقرر ہوتے ہیں۔ a کی کچھ قیمتوں کے لیے مکافی حاشیہ میں دکھائے گئے ہیں۔

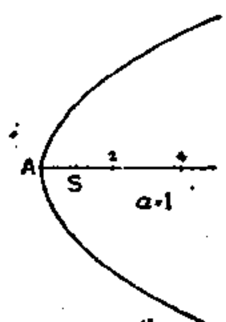


شکل 57

ماسکی دوری : ماسکہ سے مکافی کے کسی نقطہ کی دوری کو نقطہ کی ماسکی دوری کہتے ہیں (§10.2 کی شکل دیکھیے)۔

$$SP=MP=ZA+AN=a+x$$

یعنی مکافی $y^2=4ax$ پر نقطہ (x, y) کی ماسکی دوری $a+x$ ہے۔



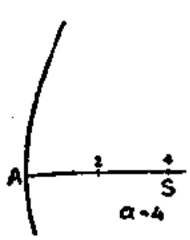
شکل 58

10.5 . مکافی کے لحاظ سے کسی نقطہ کی پوزیشن :

مکافی $y^2=4ax$ پر غور کیجیے۔

اگر (x_1, y_1) کوئی دیا ہوا نقطہ ہے اور $y^2-4ax=0$ صفر ہے، تو نقطہ مکافی پر واقع ہے۔

لیکن اگر $y_1^2-4ax_1$ صفر نہیں ہے تو نقطہ (x_1, y_1) مکافی کے اندر یا باہر ہوگا۔



شکل 59

نقطہ کی حالت کے متعلق مسئلہ یہ ہے :

نقطہ (x_1, y_1) **کا مکافی** $y_1^2=4ax_1$ کے باہر، مکافی پر یا اس کے اندر ہونا اس پر منحصر ہے کہ عبارت $y_1^2-4ax_1$ مثبت ہے، صفر ہے یا

منفی ہے۔

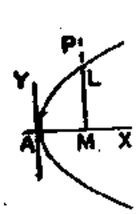
یہ حسب ذیل طریقے سے ثابت کیا جاسکتا ہے :

مان لیا (x_1, y_1) P ہے۔ P کا عرض PM کھینچیے جو منحنی سے L پر ملے تو P مکافی کے باہر تب ہوگا جب

$$PM > LM$$

یعنی

$$PM^2 - LM^2 > 0 \quad \ldots (1)$$



شکل 60

اب $PM^2 = y_1^2$ اور $LM^2 = 4ax_1$ ، کیوں کہ L کے محددات مکافی کی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

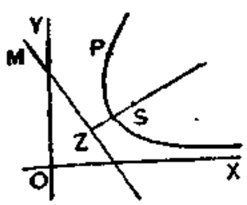
ان قیمتوں کو (1) میں رکھنے پر P کے مکافی کے باہر ہونے کی شرط یہ ہو جاتی ہے کہ

$$y_1^2 - 4ax_1 > 0$$

P کے مکافی کے اندر واقع ہونے کی شرط بھی اسی طرح حاصل کی جاسکتی ہے۔

10.6 . مکافی کی عام مساوات :

اب ہم مکافی کی عام مساوات اس حالت میں حاصل کریں گے جب محاور پہلے سے دیے ہوں، راس کوئی دیا ہوا نقطہ ہو، اور حہتمہ کوئی دیا ہوا خط مستقیم۔ مانا (h, k) ماسکہ S ہے اور $ax+by+c=0$ مکافی کی حہتمہ ZM ہے۔



شکل 61

مان لیا متحرک نقطہ P کی کسی حالت میں اس کے محددات (x, y) ہیں؛ تو رشتہ PS = P کی ZM سے دوری، حسب ذیل شکل اختیار کرلیتا ہے :

$$(x-h)^2+(y-k)^2=(ax+by+c)^2/(a^2+b^2)$$

جو آسان کرنے پر حسب ذیل شکل اختیار کرلیتا ہے :

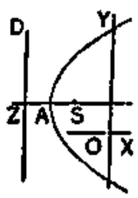
$$(bx-ay)^2+2gx+2fy+d=0 \quad \ldots (1)$$

یہ مکافی کی عام مساوات ہے۔ (1) سے ہم دیکھتے ہیں کہ مکافی کی مساوات میں دو درجی ارکان سے مکمل مربع بنتا ہے۔

نوٹ : اس مسئلہ کا عکس بھی صحیح ہے، یعنی اگر دو درجی مساوات میں دو درجی ارکان سے مکمل مربع بنے تو مساوات ایک مکافی ظاہر کرتی ہے۔

اس مسئلہ کا ثبوت اور عام مساوات کے ذریعے دیے ہوئے کسی مکافی کا خاکہ کھینچنا، یہ دونوں باتیں اس کتاب کی حدود کے باہر ہیں۔ تاہم، جب مساوات میں دو درجی صرف ایک ہی رکن، x^2 یا y^2، ہو تو مبدأ کو منتقل کر کے مکافی کا خاکہ آسانی سے کھینچا جاسکتا ہے۔ طریقہ مثال کے ذریعے واضح ہوجائے گا۔

مثال : مکافی $4y^2-6x-4y=5$ کے راس، ماسکہ، ہادیہ، وترِ عمود ماسکی اور محور نکالیے۔



شکل 62

دی ہوئی مساوات کو ہم حسب ذیل طریقے سے لکھ سکتے ہیں:

$$4(y^2-y+\tfrac{1}{4})=6x+6$$

یعنی

$$(y-\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{3}{2}(x+1) \qquad \ldots \quad (1)$$

مبدأ کو نقطہ A $(-1, \frac{1}{2})$ پر منتقل کیجیے

اس لیے x کی جگہ $X-1$ اور y کی جگہ $Y+\frac{1}{2}$ رکھیے (§ 5·8)

تو (1) $Y^2=\frac{3}{2}X$ ہوجاتی ہے۔

اس لیے مکافی کا وترِ عمود ماسکی $\frac{3}{2}$ ہے؛ اور A سے گزر کر کھینچے گئے OX اور OY کے متوازی محاور کے لحاظ سے راس A $(0, 0)$ ہے، ماسکہ S $(\frac{3}{8}, 0)$ ہے اور ہادیہ DZ، $X=-\frac{3}{8}$ ہے اور محور AS، $Y=0$ ہے۔

لہٰذا (§ 5·8) پہلے محاور کے لحاظ سے راس $(-1, \frac{1}{2})$، ماسکہ $(\frac{3}{8}-1, 0+\frac{1}{2})$ یعنی $(-\frac{5}{8}, \frac{1}{2})$؛ ہادیہ $x=-1-\frac{3}{8}$ یعنی $x=-1\frac{3}{8}$ اور محور $y=\frac{1}{2}$ ہے۔

مشق 36

1. مکافی $y^2=8x$ کا ماسکہ اور وترِ عمود ماسکی کی لمبائی نکالیے۔ [الٰہ آباد 1957]
2. اگر ماسکہ $(0, a)$ ہو اور ہادیہ خطِ مستقیم $y+a=0$ ہو تو مکافی کی مساوات معلوم کیجیے۔
3. حسب ذیل مکافی کے راس، ماسکہ اور ہادیہ نکالیے:

(i) $(y+3)^2=2(x+2)$ [اجمیر 1955]

(ii) $(x-h)^2+4a(y-k)=0$ [الٰہ آباد 1959]

4. مکافی $y^2=12x$ کے کس نقطہ پر عرض، طول کا تین گنا ہے؟
5. مکافی $y^2=4ax$ کے وترِ عمود ماسکی کے سروں کو راس سے ملانے والے خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کیجیے۔
6. اگر مبدأ پر مکافی کا ماسکہ ہو تو مکافی کی مساوات معلوم کیجیے [مانا وترِ عمود ماسکی $4a$ ہے]۔ [الٰہ آباد 1950]
7. حسب ذیل منحنیات کا خاکہ کھینچیے:

(i) $y^2=4x+8$ ، (ii) $x^2=4a(y-a)$ ، (iii) $x^2=by-b^2$ ،

(iv) $4y^2+12x-20y+67=0$ ، [علی گڑھ 1957]

(v) $y^2+4x+2y-8=0$ [الٰہ آباد 1959]

8. اگر راس $(2, 3)$ ہو اور ہادیہ $y=6$، تو مکافی کی مساوات معلوم کیجیے۔ اس کا وترِ عمود ماسکی بھی نکالیے۔
9. مکافی $y^2=4x$ کا کوئی نقطہ P، اس سے ہادیہ پر پائے عمود اور ماسکہ، یہ تینوں نقطے ایک مساوی اضلاع مثلث کے راس ہیں؛ نقطہ P کے محددات معلوم کیجیے۔

[رڑکی 1944]

10. مکافی $x^2=2x+2y$ کا ماسکہ، راس، وترِ عمود ماسکی اور محور نکالیے۔ منحنی کا خاکہ بھی کھینچیے۔
11. مکافی $x^2+4x+2y=0$ کا خاکہ کھینچیے؛ اس کے ماسکہ اور راس کے محددات نکالیے۔

اس کے محور، راس، اور وتر عمود ماسکی کی مساوات بھی معلوم کیجیے۔ [راجپوتانہ 1957]

12. ثابت کیجیے کہ مکافی $y^2=4ax$ کے داخلی مثلث کا رقبہ

$$\tfrac{1}{8}(y_1\sim y_2)(y_2\sim y_3)(y_3\sim y_1)/a,$$

ہے، جہاں y_1، y_2، y_3 مثلث کے راسوں کے عرض ہیں۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1959]

10.7. خط مستقیم اور مکافی کے نقاط تقاطع :

مان لیا خط مستقیم کی مساوات

$$y=mx+c \quad . \; . \; . \quad (1)$$

ہے اور مکافی کی مساوات

$$y^2=4ax \quad . \; . \; . \quad (2)$$

ان کے نقاط تقاطع کے طول نکالنے کے لیے ہمیں (1) اور (2) میں y کو خارج کرنا چاہیے۔ اس طرح ہمیں یہ ملتا ہے :

$$(mx+c)^2=4ax,$$

یعنی

$$m^2x^2+2(mc-2a)x+c^2=0. \quad . \; . \quad (3)$$

کیوں کہ یہ x میں دو درجی ہے، اس لیے خط مستقیم (1) مکافی کو دو نقطوں میں کاٹتا ہے جو (i) حقیقی اور جدا جدا یا (ii) حقیقی اور منطبق یا (iii) فرضی ہو سکتے ہیں۔

پھر x-محور کے متوازی کسی بھی خط مستقیم کی مساوات کی شکل

$$y=b \quad . \; . \; . \quad (4)$$

ہے، y کی یہ قیمت (2) میں رکھنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ (4) اور (2) ایک دوسرے کو صرف ایک نقطہ میں کاٹتے ہیں، یعنی اس نقطہ میں جس کے لیے $x=b^2/4a$ اور $y=b$۔ لہذا مکافی کے محور کے متوازی کوئی بھی خط مستقیم مکافی کو صرف

ایک نقطہ میں کاٹتا ہے۔

نوٹ : مساوات (3) کو حل کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$x=\frac{-mc+2a\pm\sqrt{\{(mc-2a)^2-c^2m^2\}}}{m^2}$$
$$=\frac{-mc+2a\pm\sqrt{\{4a^2-4amc\}}}{m^2}$$

اگر m کی قیمت کم ہے اور جذر کے پہلے ہم + علامت لیتے ہیں، تو شمار کنندہ کی قیمت تقریباً $4a$ کے برابر ہے۔ پھر نسب نما میں m^2 ہے، اس لیے m کی قیمت کے مطابق مساوات (3) کا ریشہ بہت بڑا ہے۔ جیسے جیسے m صفر کی جانب بڑھتا ہے، ویسے ویسے یہ ریشہ لامتناہی کی جانب بڑھتا ہے۔ لہذا جب m صفر کی جانب بڑھتا ہے، (1) اور (2) کا ایک نقطہ تقاطع لامتناہی کی جانب بڑھتا ہے۔ اس کو کبھی کبھی یہ کہہ کر ظاہر کرتے ہیں کہ مکافی کے محور کے متوازی کوئی بھی خط مستقیم مکافی سے دو نقطوں پر ملتا ہے، ایک راس سے متناہی دوری پر، دوسرا لامتناہی دوری پر۔

10.8. مکافی پر خط مماس :

مکافی کے دیے ہوئے نقطہ پر خط مماس کی مساوات معلوم کرنا۔ مان لیا مکافی کی مساوات $y^2=4ax$ ہے اور (x_1, y_1) وہ نقطہ P ہے جس پر خط مماس نکالنا ہے۔

کیوں کہ نقطہ P مکافی پر واقع ہے، اس لیے

$$y_1^2=4ax_1 \qquad \ldots\ (1)$$

مکافی کی مساوات $y^2=4ax$ کا تفرقی ضریب نکالنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$2y\frac{dy}{dx}=4a$$

یعنی

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2a}{y}$$

لہٰذا نقطہ P پر خط مماس کی مساوات حسب ذیل ہے :

$$y-y_1=(2a/y_1)(x-x_1)$$

یعنی

$$yy_1=2a(x-x_1)+y_1^2$$

یا

$$yy_1=2a(x+x_1)$$

اس طرح مکافی $y^2=4ax$ کے نقطہ (x_1, y_1) پر خط مماس کی مساوات یہ ہے :

$$\mathbf{yy_1=2a(x+x_1)}$$

دیکھیے کہ مکافی کی مساوات میں y^2 کی جگہ yy_1 اور $2x$ کی جگہ $x+x_1$ رکھنے سے نقطہ (x_1, y_1) پر خط مماس کی مساوات ملتی ہے (§ 8·3 سے موازنہ کیجیے)۔

ضمنی نتیجہ 1 : مکافی $y^2=4ax$ پر نقطوں (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) کو ملانے والے وتر کی مساوات (2) ہے جو آسان کرنے پر $(y_1+y_2)y=4ax+y_1y_2$ ہوجاتی ہے۔

ضمنی نتیجہ 2 : $(0, 0)$ پر خط مماس $x=0$ ہے، جس سے پتہ چلتا ہے کہ راس پر خط مماس مکافی کے محور پر عمود ہوتا ہے۔

مثال : مکافی $y^2=4x$ کے اس نقطہ پر خط مماس کی مساوات کیجیے جس کا عرض 6 ہے۔

نقطہ کا طول حسب ذیل ہے :

$$x=\tfrac{1}{4}y^2=\tfrac{1}{4}.6^2 = 9$$

اس لیے $(9, 6)$ پر خط مماس کی مساوات یہ ہے :

$$y\times 6=2(x+9)$$

یعنی

$$3y-x=9$$

10·81. m کی رکنیت میں خط مماس :

مکافی $y^2=4ax$ کے خط مماس کی مساوات، اس کے شرح ڈھال کی رکنیت میں ظاہر کرنا۔

مان لیا مکافی

$$y^2=4ax \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

کے خط مماس کی مساوات

$$y=mx+c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ہے؛ تو (1) اور (2) کے نقاط تقاطع کے طول (1) اور (2) سے y کو خارج کرنے پر حاصل ہوئی مساوات کے ذریعے ملتے ہیں۔ یہ مساوات

$$(mx+c)^2=4ax$$

یعنی

$$m^2x^2+2(mc-2a)x+c^2=0. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

ہے۔ لیکن خط مستقیم (2) کے مکافی کو چھونے کی شرط یہ ہے کہ وہ مکافی کو دو منطبق نقطوں میں کاٹے، یعنی (3) کے دو منطبق ریشے ہوں۔ اس کے لیے شرط یہ ہے کہ

$$(mc-2a)^2-m^2c^2=0$$

یعنی

$$-4acm+4a^2=0$$

یا

$$c=a/m$$

(2) میں یہ قیمت رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ خط

$$y=mx+a/m$$

مکافی کا خط مماس ہے، m کی چاہے کچھ بھی قیمت ہو۔

اب مساوات (3) حسب ذیل شکل اختیار کرلیتی ہے :

$$m^2x^2+2(a-2a)x+a^2/m^2=0.$$

یعنی

$$(mx-a/m)^2=0$$

جس سے $x=a/m^2$ ملتا ہے۔ اس کے مطابق y کی قیمت $m(a/m^2)+a/m$ یعنی $2a/m$ ملتی ہے۔

لہٰذا خط مماس $y=mx+a/m$ کا نقطہ تماس $(a/m^2, 2a/m)$ ہے۔

چھونے کی شرط :

مذکورہ بالا دفعہ سے یہ نتیجہ بھی نکلتا ہے کہ خط مستقیم $y=mx+c$ مکافی $y^2=4ax$ کو تب چھوئے گا جب $c=a/m$

ضمنی نتیجہ : مان لیا $y=mx+c$ ایک دیے ہوئے خط مستقیم کی مساوات ہے۔ تو اس خط کے متوازی کھینچا ہوا خط مماس $y=mx+a/m$ ہوگا۔

اس طرح ایک دیے ہوئے خط کے متوازی مکافی پر صرف ایک ہی خط مماس کھینچا جاسکتا ہے [§8·41 سے موازنہ کیجیے]۔

مثال : مکافی کے ایک دوسرے پر عمود خطوط مماس کے نقاط تقاطع کا طریق نکالیے۔
[گوالیار 1957]

مکافی کا کوئی بھی خط مماس

$$y=mx+a/m$$

یعنی

$$m^2x-my+a=0 \qquad \ldots (1)$$

ہے۔ اس پر عمود خط مماس کی مساوات حسب ذیل ہوگی :

$$y=(-1/m)x+a\div(-1/m_1)$$

یعنی

$$x+my+am^2=0 \qquad \ldots\ldots (2)$$

مطلوبہ طریق (1) اور (2) سے m کو خارج کرنے پر حاصل ہوتا ہے (§ 5·5) ۔
(1) اور (2) کو جوڑنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ m خارج ہوجاتا ہے اور حسب ذیل مساوات ملتی ہے :

$$(m^2+1)x+a(1+m^2)=0$$

یعنی

$$x+a=0$$

یہی مطلوبہ طریق ہے۔

مشق 37

1 . حسب ذیل مکافی کے خط مماس کی مساوات دی ہوئی حالت میں معلوم کیجیے :

(i) $y^2=12x$ کے نقطہ $(3, -6)$ پر۔

(ii) $y^2=4ax$ کے وتر عمود ماسکی کے ہر ایک سرے پر۔ [الٰہ آباد 58]

(iii) $y^2=3x$ کے خط $2x-y=1$ کے متوازی۔

(iv) $y^2=4ax$ کے خط $y=mx+c$ کے عمود۔

(v) $y^2=4ax$ کے، جو x-محور سے $60°$ کا زاویہ بناتا ہے۔ نقطہ تماس بھی معلوم کیجیے۔ [اجمیر 1957]

2 . ثابت کیجیے کہ خط مستقیم $lx+my+n=0$ مکافی $y^2=4ax$ کو تب چھوئے گا جب $ln=am^2$ [علی گڑھ 1959]

3 . دکھائیے کہ خط $7x+6y=13$ منحنی $y^2-7x-8y+14=0$ کا خط مماس ہے۔ [بنارس 1945]

4 . دکھائیے کہ خط $x+my+am^2=0$ مکافی $y^2=4ax$ کو چھوتا ہے۔ نقطہ تماس کے محددات بھی بتائیے۔ [علی گڑھ انجینیرنگ 1957]

5. دکھائیے کہ a کی سبھی قیمتوں کے لیے خط مستقیم

$$x \cos a+y \sin a+a \sin a \tan a=0$$

مکافی $y^2=4ax$ کو چھوتا ہے۔ نقطہ تماس بھی نکالیے۔

6. اگر محور کے دو مقررہ نقطوں سے جو ماسکہ سے برابر دوریوں پر ہیں، مکافی کے کسی خط مماس پر عمود کھینچے جائیں تو ثابت کیجیے کہ ان کے مربعوں کا فرق مستقل رہے گا۔ [علی گڑھ 1961]

7. ثابت کیجیے کہ مکافی کے خط مماس کا وہ حصّہ، جو نقطہ تماس اور ہادیہ کے درمیان پڑتا ہے، ماسکہ پر زاویہ قائمہ بناتا ہے۔ [الہ آباد 1947]

8. مکافی $y^2=4x$ کے ذریعہ خط $2x+y=3$ سے کٹے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

[الہ آباد 1955]

9. دکھائیے کہ مکافی $y^2=4ax$ کے اس وتر ماسکی (focal chord) کی لمبائی، جو x-محور سے زاویہ a بناتا ہے، $4a \operatorname{cosec}^2 a$ ہے۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1959]

10. دکھائیے کہ اگر $\lambda>\frac{1}{2}$ تو مکافی $y^2=2x$ کو خط $y=2x+\lambda$ کو نہیں کاٹے گا۔

11. مکافی $y^2=4ax$ کے خط مماس پر راس سے کھینچے گئے پائے عمود کا طریق نکالیے۔

10.9. عماد :

(i) مان لیا مکافی کی مساوات $y^2=4ax$ ہے اور (x_1, y_1) اس پر کوئی نقطہ ہے۔

تو نقطہ (x_1, y_1) پر خط مماس

$$yy_1=2a(x+x_1)$$

ہے۔ اس کا m، $2a/y_1$ ہے؛ اس لیے عماد کا m، $-y_1/2a$ ہوگا۔ پھر عماد نقطہ (x_1, y_1) سے گزرتا ہے؛ لہٰذا عماد کی مساوات حسب ذیل ہے :

$$y-y_1=(-y_1/2a)(x-x_1) \quad \ldots \quad (1)$$

(ii) اگر ہم (1) میں $-y_1/2a$ کو m کے برابر رکھدیں تو

$x_1 = y_1^2/4a = am^2$ اور $y_1 = -2am$

تب (1) حسب ذیل شکل اختیار کر لیتی ہے :

$$y + 2am = m(x - am^2)$$

یعنی مکافی $y^2 = 4ax$ کے کسی عماد کی مساوات یہ ہے :

$$\mathbf{y = mx - 2am - am^3} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

جہاں m کوئی پیرامیٹر ہے اور خط (2) نقطہ $(am^2, -2am)$ پر مکافی کا عماد ہے۔
مساوات (2) سے ظاہر ہے کہ پیرامیٹر m عماد کا شرح ڈھال ہے

10.91. دیے ہوئے نقطہ سے گزرنے والے عمادوں کی تعداد :

مکافی $y^2 = 4ax$ پر کوئی بھی عماد

$$y = mx - 2am - am^3 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ہے۔ یہ ایک دیے ہوئے نقطہ (x_1, y_1) سے تب گزرے گا جب

$$y_1 = mx_1 - 2am - am^3$$

یہ m میں ایک کعبی مساوات ہے اور اس سے عام طور پر m کی تین قیمتیں ملیں گی۔ ان میں سے ہر ایک کو (1) میں رکھنے پر ہمیں (x_1, y_1) سے گزرنے والا ایک عماد ملے گا۔

لہٰذا کسی دیے ہوئے نقطہ سے مکافی کے تین عماد کھینچے جا سکتے ہیں۔

مثال 1 : دکھائیے کہ خط $x + y = 3$ مکافی $y^2 = 4x$ کا عماد ہے اور اس سے کٹے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔ [الٰہ آباد 1955]

مکافی $y^2 = 4x$ کا کوئی بھی عماد

$$y = mx - 2m - m^3 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ہے۔ دیے ہوئے خط کا -1 ہے۔ اس لیے (1) میں $m = -1$ رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ خط

$$y = -x - 2(-1) - (-1)^3$$

یعنی

$$x+y=3 \quad \ldots \quad (2)$$

ایک عماد ہے۔ یہ مکافی $y^2=4x$ سے وہاں ملے گا جہاں

$$y^2=4(3-y)$$

جس سے

$$y=-6 \text{ یا } 2$$

(2) سے ہم دیکھتے ہیں کہ جب $y=-6$ تو $x=9$ اور جب $y=2$ تو $x=1$

لہٰذا وتر کے سرے $(9,-6)$ اور $(1,2)$ ہیں اور اس لیے وتر کی لمبائی

$$=\sqrt{\{(9-1)^2+(-6-2)^2\}}=8\sqrt{2}$$

مثال 2 : مکافی $y^2=4ax$ کے ان نقطوں کے عمادوں کا نقطہ تقاطع معلوم کیجیے جن کے عرض y_1 اور y_2 ہیں۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1960]

ان نقطوں کے طول بالترتیب $y_1^2/4a$ اور $y_2^2/4a$ ہیں۔

اب نقطہ $(y_1^2/4a, y_1)$ پر عماد یہ ہے :

$$y-y_1=(-y_1/2a)(x-y_1^2/4a)$$

یا

$$2ay+y_1x=2ay_1+y_1^3/4a \quad \ldots \quad (1)$$

اسی طرح نقطہ $(y_2^2/4a, y_2)$ پر عماد

$$2ay+y_2x=2ay_2+y_2^3/4a \quad \ldots \quad (2)$$

ہے۔ (2) کو (1) میں سے گھٹانے پر y خارج ہوجاتا ہے اور اس طرح (1) اور (2) کے نقطۂ تقاطع کے طول دینے والی مساوات

$$(y_1-y_2)x=2a(y_1-y_2)+(y_1^3-y_2^3)/4a$$

ہے۔ جس سے

$$x=2a+(y_1^2+y_1y_2+y_2^2)/4a$$

(2) میں یہ قیمت رکھنے پر عرض کے لیے حسب ذیل قیمت ملتی ہے :

$$2ay=-(y_1^2+y_1y_2+y_2^2)y_1/4a+y_1^3/4a$$

یعنی

$$y=-(y_1+y_2)y_2y_1/a^2$$

مشق 38

1. حسب ذیل مکافی کے عماد کی مساوات دی گئی حالت میں بتائیے :

(i) $y^2=12x$ کے نقطہ $(3, 6)$ پر۔ [اجمیر 1957]

(ii) $y^2=12x$ کے، جو محور سے $45°$ کا زاویہ بناتا ہے۔

2. دکھائیے کہ مکافی $y^2=4ax$ کے وترِ عمود ماسکی کے سروں پر کھینچے گئے عماد ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ پر ملتے ہیں۔ [بھوپال 1963]

3. ثابت کیجیے کہ مکافی $y^2=4ax$ کے کسی خط مماس اور اس کے متوازی کھینچے گئے عماد کی درمیانی دوری $a \sec^2\theta \operatorname{cosec}\theta$ ہے، جہاں θ ان میں سے کسی ایک کا محور پر جھکاؤ ہے۔

4. $y=mx+c$ کے مکافی $y^2=4ax$ پر عماد ہونے کی شرط معلوم کیجیے۔

[گوالیار 1958]

5. ثابت کیجیے کہ $y=x-6$ مکافی $y^2=8x$ کا ایک عماد ہے۔ اس نقطہ کے محددات معلوم کیجیے جہاں پر یہ عماد ہے۔

6. ثابت کیجیے کہ مکافی $y^2=4ax$ کا وہ وتر جس کی مساوات $2x+y-12a=0$ ہے، مکافی کا ایک ... اور اس کی لمبائی $5\sqrt{5a}$ ہے۔ [رڑکی 1965]

7. اگر مکافی $y^2=4ax$ کے نقطہ P سے مکافی کے محور پر کھینچا گیا عمود اس سے N میں ملے اور اگر مکافی کا P پر عماد محور سے G میں ملے، تو ثابت کیجیے کہ NG نصف وترِ عمود ماسکی کے برابر ہے۔ [الٰہ آباد 1947]

8. مکافی $y^2=4x$ کے ان عمادوں کی مساوات معلوم کیجیے جو نقطہ $(3, 0)$ سے گزرتے ہیں۔

[علی گڑھ 1959]

9. دکھائیے کہ مکافی کے وہ عماد، جو محور پر $\tan^{-1} 1$ اور $\tan^{-1} 2$ کے زاویوں پر جھکے ہیں، مکافی پر ہی ملتے ہیں اور وہاں کا عماد محور سے $\tan^{-1} 3$ کا زاویہ بناتا ہے۔

[دہلی پری انجینیرنگ 1961]

10. مکافی $y^2=4ax$ کا ایک دوہرا عرض PNP' ہے۔ ثابت کیجیے کہ P پر عماد اور P' سے محور کے متوازی کھینچے گئے خط کے نقطہ تقاطع کا طریق برابر مکافی $y^2=4a(x-4a)$ ہے۔

[اجّین 1960]

11. دکھائیے کہ اگر مکافی کا کوئی وتر عماد راس پر زاویہ قائمہ بناتا ہے تو وہ محور سے $\tan^{-1}\sqrt{2}$ کا زاویہ بناتا ہے۔

12. اگر مکافی $y^2=4ax$ کے نقطہ $(at_1^2, 2at_1)$ پر عماد مکافی سے پھر نقطہ $(at_2^2, 2at_2)$ پر ملتا ہے، تو ثابت کیجیے کہ

$$t_2=-t_1-2/t_1$$

[الٰہ آباد 1963]

13. ثابت کیجیے کہ مکافی $y^2=4ax$ کے عماد کے اس حصے کے وسطی نقطہ کا طریق، جو منحنی اور محور کے درمیان پڑتا ہے، ایک دوسرا مکافی ہے۔ دوسرے مکافی کا راس اور وتر عمود ماسکی نکالیے۔

14. اگر مکافی کے نقطہ P پر عماد محور سے زاویہ ϕ بناتا ہے اور مکافی سے پھر Q میں ملتا ہے تو دکھائیے کہ

$$PQ=4a \sec\phi \operatorname{cosec}^2\phi$$

[اشارہ: مانا P نقطہ $(am^2, -2am)$ ہے اور $PQ=r$ تو Q نقطہ $(am^2+r\cos\phi, -2am+r\sin\phi)$ ہے۔]

15. کسی نقطہ سے مکافی $y^2=4ax$ پر کھینچے گئے دو عماد ایک دوسرے پر عمود ہیں۔ اس نقطہ کا طریق نکالیے۔

[علی گڑھ 1961]

184

باب 11

مکافی مسلسل

11·1. ایک نقطہ سے خطوطِ مماس :

مان لیا مکافی کی مساوات $y^2 = 4ax$ ہے اور کسی دیے ہوئے نقطہ کے محددات (x_1, y_1) ہیں۔

اس مکافی کا کوئی ایک خط مماس

$$y = mx + a/m \qquad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ہے۔ اگر یہ دیے ہوئے نقطہ (x_1, y_1) سے گزرے تو

$$y_1 = mx_1 + a/m$$

یعنی

$$m^2x_1 - my_1 + a = 0 \qquad . \quad . \quad . \quad (2)$$

مساوات (2) m میں دو درجی ہے اور عام طور پر اس سے m کی دو حقیقی یا فرضی قیمتیں ملیں گی۔ پھر بذریعہ (1)، m کی ہر ایک قیمت کے لیے، ہمیں نقطہ (x_1, y_1) سے گزرنے والا مکافی کا ایک خط مماس ملے گا۔

اگر مساوات (2) کے ریشے منطبق یا فرضی ہیں، تو مطابق خطوط مماس بھی ویسے ہی ہوں گے۔

لیکن (2) کے ریشوں کا حقیقی اور جدا جدا، یا حقیقی اور منطبق، یا فرضی ہونا اس پر منحصر ہے کہ

$$y_1^2 - 4ax_1 >, = \text{ یا } < 0$$

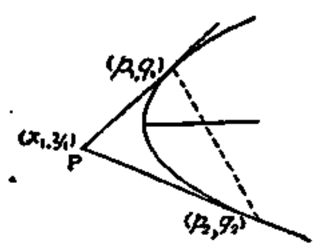
یعنی اس پر کہ نقطہ (x_1, y_1) مکافی کے باہر، مکافی پر یا اس کے اندر واقع ہے

(بذریعہ 10·5 §)۔

لہٰذا ایک نقطہ سے مکافی کے دو خطوط مماس کھینچے جا سکتے ہیں۔ وہ جدا جدا، منطبق یا فرضی اس کے مطابق ہوں گے کہ نقطہ مکافی کے باہر، مکافی پر یا اس کے اندر ہے۔

11·2 وتر تماس :

مکافی پر ایک خارجی نقطہ سے کھینچے گئے خطوط مماس کے وتر تماس کی مساوات معلوم کرنا۔ مان لیا مکافی کی مساوات $y^2=4ax$ ہے اور (x_1,y_1) اس کے باہر کوئی دیا ہوا نقطہ P ہے۔ مان لیا اس نقطہ سے مکافی پر کھینچے گئے خطوط مماس کے نقاطِ تماس (p_1,q_1) اور (p_2,q_2) ہیں۔



شکل 63

ہم جانتے ہیں کہ نقطہ (p_1,q_1) پر خط مماس

$$q_1y=2a(x+p_1)$$

ہے؛ یہ نقطہ (x_1,y_1) سے گزرتا ہے۔ اس لیے

$$q_1y_1=2a(x_1+p_1)\quad\cdots(1)$$

اسی طرح

$$q_2y_1=2a(x_1+p_2)\quad\cdots(2)$$

مساوات (1) اور (2) سے ظاہر ہے کہ نقاط (p_1,q_1) اور (p_2,q_2) خط مستقیم

$$yy_1=2a(x+x_1)$$

پر واقع ہیں۔

لہٰذا نقطہ (x_1,y_1) سے مکافی $y^2=4ax$ پر کھینچے گئے خطوط مماس کے وتر تماس کی مساوات حسب ذیل ہے :

$$\mathbf{yy_1=2a(x+x_1)}$$

نوٹ : اگر نقطہ (x_1,y_1) مکافی کے اندر ہو تو دونوں خطوط مماس اور ان کے نقاط تماس فرضی ہوں گے، لیکن تب بھی وتر تماس حقیقی نکلتا ہے (8·8 § دیکھیے)۔

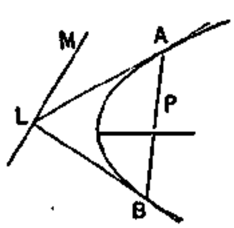
اگر نقطہ (x_1, y_1) مکافی پر واقع ہو، تو وتر تماس اس نقطہ پر کھینچا گیا خط مماس ہوگا۔

11.3 قطبی خط :

تعریف : کسی مقررہ نقطہ سے گزرنے والے کسی مخروطی کے وتر تماس کے سروں پر کھینچے گئے خطوط مماس کے نقطہ تقاطع کا طریق اس مقررہ نقطہ کا **قطبی خط** کہلاتا ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ ہر ایک مخروطی میں قطبی خط، خط مستقیم ہوتا ہے۔

اگر ایک خط مستقیم LM نقطہ P کا قطبی خط ہے تو ہم کہتے ہیں کہ نقطہ P خط مستقیم LM کا **قطب** ہے۔

مکافی کے لحاظ سے کسی دیے ہوئے نقطہ کا قطبی خط معلوم کرنا۔ مان لیا مکافی کی مساوات $y^2 = 4ax$ ہے اور دیے ہوئے نقطہ P کے محددات (x_1, y_1) ہیں۔



شکل 64

مان لیا P سے گزرنے والا کوئی وتر تماس مکافی کو نقطوں A اور B میں کاٹتا ہے؛ اور A اور B پر کھینچے گئے مکافی کے خطوط مماس ایک دوسرے سے نقطہ L میں ملتے ہیں، جس کے محددات مان لیا (h, k) ہیں۔

تو خط AB نقطہ (h, k) سے مکافی $y^2 = 4ax$ پر کھینچے گئے خطوط مماس کا وتر تماس ہے، لہٰذا اس کی مساوات

$$ky = 2a(x+h)$$

ہے۔ لیکن وتر تماس نقطہ P سے گزرتا ہے؛ اس لیے

$$ky_1 = 2a(x_1+h)$$

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ نقطہ (h, k) کا طریق

$yy_1 = 2a(x+x_1)$ ہے۔

لہٰذا مکافی $y^2 = 4ax$ کے لحاظ سے نقطہ (x_1, y_1) کا قطبی خط حسب ذیل ہے :

$$yy_1 = 2a(x+x_1)$$

ضمنی نتیجہ : ماسکہ $(a, 0)$ کا قطبی خط $x+a=0$ ہے یعنی مہتمہ ہے۔

11·31۔ ایک خط مستقیم کا قطب :

مکافی کے لحاظ سے کسی خط مستقیم کا قطب نکالنے کا طریقہ وہی ہے جو دائرہ کے لیے استعمال کیا گیا تھا (§9·11) ۔

اس طرح مان لیا مکافی اور خط مستقیم کی مساوات بالترتیب

$$y^2=4ax$$

اور

$$Ax+By+C=0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ہیں۔

خط کا قطب نکالنے کے لیے مان لیا اس کے محددات (x_1, y_1) ہیں۔ تو (1) اور قطبی خط کی مساوات، یعنی $yy_1-2a(x+x_1)=0$ ایک ہی ہوں گی۔ موازنہ سے ظاہر ہے کہ

$$y_1/B=-2a/A=-2ax_1/C$$

ان مساوات کو حل کرنے سے ہمیں قطب (x_1, y_1) مل جاتا ہے۔

مثال : مکافی $y^2=4ax$ کے اس وتر تماس کا قطب معلوم کیجیے جو ان نقطوں کو ملاتا ہے جن کے عرض y_1 اور y_2 ہیں۔

دیے ہوئے نقطوں کو ملانے والے وتر تماس کی مساوات

$$(y_1+y_2)\,y=4ax+y_1y_2 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ہے (§10·8 کے ضمنی نتیجہ 1 سے)۔

مان لیا مطلوبہ قطب نقطہ (x', y') ہے۔

تو اس کا قطبی خط یعنی $y'y=2a(x+x')$ اور (1) ایک ہی ہیں۔ ضریبوں کا موازنہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$y'/(y_1+y_2)=\tfrac{1}{2}=2ax'/y_1y_2$$

اس لیے

$$x' = \tfrac{1}{4} y_1 y_2 / a \quad \text{اور} \quad y' = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

11·4. قطبی خطوط پر مسئلے :

(1) مکافی کا وہ وترِ تماس جس کا وسطی نقطہ کوئی دیا ہوا نقطہ ہے، اس نقطہ کے قطبی خط کے متوازی ہوتا ہے۔ مان لیا مکافی کی مساوات $y^2 = 4ax$ ہے اور (h, k) دیے ہوئے نقطہ کے محددات ہیں۔

(h, k) سے گزرنے والا کوئی خط حسب ذیل ہے :

$$y - k = \lambda(x - h) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

یہ خط، مکافی سے دو نقطوں میں ملتا ہے اور ان نقطوں کے عرض مان لیا، y_1 اور y_2، حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوں گے :

$$y - k = \lambda(y^2/4a - h)$$

اس سے ظاہر ہے کہ

$$y_1 + y_2 = 4a/\lambda$$

اب (h, k)، وتر (1) کا وسطی نقطہ تب ہوگا جب

$$\tfrac{1}{2}(y_1 + y_2) = k$$

جس سے

$$2a/\lambda = k,$$

یعنی

$$\lambda = 2a/k$$

اس طرح وتر (1)، نقطہ (h, k) کے قطبی خط یعنی $ky = 2a(x + h)$، کے متوازی ہے، کیوں کہ دونوں کا شرحِ ڈھال $2a/k$ ہے۔

(2) اگر مکافی کے لحاظ سے P کا قطبی خط، Q سے گزرتا ہے، تو Q کا قطبی

خط P سے گزرتا ہے۔

مان لیا مکافی کی مساوات $y^2=4ax$ اور نقطوں P اور Q کے محددات (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) ہیں۔

تو P (x_1, y_1) کا قطبی خط یہ ہے:

$$yy_1=2a(x+x_1)$$

لیکن دیا ہے کہ یہ Q (x_2, y_2) سے گزرتا ہے۔ اس لیے

$$y_2y_1=2a(x_2+x_1)$$

لیکن یہی مساوات اس بات کی بھی شرط ہے کہ نقطہ (x_1, y_1)، نقطہ (x_2, y_2) کے قطبی خط $yy_2=2a(x+x_2)$ پر واقع ہے۔ لہٰذا مسئلہ ثابت ہو جاتا ہے۔

11.41. وتر جس کا وسطی نقطہ معلوم ہے:

مکافی کے اس وتر کی مساوات نکالنا جس کا وسطی نقطہ ایک دیا ہوا نقطہ ہے۔

مان لیا مکافی کی مساوات $y^2=4ax$ ہے اور دیا ہوا نقطہ (x_1, y_1) ہے۔

تو مطلوبہ وتر، نقطہ (x_1, y_1) کے قطبی خط کے متوازی ہے؛ یعنی $yy_1=2a(x+x_1)$ کے متوازی ہے اور نقطہ (x_1, y_1) سے گزرتا ہے۔ لہٰذا اس کی مساوات یہ ہوگی:

$$y-y_1=(2a/y_1)(x-x_1)$$

یعنی

$$yy_1-y_1^2=2ax-2ax_1$$

یا

$$T=S_1$$

جہاں

$$S_1\equiv y_1^2-4ax_1 \quad \text{اور} \quad T\equiv yy_1-2a(x+x_1)$$

نوٹ : اگر مکافی کی مساوات $S=0$ ہو تو S میں x اور y کی جگہ بالترتیب x_1 اور y_1 رکھنے سے S_1 حاصل ہوتا ہے؛ اور T وہ عبارت ہے جو (x_1, y_1) پر مکافی کے قطبی خط کی مساوات $T=0$ میں آتا ہے۔

یاد رکھنے کے لیے شکلیں $T=S_1$ اور $SS_1=T^2$ (§ 11·9 دیکھیے) بہت آسان ہیں، خاص طور پر اس وجہ سے کہ یہ دوسرے مخروطات کے لیے بھی استعمال ہوتی ہیں (§§8·9, 11·9, 13·5, 13·81 دیکھیے)۔

مشق 39

1. مکافی $y^2=4ax$ کے لحاظ سے وترِ عمود ماسکی کو تین برابر حصوں میں تقسیم کرنے والے نقطوں کے قطبی خطوط معلوم کیجیے۔

2. ثابت کیجیے کہ مکافی کے ماسکی وتروں کے قطبین کا طریق متممہ ہے۔ [علی گڑھ 1965]

3. مکافی $y^2=12x$ کے ان دو خطوط مماس کی مساوات معلوم کیجیے جو نقطہ $(3, 10)$ سے گزرتے ہیں۔
[الٰہ آباد 1946]

4. دکھائیے کہ مکافی $y^2=4ax$ کے ان وتروں کے قطبین کا طریق، جو راس سے مستقل دوری b پر ہیں، یہ ہے :

$$y^2+4a^2(1-x^2/b^2)=0$$ [علی گڑھ 1958]

5. مکافی $y^2=8x$ کے اس وتر کی مساوات معلوم کیجیے جس کا وسطی نقطہ $(2, -3)$ ہے۔ وتر کی لمبائی بھی معلوم کیجیے۔

6. مکافی $y^2=4ax$ کے کسی وتر کا وسطی نقطہ ایک معین خط مستقیم پر ہے جو مکافی کے محور پر عمود ہے۔ وتر کے قطب کا طریق نکالیے۔

7. ثابت کیجیے کہ اگر خط مستقیم $x+4a=0$ کے کسی نقطے سے مکافی $y^2=4ax=0$ پر خطوط مماس کھینچے جائیں، تو ان کا وتر تماس، راس پر زاویہ قائمہ بناتا ہے۔
[الٰہ آباد 1942]

8. ثابت کیجیے کہ مکافی $y^2=4ax$ کے عماد وتروں کے قطبین کا طریق منحنی

$y^2(x+2a)+4a^3=0$ ہے۔ [الٰہ آباد 1964]

9. ثابت کیجیے کہ مکافی $y^2=4ax$ کے عماد وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق یہ ہے:

$$y^4/2a+4a^3/y^2=x-2a$$ [رڑکی 1966]

10. ثابت کیجیے کہ مکافی $y^2=4ax$ کے ماسکی وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق $y^2=2a(x-a)$ ہے۔ [راجپوتانہ 1946]

11. ثابت کیجیے کہ نقطہ (x_1, y_1) سے مکافی $y^2=4ax$ پر کھینچے گئے خطوط مماس کے وتر تماس کی لمبائی $\sqrt{\{(y_1^2+4a^2)(y_1^2-4ax_1)\}}/a$ ہے۔

12. ثابت کیجیے کہ مکافی $y^2=4ax$ پر نقطہ (x_1, y_1) سے کھینچے گئے خطوط مماس اور ان کے وتر تماس سے بنے مثلث کا رقبہ $(y_1^2-4ax_1)^{3/2}/2a$ ہے۔

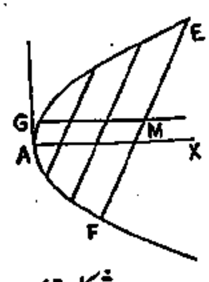
13. دکھائیے کہ مکافی $y^2=4bx$ کے لحاظ سے مکافی $y^2=4ax$ کے خطوط مماس کے قطبین کا طریق $y^2=4b^2x/a$ ہے۔ [علی گڑھ 1960]

11.5. قطر:

مکافی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطوں کا طریق نکالنا۔

مان لیا مکافی کی مساوات

$$y^2=4ax, \quad \cdots \quad (1)$$



شکل 65

ہے اور متوازی وتروں کے نظام کی مساوات

$$y=mx+c, \quad \cdots \quad (2)$$

ہے، جہاں m دیا ہوا مستقل ہے اور c ایک پیرامیٹر ہے۔

خط (2) مکافی (1) سے دو نقطوں میں ملتا ہے۔ مان لیا وہ E اور F ہیں، جن کے عرض (مان لیا y_1 اور y_2) حسب ذیل مساوات سے ملتے ہیں:

$$y^2=4a\frac{y-c}{m}$$

یعنی

$$y^2-\frac{4a}{m}y+\frac{4ac}{m}=0 \quad \ldots (3)$$

اس طرح EF کے وسطی نقطہ M کا عرض $\frac{1}{2}(y_1+y_2)$ ہے اور اس کی قیمت بذریعہ (3) $2a/m$ ہے۔

اس لیے وتر کے وسطی نقطہ کا عرض سب وتروں کے لیے مستقل ہے، کیوں کہ اس کی قیمت میں پیرامیٹر c نہیں ہے۔

لہذا، وسطی نقطوں کا طریق $y=2a/m$ ہے۔

اس طرح مکافی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطوں کا طریق مکافی کے محور کے متوازی کوئی خط مستقیم ہے۔

تعریف : مکافی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطوں کے طریق کو قطر کہتے ہیں۔ شکل میں GM ایک قطر، EM اس کا ایک عرض، اور EF دہرا عرض ہے۔

یہ دیکھنا آسان ہے کہ مکافی کے محور کے متوازی ہر ایک خط مستقیم مکافی کا ایک قطر ہے۔

جس نقطہ میں مکافی کا کوئی قطر منحنی سے ملتا ہے، وہ نقطہ قطر کا سرا کہلاتا ہے۔

11·6 قطر پر قضیے :

(1) مکافی کے ہر ایک قطر کے سرے پر کھینچا گیا خط مماس ان وتروں کے متوازی ہوتا ہے، جن کا وہ قطر ناصف ہے۔

مان لیا مکافی کی مساوات $y^2=4ax$ ہے اور متوازی وتروں کے نظام کی مساوات $y=mx+c$ ہے، جہاں c پیرامیٹر ہے۔

تو اس نظام وتر کے ناصف قطر (مذکورہ بالا دفعہ کے ذریعہ) $y=2a/m$ ہے۔

یہ قطر مکافی سے اس نقطہ میں ملتا ہے جس کے لیے $y=2a/m$ اور $x=y^2/4a=a/m^2$، یعنی نقطہ $(a/m^2, 2a/m)$ میں۔

اس نقطہ پر خط مماس $y=mx+a/m$ (بذریعہ §10·81) ہے جو بظاہر وتروں

کے متوازی ہے۔

(2) مکافی کے کسی وتر کے سروں پر کھینچے گئے خطوط مماس اس وتر کے ناصف قطر پر ملتے ہیں۔

مان لیا مکافی کی مساوات $y^2 = 4ax$ ہے اور اس کے کسی وتر، مان لیا EF، کی مساوات

$$y = mx + c \qquad \ldots (1)$$

ہے اور مان لیا کہ E اور F پر کھینچے گئے خطوط مماس نقطہ (x_1, y_1) پر ملتے ہیں۔

تو EF، نقطہ (x_1, y_1) سے کھینچے گئے خطوط مماس کا وترِ تماس ہے، اس لیے اس کی مساوات یہ ہے:

$$yy_1 = 2a(x + x_1)$$

اس کا موازنہ مساوات (1) سے کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$2a/y_1 = m$ یعنی $y_1 = 2a/m$

اس کا مطلب ہے کہ نقطہ (x_1, y_1) خطِ مستقیم $y = 2a/m$ پر واقع ہے جو وتر EF کا ناصف قطر ہے۔

11·7. پیرامیٹری محدّدات:

بہت سے سوالوں میں مکافی کے کسی نقطہ کے محددات کو صرف ایک متغیر کی رکنیت میں ظاہر کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے، بہ نسبت اس کے کہ دونوں متغیر x_1، y_1 لیے جائیں اور ان کا رشتہ $y_1^2 = 4ax_1$ ہمیشہ ذہن میں رکھا جائے۔ اس مقصد سے x_1 کو y_1 کی رکنیت میں ظاہر کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے بہ نسبت اس کے کہ y_1 کو x_1 کی رکنیت میں ظاہر کیا جائے، کیوں کہ ایسا کرنے سے جذر المربع نہیں آپاتا۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ مکافی پر کوئی نقطہ $(y_1^2/4a, y_1)$ ہے اور اسے ہم نقطہ y_1 کہتے ہیں۔

y_1 کی جگہ $2at$ لکھنا اس سے بھی زیادہ اچھا ہے؛ تب x کی قیمت

$(2at)^2/4a$ یعنی at^2 ہو جاتی ہے۔ اس لیے ہم کہتے ہیں کہ مکافی پر کوئی نقطہ

$$(at^2, 2at)$$

ہے اور اسے ہم نقطہ t کہتے ہیں۔ یہاں t ایک پیرامیٹر ہے، یعنی مکافی پر مختلف نقطوں کے لیے اس کی مختلف قیمتیں ہوتی ہیں۔

ہم خطوط مماس، عماد وغیرہ کی مساوات y_1 یا t کی رکنیت میں معلوم کر سکتے ہیں۔ اس طرح y_1 اور y_2 کی رکنیت میں نقطوں y_1 ، y_2 کو ملانے والے وتر کی مساوات

$$y(y_1+y_2)=4ax+y_1y_2$$

ہے (10·8 § دیکھیے)، اور y_1 پر خط مماس یہ ہے:

$$2yy_1=4ax+y_1^2$$

پھر نقطوں y_1 اور y_2 پر کھینچے گئے خطوط مماس کا نقطہ تقاطع یہ ہے:

$$\{\tfrac{1}{4}y_1y_2/a, \tfrac{1}{2}(y_1+y_2)\}$$

اس کی ذاتی اہمیت کی وجہ سے ذیل میں ہم خط مماس کی مساوات، پہلے اصولوں کے ذریعہ، t کی رکنیت میں حاصل کریں گے۔

11·71. نقطہ t پر خط مماس اور عماد:

مکافی $y^2=4ax$ کے نقطہ t پر خط مماس اور عماد کی مساوات نکالنا۔

مان لیا مکافی پر کوئی دوسرا نقطہ t' ہے۔

تو نقطہ t اور t' کے محددات $(at^2, 2at)$ اور $(at'^2, 2at')$ ہیں اور ان نقطوں کو ملانے والا وتر یہ ہے:

$$y-2at=\frac{2at'-2at}{at'^2-at^2}(x-at^2)=\frac{2(x-at^2)}{t'+t}$$

یعنی

$$\tfrac{1}{2}(t+t')y=x+att' \qquad \ldots (1)$$

اب مان لیا نقطہ t' ، t کی طرف بڑھتا ہے تو ہمیں نقطہ t پر خط مماس کی مساوات حسب ذیل شکل میں ملتی ہے :

$$ty = x + at^2 \qquad \ldots (2)$$

پھر، نقطہ t پر عماد (1) پر عمود ہے، لہذا اس کی مساوات یہ ہے :

$$y - 2at + t(x - at^2) = 0$$

یعنی

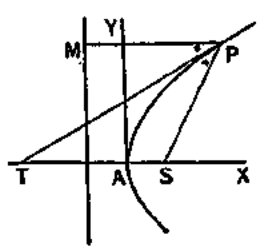
$$y + tx = 2at + at^3 \qquad \ldots (3)$$

نقطوں t_1 ، t_2 پر خطوط مماس کی مساوات کو حل کرنے پر ہمیں ان کا نقطہ تقاطع حسب ذیل ملتا ہے :

$$\{at_1t_2,\ a(t_1 + t_2)\}$$

11.8 . مکافی پر قضیے :

(1) مکافی کے کسی نقطہ P پر کھینچا گیا خط مماس، نقطہ P سے گزرنے والے ماسکی وتر اور P سے ہادیہ پر کھینچے گئے عمود کے درمیانی زاویہ کا ناصف ہوتا ہے۔



شکل 66

مان لیا مکافی $y^2 = 4ax$ پر کوئی نقطہ P ہے، S ماسکہ $(a, 0)$ ہے، PT خط مماس ہے اور PM، نقطہ P سے ہادیہ پر کھینچا گیا عمود ہے۔

تو ثابت کرنا ہے کہ

$$\angle MPT = \angle TPS$$

مان لیا خط مماس PT کی مساوات

$$y = mx + a/m$$

ہے۔ تو نقطہ تماس P ، $(a/m^2, 2a/m)$ ہے۔

پھر S ، $(a, 0)$ ہے؛ اس لیے PS کا ڈھال حسب ذیل ہے :

$$\tan PSX = \frac{2a}{m} \div \left(\frac{a}{m^2} - a\right) = \frac{2}{m} \times \frac{m^2}{1 - m^2} = \frac{2m}{1 - m^2}$$

پھر $\tan PTX=m$ جس سے، $\tan 2PTX=2m/(1-m^2)$

اس لیے

$$\angle PSX=2\angle PTX$$

اس لیے بذریعہ جیومیٹری

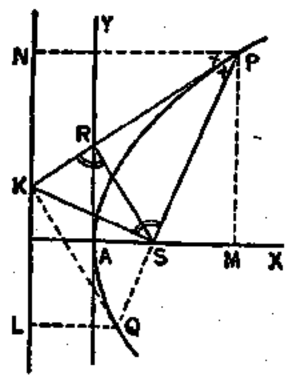
$$\angle SPM=2\angle TPM$$

یعنی TP ، $\angle SPM$ کا ناصف ہے۔

ضمنی نتیجہ : مکافی کے کسی نقطہ پر ماس، اس نقطہ سے گزرنے والے ماسکی وتر اور قطر (یعنی محور کے متوازی خط) کے درمیانی زاویہ کا ناصف ہوتا ہے۔

اس مسئلہ سے یہ ظاہر ہے کہ ماسکہ S سے نکلی روشنی کی کرن P، پر مکافی پر انعکاس کے بعد PM کو بڑھانے سے حاصل ہوئی سمت میں (یعنی مکافی کے محور کے متوازی) چلے گی۔ لہذا S سے نکلنے والی سبھی کرنیں مکافی پر انعکاس کے بعد، مکافی کے محور کے متوازی ہو جائیں گی۔ اس صفت کی وجہ سے منبع روشنی کے پیچھے رکھے جاتے مکافی شکل کے (یعنی مکافی کو اس کے محور کے چاروں طرف گھمانے سے بنی شکل کے) ہوتے ہیں۔

(2) ماسکی وتر کے سروں پر کھینچے گئے خطوط ماس ایک دوسرے کو ہادی پر زاویہ قائمہ بناتے ہوئے کاٹتے ہیں۔



شکل 67

مان لیا مکافی کی مساوات $y^2=4ax$ ہے اور $(at^2, 2at)$ اس پر کوئی نقطہ P ہے۔ مان لیا P سے گزرنے والے ماسکی وتر کے دوسرے سرے Q کے محددات $(at_1^2, 2at_1)$ ہیں۔

تو PS اور SQ دونوں کے m ، جہاں S ماسکہ $(a, 0)$ ہے، ایک ہی ہیں۔

اس لیے

$$\frac{2at-0}{at^2-a}=\frac{2at_1-0}{at_1^2-a}$$

یعنی

$$\frac{t}{t^2-1}=\frac{t_1}{t_1^2-1}$$

یا

$$tt_1^2-t=t_1t^2-t_1$$

یعنی

$$(tt_1^2-t_1t^2)+(t_1-t)=0$$

یا

$$(tt_1+1)(t_1-t)=0$$

لہٰذا $t_1=-1/t$ یعنی نقطہ Q $(a/t^2, -2a/t)$ ہے۔

اب P اور Q خطوط مماس بالترتیب حسب ذیل ہیں :

$$2aty=2a(x+at^2)$$

یا

$$ty=x+at^2 \quad \ldots (1)$$

اور

$$(-2a/t)\,y=2a(x+a/t^2)$$

یعنی

$$-ty=t^2x+a \quad \ldots (2)$$

کیوں کہ ان کے m کی ضرب $(1/t)\times(-t)$ یعنی -1 ہے، اس لیے یہ خطوط مماس ایک دوسرے پر عمود ہیں۔

پھر، (1) اور (2) کو جوڑنے پر،

$$0=(1+t^2)x+a(t^2+1)$$

جس سے

$$x=-a$$

اس طرح خطوطِ مماس کے نقطہ تقاطع کا طول $-a$ ہے، لہٰذا خطوط مماس ناظمہ پر ملتے ہیں۔

ضمنی نتیجہ : مکافی $y^2=4ax$ کے ماسکی وتر کے سرے نقطہ t اور $-1/t$ مانے جا سکتے ہیں۔

(3) مکافی کے کسی بھی خط مماس کا ناظمہ اور منحنی کے درمیان کٹنے والا حصہ ماسکہ پر زاویہ قائمہ بناتا ہے۔

مان لیا مکافی $y^2=4ax$ پر کوئی نقطہ P $(at^2, 2at)$ ہے۔

تو P پر خط مماس $ty=x+at^2$ ہے؛ اور نقطہ K، جہاں یہ ناظمہ $x=-a$ سے ملتا ہے، $(-a, at-at^{-1})$ ہے۔

کیوں کہ ماسکہ S $(a, 0)$ ہے؛ اس لیے PS اور KS کے m کی ضرب یہ ہے :

$$\frac{2at-0}{at^2-a}\times\frac{0-(at-at^{-1})}{a-(-a)}=\frac{2t}{t^2-1}\times\frac{-(t^2-1)}{2t}=-1$$

لہٰذا PS، SK پر عمود ہے، یعنی $\angle KSP=90^\circ$

(4) مکافی کا ہر ایک خط مماس اور ماسکہ سے اس پر کھینچا گیا عمود دونوں راس پر کھینچے گئے خط مماس پر ملتے ہیں۔

مکافی $y^2=4ax$ کا کوئی بھی خط مماس $y=mx+a/m$ ہے۔ اس پر ماسکہ $(a, 0)$ سے کھینچے گئے عمود کی مساوات $-my=x-a$ ہے۔

ان مساوات کو حل کرنے پر نقطۂ تقاطع R کا طول صفر نکلتا ہے۔ لہٰذا نقطہ R، y - محور پر واقع ہے، جو راس پر خطِ مماس ہے۔

11.9. خارجی نقطہ سے خطوطِ مماس کی مساوات :

مان لیا مکافی کی مساوات $y^2=4ax$ ہے اور P ایک خارجی نقطہ (x_1, y_1) ہے۔
مان لیا P سے کھینچے گئے خطوطِ مماس میں سے ایک، مانا PT، پر کوئی نقطہ L (h, k) ہے اور T نقطۂ تماس ہے۔

مان لیا $PT : TL = 1 : m$ ، تو T کے محددات حسب ذیل ہیں :

$$\{(mx_1+h)/(1+m),\ (my_1+k)/(1+m)\} \quad . \ . \ . \ (1)$$

مکافی پر ہونے کی وجہ سے یہ محددات مکافی کی مساوات کو مطمئن کریں گے۔ اس لیے

$$(my_1+k)^2 = 4a(mx_1+h)(1+m)$$

یعنی

$$m^2(y_1^2-4ax_1)+2m(ky_1-2ah-2ax_1)$$
$$+(k^2-4ah)=0 \quad . \ . \ . \ (2)$$

یہ m میں دو درجی مساوات ہے جس کے ریشے منطبق ہونے چاہئیں، کیوں کہ PL مکافی سے دو منطبق نقطوں میں ملتا ہے۔ اس لیے

$$(y^2-4ax_1)(k^2+4ah) = \{ky_1-2a(h+x_1)\}^2$$

جس سے ظاہر ہے کہ (h, k) کا طریق، یعنی ان خطوط مماس کی مساوات جو (x_1, y_1) سے مکافی $y^2=4ax$ پر کھینچے جا سکتے ہیں، حسب ذیل ہیں :

$$(\mathbf{y^2-4ax})(\mathbf{y_1^2-4ax_1}) = \{\mathbf{yy_1-2a(x-x_1)}\}^2$$

یعنی

$$\mathbf{SS_1=T^2}$$

جہاں

$$T \equiv yy_1-2a(x+x_1)\ ,\ S_1 \equiv y_1^2-4ax_1\ ,\ S \equiv y^2-4ax$$

مشق 40

1 . ثابت کیجیے کہ مکافی کا خط مماس، محور اور نقطۂ تماس سے گزرنے والے ماسکی وتر سے برابر زاویہ بناتا ہے۔

2 . اگر مکافی کے $y^2=4ax$ کسی ماسکی وتر کا ایک سرا نقطہ $(at^2, 2at)$ ہے تو دوسرے کے محددات نکالیے اور دکھائیے کہ وتر کی لمبائی $a(t+1/t)^2$ ہے۔

3 . ثابت کیجیے کہ مکافی کے خطوط مماس پر ماسکہ سے کھینچے گئے پائے عمود کا طریق راس پر کھینچا گیا خط

مماس ہے۔ [الہٰ آباد 1946]

4. اگر مکافی $y^2=4ax$ کا خط مماس محور سے T میں ملتا ہے اور راس A پر کھینچے گئے خط مماس سے Y میں، اور $TAYG$ مستطیل ہے، تو دکھائیے کہ G کا طریق $y^2+ax=0$ ہے۔

[رڑکی 1957]

5. مکافی کے کسی نقطہ P پر کھینچا گیا خط مماس مہتمہ سے Q میں اور وتر عمود ماسکی کو بڑھانے پر حاصل ہوئے خط سے R میں ملتا ہے۔ دکھائیے کہ $SQ=SR$ جہاں S مکافی کا ماسکہ ہے۔

6. دکھائیے کہ مکافی کے ماسکی وتر کے ایک سرے پر کھینچا گیا خط مماس دوسرے سرے پر کھینچے گئے عماد کے متوازی ہوتا ہے۔

7. ثابت کیجیے کہ مکافی کے نصف وتر عمود ماسکی کسی بھی ماسکی وتر کے قطعات کا ہم آہنگ اوسط ہے۔

8. دکھائیے کہ مکافی کے ماسکی وتر کی لمبائی مکافی کے راس سے اس کی دوری کے مربع کا برعکس متناسب ہے۔

9. دکھائیے کہ اس نقطہ کا طریق، جس سے مکافی پر کھینچے گئے خطوط مماس ایک دوسرے پر عمود ہیں، مہتمہ ہے۔ [الہٰ آباد 1955]

10. ثابت کیجیے کہ مکافی کے کسی ماسکی وتر کو قطر مان کر کھینچا گیا دائرہ، مہتمہ کو چھوتا ہے۔

[الہٰ آباد 1965]

11. ثابت کیجیے کہ مکافی کے کسی ماسکی نصف قطر کو قطر مان کر کھینچا گیا دائرہ راس پر کھینچے گئے خط مماس کو چھوتا ہے۔ [جبل پور 1961]

12. ثابت کیجیے کہ اگر مکافی $y^2=4ax$ کے ایک جوڑی خطوط مماس کا وتر تماس ماسکہ سے گزرتا ہے، تو خطوط مماس ایک دوسرے پر عمود ہیں اور مہتمہ پر ملتے ہیں۔ [رڑکی 1948]

13. ثابت کیجیے کہ مکافی کے کسی نقطہ کا تحتی عماد ایک مستقل لمبائی کا ہوتا ہے اور نصف وتر عمود ماسکی کے برابر ہوتا ہے۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1961]

14. اگر مکافی کے نقطوں P اور Q پر کھینچے گئے خطوط مماس T میں ملیں، تو ثابت کیجیے کہ TP اور TQ، ماسکہ پر برابر زاویے بناتے ہیں۔ [الہٰ آباد 1959]

15. مکافی کے کسی نقطہ P پر (راس کے علاوہ) کھینچا گیا خط ماس مہتمہ سے A میں اور وترِ عمود ماسکی سے (بڑھائے جانے پر) B میں ملتا ہے۔ دکھائیے کہ A اور B ماسکہ سے برابر دوری پر ہیں۔ [گوالیار 1959]

مشق 41

1. مکافی $y^2=8x$ کے ایک نقطہ کی ماسکی دوری 8 ہے۔ اس کے محددات بتائیے۔
[الٰہ آباد 1957]

2. مکافی $y^2=4bx$ اور $x^2=4by$ کے نقاطِ تقاطع کے محددات نکالیے اور ان کے مشترک وتر کی مساوات معلوم کیجیے۔ [علی گڑھ 1939]

3. مکافی $3x^2+12x-8y=0$ کے راس اور ماسکہ کے محددات، وترِ عمود ماسکی کی لمبائی اور مہتمہ کی مساوات معلوم کیجیے۔ [رڑکی 1962]

4. دکھائیے کہ راس سے گزرنے والے مکافی $y^2=4ax$ کے وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق مکافی $y^2=2ax$ ہے۔ [الٰہ آباد 1965]

5. مکافی $y^2=4ax$ کے داخلی مساوی اضلاع مثلث کے ضلع کی لمبائی نکالیے، جب مثلث کا ایک زاویئی نقطہ مکافی کا راس ہو۔

6. اگر مکافی کے کسی نقطہ P پر کھینچے گئے خط ماس پر ماسکہ S سے کھینچا گیا عمود ST ہو اور مکافی کا راس A ہو، تو ثابت کیجیے کہ $ST^2=AS \cdot SP$ [اجمیر 1954]

7. مکافی $y^2=8x$ کا ایک خط ماس، خطِ مستقیم $y=3x+5$ سے $45°$ کا زاویہ بناتا ہے۔ اس کی مساوات اور نقطۂ تماس نکالیے۔ [علی گڑھ 1966]

8. ثابت کیجیے کہ اس مکافی کی مساوات، جس کے راس اور ماسکہ x-محور پر مبدأ سے بالترتیب a اور a' کی دوری پر ہیں
$y^2=4(a'-a)(x-a)$ ہے۔ [انجینیئرنگ 1962]

9. مکافی $x^2=4ay$ کے اس عماد کی مساوات معلوم کیجیے جو x-محور سے $60°$ کا زاویہ بناتا ہے۔
[راجپوتانہ 1949]

10. کسی نقطہ T سے مکافی پر کھینچے گئے خطوط مماس کے نقاطِ تماس P اور Q ہیں۔ اگر نقطہ P پہ عمود PQ ہو، تو ثابت کیجیے کہ مہتمہ، TP کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہے۔

11. اگر مکافی $y^2=4ax$ کا کوئی وتر محور سے ایسے نقطہ میں ملے جس کی راس سے دوری k ہے، تو ثابت کیجیے کہ (i) وتر کے سروں کے طول کی ضرب k^2 ہے اور (ii) ان کے عرض کی ضرب $-4ak$ ہے۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1960]

12. مکافی $y^2=4x$ کے ان نقطوں پر خطوط مماس کے نقطہ تقاطع کا طریق نکالیے جن کے طول کی نسبت $16:1$ ہے۔

13. مکافی پر تین نقطے P، Q، R ایسے ہیں کہ ان کے عرض جیومیٹریہ تسلسل میں ہیں، تو ثابت کیجیے کہ P اور R پر کھینچے گئے خطوط مماس Q کے عرض پر ملیں گے۔

14. اگر کسی P سے مکافی $y^2=4ax$ پر کھینچے گئے خطوط مماس x محور سے زاویہ θ_1 اور θ_2 بنائیں، تو P کا طریق بتائیے جب کہ

(i) $\tan\theta_1+\tan\theta_2$ مستقل ہے (ii) $\tan\theta_1\tan\theta_2$ مستقل ہے۔

15. ثابت کیجیے کہ مکافی کے وہ وتر جو راس پر زاویہ قائمہ بناتے ہیں، ایک مقررہ نقطہ سے گزرتے ہیں۔

16. ثابت کیجیے کہ کسی نقطہ سے مکافی کے محور کے متوازی کھینچا گیا خط مستقیم اس نقطہ سے کھینچے گئے خطوط مماس کے وتر تماس کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ [راجپوتانہ 1941]

17. دکھائیے کہ مکافی $y^2=4ax$ کے راس سے گزرنے والے اور محور سے زاویہ θ بنانے والے وتر کی لمبائی $4a\cos\theta/\sin^2\theta$ ہے۔

18. دکھائیے کہ اگر مکافی $y^2=4ax$ میں راس سے کھینچے گئے کوئی سے دو عمودی وتروں کی لمبائیاں r_1 اور r_2 ہوں، تو

$$(r_1r_2)^{4/3}=16a^2(r_1^{2/3}+r_2^{2/3})$$

19. ثابت کیجیے کہ مکافی $y^2=4ax$ کے نقطہ P $(at^2, 2at)$ پر کھینچے گئے عماد کے، SP کو قطر مان کر کھینچے گئے دائرہ سے، بنے قطع کی لمبائی $a\sqrt{(1+t^2)}$ ہے، جہاں S ماسکہ ہے۔
[رڑکی 1947]

20. ثابت کیجیے کہ مکافی کے کوئی سے تین خطوط ماس سے بنے مثلث کا عمودی مرکز مہتمہ پر رہتا ہے۔ [الٰہ آباد 1962]

21. ثابت کیجیے کہ مکافی کے داخل مثلث کا رقبہ راسوں پر کھینچے گئے خطوط ماس سے بنے مثلث کا دگنا ہے۔

22. ثابت کیجیے کہ مہتمہ پر واقع نقطوں سے مکافی $y^2=4ax$ پر کھینچے گئے خطوط ماس کے وسطی نقطوں کا طریق $y^2(2x+a)=a(3x+a)^2$ ہے۔

23. مقررہ (h, k) سے گزرنے والے مکافی $y^2=4ax$ کے وتر کھینچے جاتے ہیں۔ دکھائیے کہ ان کے وسطی نقطوں کا طریق $y(y-k)=2a(x-h)$ ہے۔

24. دکھائیے کہ مکافی $y^2=4ax$ کے اس وتر کے وسطی نقطہ کا طریق، جو مبدأ پر زاویہ قائمہ بناتا ہے، $y^2-2ax+8a^2=0$ ہے۔ [الٰہ آباد 1950]

25. مکافی $y^2=4ax$ کے ایسے دو خطوط ماس کے نقطۂ تقاطع کا طریق بتائیے جو ایک دوسرے سے دیا ہوا زاویہ بناتے ہیں۔ [راجپوتانہ 1950]

26. دکھائیے کہ چاہے θ کی قیمت کچھ بھی ہو، خط مستقیم $y=(x-11)\cos\theta-\cos 3\theta$ مکافی $y^2=16x$ پر عماد ہے۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1961]

27. مکافی کے کسی نقطہ P پر عماد منحنی سے پھر نقطہ Q میں ملتا ہے اور PQ کا وسطی نقطہ M ہے۔ دکھائیے کہ P اور M کے عرض کی ضرب مستقل ہے۔ [اجمیر 1954]

28. اگر مکافی کے دو عماد ایک دوسرے کو مکافی کے کسی نقطہ پر کاٹیں، تو ثابت کیجیے کہ ان کے m کی ضرب 2 ہے۔

29. اگر مکافی $y^2=4ax$ پر تین نقطے (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) اور (x_3, y_3) ایسے ہوں کہ ان پر کھینچے گئے عماد ایک نقطہ میں ملتے ہیں، تو دکھائیے کہ $y_1+y_2+y_3=0$ [راجپوتانہ 1939]

30. دکھائیے کہ مکافی $y^2=4ax$ کے دو ایک دوسرے پر عمود عمادوں کے نقطہ تقاطع کا طول کبھی $3a$ سے کم نہیں ہوتا۔ جب طول کم سے کم ہوتا ہے تو [illegible] کیا ہوتا ہے؟

31. ایک خط مستقیم $x^2+y^2=2a^2$ اور $y^2=8ax$ دونوں کو چھوتا ہے۔ اس کی مساوات

معلوم کیجیے۔ [علی گڑھ 1949]

32. منحنیات $y^2=4ax$ اور $x^2+y^2+2ax=0$ کے مشترک خطوط مماس کی مساوات نکالیے۔

[رڑکی 1964]

33. دکھائیے کہ مکافی $y^2=4ax$ اور $x^2=4by$ کے مشترک خط مماس کی مساوات $xa^{1/3}+yb^{1/3}+(a^2b^2)^{1/3}=0$ ہے۔ [الٰہ آباد 1962]

34. نقطہ P سے ایسا خط مستقیم کھینچا جاتا ہے جو مکافی $y^2=4ax$ کے لحاظ سے اس کے قطبی خط پر عمود ہے۔ اگر عمود مکافی $x^2=4by$ کو چھوتا ہے تو ثابت کیجیے کہ P کا طریق خط مستقیم $2ax+by+4a^2=0$ ہے۔ [اجمیر 1962]

35. ماسکہ S والے مکافی کے کسی نقطہ P پر کھینچے گئے خط مماس پر T کوئی نقطہ ہے۔ T سے محور اور PS پر بالترتیب TN اور TL عمود ہیں۔ ثابت کیجیے کہ $TN=SL$

اس کا استعمال کرکے کسی خارجی نقطہ سے مکافی پر دو خطوط مماس کھینچنے کا جیومیٹریہ عمل حاصل کیجیے۔

36. مکافی $y^2=4ax$ کے کسی خط مماس پر راس A سے عمودی خط مستقیم کھینچا جاتا ہے۔ یہ خط مستقیم خط مماس سے نقطہ P میں اور مکافی سے پھر نقطہ Q میں ملتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ $AP.AQ$ مستقل ہے۔ [جبل پور 1960]

باب 12

ناقص

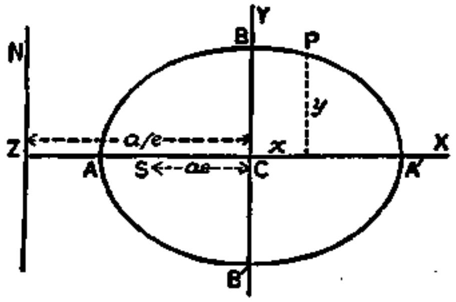
12.1. تعریف :

ناقص ایسا مخروطی ہے جس میں بے مرکزیت اکائی سے کم ہو۔

اس طرح ناقص اس نقطہ کا طریق ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کی ایک مقررہ نقطہ سے (جسے ماسکہ کہتے ہیں) اور ایک معین خط مستقیم سے (جسے مہتمہ کہتے ہیں) دوریوں میں مستقل اور اکائی سے کم نسبت رہتی ہے۔ اس مستقل نسبت کو بے مرکزیت کہتے ہیں۔

12.11. ناقص کی معیاری مساوات :

ناقص کی مساوات اس کی تعریف سے حاصل کرنا۔ مان لیا ZN مہتمہ، S ماسکہ اور e بے مرکزیت ہے۔



شکل 68

ZN پر عمود SZ کھینچیے۔ کیوں کہ $e < 1$ ، اس لیے ہم ZS کو داخلی اور خارجی طور پر $e : 1$ کی نسبت میں تقسیم کر سکتے ہیں۔ مان لیا تقسیم کرنے والے نقطے A اور A' ہیں (جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے) ۔ تو

$$AS = e \cdot ZA, \quad \ldots \quad (1)$$

اور

$$SA' = e \cdot ZA'. \quad \ldots \quad (2)$$

تب ، ناقص کی تعریف سے ظاہر ہے کہ نقطہ A اور A' دونوں ناقص پر ہیں۔

مان لیا AA' کا وسطی نقطہ C ہے اور $AA' = 2a$ تو $AC = a = CA'$

اب AS وغیرہ کو C سے نپی دوریوں کی رکنیت میں ظاہر کرکے رشتے (1) اور (2) حسب ذیل طریقے سے لکھے جا سکتے ہیں :

$$a - SC = e(ZC - a)$$

اور

$$a + SC = e(ZC + a)$$

جوڑنے پر ، $2a = 2e.ZC$ یعنی $ZC = a/e$

اور گھٹانے پر ، $2CS = 2ea$. یعنی $CS = ae$

اب C کو مبدأ ، CA' کو x-محور اور عمودی خط CY کو y-محور مانیے۔ تو ماسکہ S کے محددات $(-ae, 0)$ ہیں اور نہج ZN خط $x = -a/e$ ہے۔

مان لیا ناقص پر P کوئی نقطہ (x, y) ہے۔ تو

$$SP^2 = e^2 \times (\text{ZN سے P کی عمودی دوری})^2$$

اس لیے

$$(x + ae)^2 + (y - 0)^2 = e^2(x + a/e)^2$$

یعنی

$$x^2 + a^2e^2 + y^2 = e^2x^2 + a^2$$

یا

$$x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)$$

$a^2(1 - e^2)$ کی جگہ b^2 لکھ کر ، b^2 سے ہی تقسیم دینے پر یہ مساوات

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ہو جاتی ہے ۔ یہی مطلوبہ مساوات ہے ۔

ضمنی نتیجہ : ناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ کی بے مرکزیت e کو $b^2=a^2(1-e^2)$ کے ذریعے ظاہر کیا جاتا ہے یعنی $e^2=1-b^2/a^2$

12.2. ناقص کی شکل کھینچنا :

ناقص کی شکل حاصل کرنے کے لیے ہم حسب ذیل مساوات کا خاکہ کھینچیں گے :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

اس مساوات کو y کے لیے حل کرنے پر یہ نتیجہ ملتا ہے :

$$y=\pm b\sqrt{(1-x^2/a^2)} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ہم دیکھتے ہیں کہ x کی ہر ایک قیمت کے لیے y کی دو قیمتیں ہیں جو مقدار میں برابر لیکن الٹی علامتوں کی ہیں ۔ لہٰذا ناقص x-محور کے لحاظ سے متشاکل ہے ۔

مساوات (2) سے حاصل ہوئی y کی دو قیمتوں میں سے پہلے ہم مثبت قیمت پر غور کریں گے ۔

جب ، $x=0$ ، تب مساوات (2) سے $y=b$ ملتا ہے ۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ B $(0, b)$ ناقص پر ہے ۔

جیسے جیسے x بڑھتا ہے ویسے ویسے y گھٹتا ہے ، یہاں تک کہ $x=a$ پر $y=0$ اس طرح ہم ناقص کے حصہ BPA' کو نقطہ A' $(a, 0)$ تک کھینچ چکے (§ 12.11 کی شکل دیکھیے) ۔

پھر ، اگر $x>a$ ، تو مساوات (2) سے ظاہر ہے کہ y فرضی ہے ۔ لہٰذا منحنی کا کوئی بھی حصہ A' کی دائیں طرف نہیں ہے ۔

کیوں کہ ناقص x-محور کے لحاظ سے متشاکل ہے؛ اس لیے چوتھے ربع میں منحنی کا حصہ، قوس $A'B'$ ہے، جہاں B' کے محددات $(0, -b)$ ہیں۔

پھر، کیوں کہ مساوات (1) میں صرف x^2 ہے، x نہیں؛ اس لیے x کو y کی رکنیت میں ظاہر کرنے پر معلوم ہوگا کہ y کی ہر ایک قیمت کے لیے x کی دو قیمتیں ہیں جو مقدار میں برابر لیکن علامت میں الٹی ہیں۔ لہٰذا ناقص y-محور کے لحاظ سے بھی متشاکل ہے۔ اس حقیقت سے ہم y-محور کی بائیں طرف کا قوس $B'AB$ کھینچ سکتے ہیں۔

اس طرح ناقص ایک بند منحنی ہے اور ایک ایسے دائرہ جیسا نظر آتا ہے جو ایک قطر کی سمت میں کھینچ گیا ہو اور اس کے عمود قطر کی سمت میں چپٹا ہو گیا ہو۔

نوٹ : اگر ہم (2) میں y کی منفی قیمت لیں تو ہمیں صرف قوس $AB'A'$ ملتا ہے، نہ کہ کوئی نئی شاخ۔

12.3. ماسکے، محاور اور وترِ عمود ماسکی :

تعریف : کسی منحنی کو تب مرکزی منحنی کہتے ہیں جب ایک ایسا نقطہ حاصل ہو سکے جس سے گزرنے والا ہر ایک وتر اس نقطہ پر تنصیف ہو۔ اس نقطہ کو مرکز کہتے ہیں جس سے گزرنے والے سبھی وتر وہاں تنصیف ہوتے ہیں۔ مرکز سے گزرنے والا ہر ایک وتر قطر کہلاتا ہے۔

مان لیا ناقص

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1, \qquad . \quad . \quad . \quad (1)$$

پر کوئی نقطہ (x_1, y_1) ہے، تو

$$x_1^2/a^2+y_1^2/b^2=1. \qquad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ہم (2) سے دیکھتے ہیں کہ نقطہ $(-x_1, -y_1)$ بھی ناقص پر واقع ہے۔ اب نقطوں (x_1, y_1) اور $(-x_1, -y_1)$ کو ملانے والے وتر کا وسطی نقطہ $(0, 0)$ ہے۔ اس طرح مبدأ سے گزرنے والے ہر ایک وتر کا وسطی نقطہ مبدأ ہے۔ لہٰذا، ناقص

مرکزی منحنی ہے اور جب (1) اس کی مساوات ہے تو مبدأ اس کا مرکز ہے۔

کیوں کہ ناقص y-محور کے لحاظ سے متشاکل ہے، اس لیے نقطہ $(-ae, 0)$ پر ایک دوسرا ماسکہ S' ہے (§ 12·4 کی شکل دیکھیے)؛ اور اس کے مطابق ایک دوسری مہتمہ $Z'N'$ ہے جس کی مساوات $x = a/e$ ہے۔ اس ماسکہ اور مہتمہ میں وہی صفت ہے کہ اگر کوئی نقطہ اس طرح حرکت کرے کہ اس کی S' سے دوری، اس کی $N'Z'$ سے دوری کا e گنا رہے، تو اس نقطہ کا طریق بھی ناقص (1) ہی ہوگا۔

اس طرح ہر ایک ناقص کے دو ماسکے اور دو مہتمہ ہوتی ہیں۔

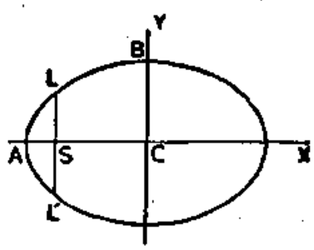
ماسکوں سے گزرنے والا قطر محور اکبر اور اس کا عمودی ناصف قطر محور اصغر کہلاتا ہے۔

§ 12·11 سے ہم دیکھتے ہیں کہ ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ ہیں۔

(i) محور اکبر کی لمبائی $2a$ اور محور اصغر BB' کی لمبائی $2b$ ہے؛

(ii) بے مرکزیت e حسب ذیل رشتے سے ملتی ہے: (بذریعہ § 12·11)

$$e^2=1-b^2/a^2$$



شکل 69

(iii) ماسکے $(-ae, 0)$ اور $(ae, 0)$ ہیں؛ اور

(iv) دونوں مہتمہ کی مساوات $x=-a/e$ اور $x=a/e$ ہیں۔

ماسکہ سے گزرنے والا اور محور اکبر پر عمود وتر کو وتر عمود ماسکی کہتے ہیں۔ اس کی لمبائی نکالنے کے لیے، مان لیا ناقص کی مساوات (1) ہے۔

مان لیا، ماسکہ S سے گزرتا ہوا محور اکبر پر عمود ناقص سے نقطہ L اور L' میں ملتا ہے۔ مان لیا $SL=l$ ؛ تو L کے محددات $(-ae, l)$ ہیں اور یہ ناقص کی مساوات (1) کو مطمئن کرتے ہیں؛ اس لیے

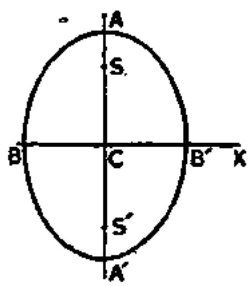
$$(-ae)^2/a^2+l^2/b^2=1$$

جس سے $l=b\sqrt{(1-e^2)}=b^2/a$ بذریعہ (ii)

اس طرح ناقص کا **نصف وترِ عمود ماسکی** = b^2/a

نوٹ : اگر $b>a$ ، تو ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کا محور اکبر لمبائی $2a$ کا اور y-محور کی سمت میں ہے ؛ محور اصغر لمبائی $2b$ کا اور x-محور کی سمت میں ہے۔

اب ماسکے $(0, \pm be)$ ہیں ، بے مرکزیت e کی قیمت $\sqrt{(1-a^2/b^2)}$ ہے اور دونوں



شکل 70

ہادیہ کی مساوات $y=\pm b/e$ ہیں۔

ناقص کی شکل حاشیہ میں دکھائی گئی ہے۔

مثال : اس ناقص کی مساوات معلوم کیجیے جس کے ماسکے نقطوں $(2, 0)$ اور $(-2, 0)$ پر ہیں اور جس کا وترِ عمود ماسکی 6 ہے۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1961]

مان لیا ناقص کے نصف محور اکبر اور نصف محور اصغر بالترتیب a اور b ہیں اور بے مرکزیت e ہے۔

اب ماسکوں کے درمیان دوری ، $2ae$ ، 4 ہے ، اس لیے

$$ae=2 \qquad . \quad . \quad . \quad (1)$$

پھر ، وترِ عمود ماسکی = 6 ؛ اس لیے $2b^2/a=6$ اور کیوں کہ $b^2=a^2(1-e^2)$ ؛ اس لیے

$$a(1-e^2)=3$$

یعنی بذریعہ (1) ، $2(1-e^2)=3e$

یعنی $2e^2+3e-2=0$

لہذا ، $e=\frac{1}{2}$ کیوں کہ دوسرا ریشہ -2 ناقابلِ تسلیم ہے۔

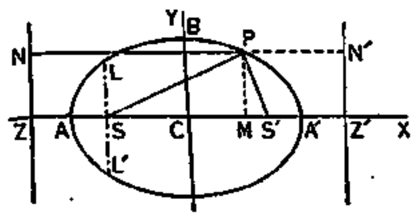
اس لیے $a=2/e=4$ اور $b^2=a^2(1-e^2)=4^2(1-\frac{1}{4})=12$

کیوں کہ ماسکے x-محور پر ہیں اور ان کا وسطی نقطہ مبدأ ہے ، اس لیے ناقص کی مساوات

$\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{12}y^2=1$ ہے۔

12.4. ایک نقطہ کی ماسکی دوریاں :

مان لیا ناقص پر کوئی نقطہ P (x', y') ہے۔ مان لیا ناقص کے ماسکے S اور S' ہیں اور دونوں مہتمہ NZ اور $N'Z'$ ہیں۔



شکل 71

NZ اور $N'Z'$ پر عمود PN اور PN' کھینچیے۔

تو $SP=e.PN$ اور

$S'P=e.PN'$

اس لیے

$$SP+S'P=e.(PN+N'P)=e.NN'$$

$$=e.(2a/e)=2a$$

یعنی ناقص پر کسی نقطہ کی ماسکی دوریوں کا جوڑ محور اکبر کے برابر ہوتا ہے۔

نوٹ : ہمیں ناقص پر نقطہ P (x', y') کی ماسکی دوریوں کی کبھی کبھی ضرورت ہوتی ہے۔ وہ اس طرح ہیں :

$$SP=e.PN=e.MR=e(MC+CZ)=e(x'+a/e)=a+ex'$$

اور

$$S'P=2a-(a+ex')=a-ex'$$

مذکورہ بالا صفت سے ہمیں ناقص کو میکانکی طریقے سے کھینچنے کا ایک آسان طریقہ ملتا ہے۔

مان لیا ہمیں ایسا ناقص کھینچنا ہے جس کا محور اکبر $2a$ اور ماسکے نقطوں S اور S' پر ہوں۔

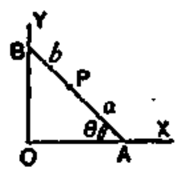
نقطوں S اور S' پر پنوں کے ذریعے ایک ایسے دھاگے کو باندھ دیجیے، جو کھینچنے پر نہ بڑھے؛ دھاگے کی لمبائی S اور S' کے درمیان $2a$ رہے۔ ایک پینسل کی نوک سے دھاگے کو

تان دیجیے اور پینسل کو اس طرح چلائیے کہ دھاگا برابر تنا رہے۔ پینسل کی نوک مطلوبہ ناقص بنائے گی کیوں کہ اس کی ماسکی دوریوں کا جوڑ ہمیشہ $2a$ رہتا ہے۔

حسب ذیل مثال میں ثابت کی گئی صفت کا بھی استعمال ناقص کو مکانکی طریقے سے کھینچنے کے لیے ہوتا ہے۔

مثال: ثابت کیجیے کہ اگر دی ہوئی لمبائی کی ایک سلاخ اس طرح حرکت کرے کہ اس کے سرے دو معین خطوط مستقیم پر رہیں جو ایک دوسرے پر عمود ہیں، تو سلاخ کا ہر ایک نقطہ ایک ناقص بنائے گا۔

معین خطوط مستقیم کو محاور مانیے اور مان لیجیے کہ سلاخ AB پر ایک نقطہ P اس کو دو قطعوں میں تقسیم کرتا ہے، جن کی لمبائیاں a اور b ہیں۔



شکل 72

مان لیجیے سلاخ کی کسی ایک حالت میں x-محور اور سلاخ کے درمیان زاویہ حادہ θ ہے۔

تو سلاخ کے نقطہ P کے محددات حسب ذیل ہیں:

$$y=a\sin\theta \quad ، \quad x=b\cos\theta$$

ان سے θ کو خارج کرنے پر ہمیں $x^2/b^2+y^2/a^2=1$ ملتا ہے۔

یہی نقطہ P کے طریق کی مساوات ہے جو ایک ناقص ظاہر کرتی ہے۔

12.5 ناقص کے لحاظ سے دیے ہوئے نقطہ کی حالت:

نقطہ (x', y') کا ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کے باہر، اس پر یا اس کے اندر ہونا اس پر منحصر ہے کہ رقم $x'^2/a^2+y'^2/b^2-1$ مثبت، صفر یا منفی ہے۔ اس مسئلہ کا ثبوت، §10.5 کے جیسا ہے اور مشق کے طور پر طالب علم کے لیے چھوڑ دیا گیا ہے۔

12.6 ناقص کی عام مساوات:

مان لیا ناقص کی ہادیہ کی مساوات $ax+by+c=0$ ہے، ماسکہ S (h,k) ہے اور

بے مرکزیت e ہے۔

مان لیا ناقص پر (x', y') کوئی ایک نقطہ P ہے اور P سے ہادیہ پر عمود PN ہے۔

تو رشتہ $PS^2 = e^2 . PN^2$ سے ہمیں حسب ذیل مساوات ملتی ہے:

$$(x'-h)^2+(y'-k)^2=e^2(ax'+by'+c)^2/(a^2+b^2)$$

اس مساوات میں سے ڈیشوں کو ہٹانے پر ناقص کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

مثال: اس ناقص کی مساوات نکالیے جس کی ہادیہ $3x-2y+1=0$ ماسکہ $(-2, 1)$ اور بے مرکزیت $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ہے۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1961]

مذکورہ بالا دفعہ سے ناقص کی مساوات حسب ذیل نکلتی ہے:

$$(x-1)^2+(y+2)^2=\tfrac{1}{2}(3x-2y+1)^2/(3^2+(-2)^2)$$

یعنی

$$26(x^2-2x+1+y^2+4y+4)=9x^2+4y^2+1-12xy+6x-4y$$

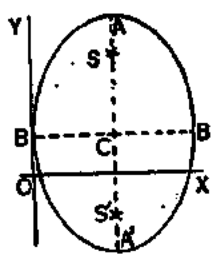
یعنی

$$17x^2+22y^2+12xy-58+108y+129=0$$

عام مساوات کے ذریعے دیے ہوئے ناقص کا خاکہ کھینچنا اس کتاب کی حدود سے باہر ہے۔

جب ناقص کی مساوات میں xy کا کوئی رکن نہ ہو تو محددات کے مبدأ کو بدل کر ناقص کا خاکہ آسانی سے کھینچا جا سکتا ہے (§ 10.6 سے موازنہ کیجیے)۔ طریقہ ایک مثال سے واضح ہو جائے گا۔

مثال: منحنی $2x^2+y^2-8x-2y+1=0$ کے ماسکے اور اس کے نصف محاور کے درمیان لمبائیاں معلوم کیجیے۔ منحنی کا خاکہ بھی کھینچیے۔



شکل 73

دی ہوئی مساوات کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں:

$$2(x-2)^2+(y-1)^2=2(-2)^2+(-1)^2-1 \quad \ldots (1)$$

مبدأ کو نقطہ $(2, 1)$ پر بدلنے کے لیے ہم x کی جگہ $X+2$ اور y کی جگہ $Y+1$ لکھتے ہیں (§ 5.8 دیکھیے)۔ اس طرح (1) حسب ذیل ہو جاتی ہے۔

$$2X^2+Y^2=8$$

یا X کی جگہ x اور Y کی جگہ y رکھنے پر،

$$\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{1}{8}y^2=1$$

یہ ایک ناقص کی مساوات ہے جس کا محور اصغر نئے x-محور کی سمت میں اور محور اکبر نئے y-محور کی سمت میں ہے۔ یہ نصف محاور بالترتیب لمبائیوں 2 اور $2\sqrt{2}$ کے ہیں۔

بے مرکزیت $=\sqrt{(1-(2/2\sqrt{2})^2)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$

اور نئے محاور کے لحاظ سے ماسکوں کے محددات یہ ہیں :

$(0, \pm 2\sqrt{2}.\sqrt{\tfrac{1}{2}})$ یعنی $(0, \pm 2)$

لہٰذا اصل محاور کے لحاظ سے، ماسکوں کے محددات حسب ذیل ہیں :

$(0+2, \pm 2+1)$ یعنی $(2, 3)$ اور $(2, -1)$

مشق 42

1 اگر بے مرکزیت صفر ہو تو دکھائیے کہ ناقص ایک دائرہ ہو جاتا ہے۔ [علی گڑھ 1945]

محور اکبر اور محور اصغر کو بالترتیب x-محور اور y-محور مان کر اس ناقص کی مساوات بتائیے جس میں :

2. محور اکبر $= 3$ ، محور اصغر $= \tfrac{8}{3}$

3. ماسکوں کے درمیان کی دوری $= 8$ ، اور دونوں مِحتمہ کے درمیان کی دوری $= 18$

4. دو نقطے $(1, 4)$ اور $(-6, 1)$ ناقص پر ہیں۔

5. (i) ناقص $2x^2+3y^2=1$ کا وتر عمود ماسکی نکالیے۔ [الٰہ آباد 1950]

(ii) اس کی بے مرکزیت اور اس کے ماسکوں کے محددات بھی نکالیے۔ [الٰہ آباد 1952]

6. ناقص $\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{1}{25}y^2=1$ کی بے مرکزیت معلوم کیجیے۔

7. دکھائیے کہ $4x^2+6y^2-9=0$ ایک ناقص کی مساوات ہے۔ اس کے محاور کی لمبائیاں اور بے مرکزیت نکالیے۔ [علی گڑھ 1949]

8. اگر ناقص پر P کوئی نقطہ ہے، C مرکز، PN محور اکبر پر P سے عمود، A اور A'

راس اور a اور b بالترتیب نصف محور اکبر اور نصف محور اصغر تو ثابت کیجیے کہ

$PN^2 : AN.A'N :: b^2 : a^2$ [بنارس 1945]

9. اس ناقص کی مساوات معلوم کیجیے جس کے محاور، محاور محددات کی سمت میں ہوں، وتر عمود ماسکی 5 اور بے مرکزیت $\frac{2}{3}$ ہو۔ [علی گڑھ 1956]

10. ایک ناقص کا وتر عمود ماسکی اس کے محور اکبر کا آدھا ہے؛ بے مرکزیت نکالیے۔

[اجین 1961]

11. ناقص کے محور اصغر کے ایک سرے کی ماسکی دوری k ہے، اور ماسکوں کے درمیان کی دوری $2h$ ہے۔ اس کے نصف محاور کی لمبائیاں نکالیے۔

12. اس ناقص کی مساوات معلوم کیجیے جس کا

(i) ماسکہ $(6, 7)$ ہو، مہتمہ $x+y+2=0$ اور بے مرکزیت $\sqrt{\frac{1}{3}}$؛

[الٰہ آباد 1946]

(ii) ایک ماسکہ $(-1, 1)$، مطابق مہتمہ $x-y+3=0$ اور بے مرکزیت $\frac{1}{2}$؛

[علی گڑھ 1961]

(iii) ماسکے $(3, 2)$ اور $(1, -2)$ ہوں اور محور اکبر 10

13. ناقص $\frac{1}{25}(x-3)^2+\frac{1}{16}y^2=1$ کا خاکہ کھینچیے۔

14. بتائیے کہ نقطہ $(4, -3)$ ناقص $5x^2+7y^2=140$ کے اندر ہے یا باہر۔

[علی گڑھ 1961]

15. دکھائیے کہ منحنی $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ خطوط $x^2=a^2$ اور $y^2=b^2$ سے بنے مستطیل کے اندر ہے اور اس کے ضلعوں کو چھوتا ہے۔

16. 20 انچ کی ایک سلاخ کے سرے دو عمودی معین خطوط مستقیم پر حرکت کرتے ہیں۔ اگر اس سلاخ پر نشان زدہ ایک نقطہ ایک سرے سے 4 انچ دوری پر ہو تو اس نقطہ سے بنے ہوئے ناقص کی بے مرکزیت بتائیے۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1961]

17. ناقص $25x^2+16y^2=1600$ کے نقطہ $(4\sqrt{3}, 5)$ تک کھینچے گئے ماسکی نصف

قطروں کی مساوات اور ان کی لمبائیاں معلوم کیجیے :

18 . اس ناقص کی مساوات نکالیے جس کا ایک ماسکہ $(-1, 1)$ پر ہو، مطابق نہایت خط مستقیم $x-y+4=0$ ہو اور بے مرکزیت $1/\sqrt{2}$ ہو۔ [رڑکی 1946]

12·7. دیے ہوئے نقطہ پر خط مماس کی مساوات :

مان لیا ناقص کی مساوات

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ہے اور وہ نقطہ P جس پر خط مماس نکالنا ہے (x_1, y_1) ہے۔ کیوں کہ نقطہ P ناقص پر ہے ؛ اس لیے

$$x_1^2/a^2+y_1^2/b^2=1 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

(1) کا x کے لحاظ سے تفرقی ضربیہ نکالنے پر،

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

یعنی

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

اس طرح نقطہ (x_1, y_1) پر dy/dx کی قیمت $-b^2x_1/a^2y_1$ ہے اور نقطہ P پر خط مماس کی مساوات یہ ہے :

$$y-y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$$

یعنی

$$\frac{y_1(y-y_1)}{b^2}=-\frac{x_1(x-x_1)}{a^2}$$

یا بذریعہ (1) $\quad yy_1/b^2+xx_1/a^2=x_1^2/a^2+y_1^2/b^2=1$

اس طرح ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کے نقطہ (x_1, y_1) پر خط مماس کی مساوات حسب ذیل ہے :

$$\mathbf{xx_1/a^2+yy_1/b^2=1}$$

یہ مساوات ناقص کی مساوات سے § 8.3 کے اصول سے لکھی جا سکتی ہے۔

ضمنی نتیجہ : نقطوں $(a, 0)$ اور $(0, b)$ پر خطوط مماس کی مساوات بالترتیب $x=a$ اور $y=b$ ہیں۔ اس طرح محور اکبر (یا اصغر) کے ایک سرے پر خط مماس اس محور پر عمود ہوتا ہے۔

12.8. ناقص پر عماد :

مان لیا ناقص کی مساوات $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ ہے اور (x_1, y_1) اس پر کوئی نقطہ P ہے۔

تو P پر خط مماس کی مساوات

$$xx_1/a^2+yy_1/b^2=1 \qquad . \; . \; . \; (1)$$

ہے۔

P پر عماد (x_1, y_1) سے گزرتا ہے اور (1) پر عمود ہے۔ لہٰذا اس کی مساوات یہ ہے :

$$(y-y_1)x_1/a^2=(x-x_1)\,y_1/b^2$$

مناسب عبارت سے تقسیم دینے پر ہم دیکھتے ہیں کہ ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کے نقطہ (x_1, y_1) پر عماد کی مساوات حسب ذیل ہے :

$$\mathbf{\frac{x-x_1}{x_1/a^2}=\frac{y-y_1}{y_1/b^2}}$$

مثال : ناقص $x^2+4y^2=8$ کے نقطہ $(2, 1)$ پر کھینچے گئے عماد سے ناقص کے اندر مقطوعہ وتر کی لمبائی نکالیے۔

نقطہ $(2, 1)$ پر خط مماس $2x+4y=8$ ہے۔

لہٰذا عمود $2(x-2)=y-1$

یعنی $y=2x-3$ ہے۔

یہ ناقص سے پھر وہاں ملتا ہے جہاں

$x^2+4(2x-3)^2=8$ یعنی $17x^2-48x+28=0$

جس سے $x=2$ یا $x=\frac{14}{17}$ اور $y=1$ یا $y=-\frac{23}{17}$

$\therefore$ وتر کی لمبائی $=\sqrt{\{(2-\frac{14}{17})^2+(1+\frac{23}{17})^2\}}=\frac{20}{17}\sqrt{5}$

12·9. m کی رکنیت میں خط مماس :

ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کے خط مماس کی مساوات اس کے ڈھال کی رکنیت میں نکالنا۔ مان لیا ناقص

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1 \quad \ldots \quad (1)$$

کے خط مماس کی مساوات

$$y=mx+c \quad \ldots \quad (2)$$

ہے۔ تو ہمیں c کی قیمت m کی رکنیت میں اس شرط سے حاصل کرنی ہے کہ خط مستقیم (2) منحنی (1) سے دو منطبق نقطوں میں ملتا ہے۔

اب (1) اور (2) کے نقاط تقاطع کے طول اس مساوات سے ملیں گے جو (1) اور (2) سے y کو خارج کرنے پر حاصل ہوتی ہے۔ وہ مساوات حسب ذیل ہے:

$$x^2/a^2+(mx+c)^2/b^2=1$$

یعنی

$$x^2(b^2+a^2m^2)+2a^2cmx+a^2(c^2-b^2)=0 \quad \ldots \quad (3)$$

[کیوں کہ مساوات (3) دو درجی ہے، اس لیے ہر ایک خط مستقیم ناقص کو دو نقطوں میں کاٹتا ہے جو جدا جدا، منطبق یا فرضی ہو سکتے ہیں۔]

خط مستقیم (2) کے ناقص (1) کو چھونے کی شرط وہی ہے جو (3) کے ریشوں کے منطبق ہونے کی، جس سے

$$(a^2cm)^2-(b^2+a^2m^2)a^2(c^2-b^2)=0$$

یعنی

$$c=\sqrt{(a^2m^2+b^2)}$$

جہاں جذر کی کوئی بھی علامت لی جاسکتی ہے۔

c کی یہ قیمت (2) میں رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ خط مستقیم

$$\mathbf{y=mx+\sqrt{(a^2m^2+b^2)}}$$

ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, کا خط مماس ہے، m کی قیمت یا جذر کی علامت چاہے کچھ بھی ہو۔

شرطِ مماس :

مذکورہ بالا دفعہ سے ظاہر ہے کہ خط مستقیم $y=mx+c$ کے ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کو چھونے کی شرط یہ ہے کہ

$$c=\sqrt{(a^2m^2+b^2)}$$

اگر دیے ہوئے خط مستقیم کی مساوات $lx+my+n=0$ ہو تو ہم اسے اس طرح لکھ سکتے ہیں:

$$y=-(l/m)xy-(n/m)$$

اور اس طرح شرط مماس حسب ذیل ہوجاتی ہے :

$$n^2/m^2=a^2l^2/m^2+b^2$$

یعنی

$$a^2l^2+b^2m^2=n^2$$

نوٹ : m کی دی ہوئی قیمت کے لیے ناقص کے دو خطوط مماس ہیں

یعنی $y=mx+\sqrt{(a^2m^2+b^2)}$ اور $y=mx-\sqrt{(a^2m^2+b^2)}$

اس لیے دیے ہوئے خط مستقیم کے متوازی ناقص کے دو خطوط مماس کھینچے جاسکتے ہیں۔ یہ خطوط مماس

ناقص کے مرکز سے برابر دوری پر ہیں۔

مثال : اگر ناقص کے محور اصغر پر مرکز سے ماسکوں کے برابر دوری پر دو نقطے لیے جائیں تو ثابت کیجیے کہ ان نقطوں سے ناقص کے کسی خط مماس پر کھینچے گئے عمودوں کے مربعوں کا جوڑ مستقل ہوگا۔
[الٰہ آباد 1964]

مان لیا ناقص کی مساوات $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ ہے۔

تو مرکز سے ایک ماسکہ کی دوری $\sqrt{(a^2-b^2)}$ ہے، اور محور اصغر پر وہ دو نقطے $\{0, \pm\sqrt{(a^2-b^2)}\}$ ہیں۔

اب ناقص کا کوئی بھی خط مماس $y=mx+\sqrt{(a^2m^2+b^2)}$ ہے، جہاں m ایک پیرامیٹر ہے۔

دیے ہوئے نقطوں سے اس خط مماس پر کھینچے گئے عمودوں کے مربعوں کا جوڑ =

$$\left\{\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}-\sqrt{(a^2m^2+b^2)}}{\sqrt{(1+m^2)}}\right\}^2+\left\{\frac{-\sqrt{(a^2-b^2)}-\sqrt{(a^2m^2+b^2)}}{\sqrt{(1+m^2)}}\right\}^2$$

$$=2(a^2-b^2+a^2m^2+b^2)/(1+m^2)$$

$$=2a^2$$

جو مستقل ہے، کیوں کہ اس میں متغیر m نہیں ہے۔

مشق 43

1. حسب ذیل ناقص پر خط مماس کی مساوات دی ہوئی حالت میں بتائیے :

(i) $2x^2+3y^2=14$ کے نقطہ $(1, 2)$ پر

(ii) $9x^2+25y^2=225$ کے پہلے ربع میں وتر عمود ماسکی کے سرے پر۔

(iii) $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کے جو محور اکبر سے $60°$ کا زاویہ بناتا ہے۔
[الٰہ آباد 1957]

(iv) $9x^2+16y^2=144$ کے جو خط $y=x+4$ کے متوازی ہے۔
[الٰہ آباد 1956]

2. ناقص $\frac{1}{4}x^2+y^2=1$ کے ذریعہ خط $y=x+1$ سے کٹے وتر کی لمبائی اور اس کا

وسطی نقطہ معلوم کیجیے۔ [علی گڑھ 1958]

3. ناقص $\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{4}y^2=1$ کے ذریعے خط $x+3y-5=0$ سے کٹے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے

4. اگر ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, کے خط مماس کی مساوات $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ ہو، تو ثابت کیجیے کہ $p^2=a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha$ [الٰہ آباد 1962]

5. اگر ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کا کوئی خط مماس محاور پر لمبائی h اور k کے داخلی قطعے کاٹے، تو ثابت کیجیے کہ

$$a^2/h^2+b^2/k^2=1$$ [الٰہ آباد 1966]

6. ثابت کیجیے کہ ناقص کے دونوں وتر عمود ماسکی کے سروں پر کھینچے گئے خطوط مماس، محور اور دونوں مہتمہ کے کسی ایک نقطۂ تقاطع سے گزرتے ہیں۔

7. اگر ناقص کے وتر عمود ماسکی کے ایک سرے پر عماد محور اصغر کے ایک سرے سے گزرے تو دکھائیے کہ منحنی کی بے مرکزیت مساوات $e^4+e^2-1=0$ سے ملتی ہے۔ [الٰہ آباد 1958]

8. اگر ناقص $16x^2+11y^2=256$ کے نقطہ $\{4\cos\phi, (16/\sqrt{11})\sin\phi\}$ پر کھینچا گیا خط مماس دائرہ $x^2+y^2-2x=15$ کا بھی خط مماس ہو، تو ϕ کی قیمت نکالیے۔ [رڑکی 1942]

9. دکھائیے کہ ناقص $\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{6}y^2=1$ اور دائرہ $x^2+y^2=6$ کے نقاطِ تقاطع پر خطوط مماس کا درمیانی زاویہ $\tan^{-1}(\sqrt{\frac{1}{2}})$ ہے۔ [الٰہ آباد 1946]

10. ایک ناقص پر کوئی نقطہ P ہے اور اس کا ایک ماسکہ S ہے۔ S پر نصف وتر عمود ماسکی SL ہے۔ اگر P کا عرض MP، L پر کھینچے گئے خط مماس سے Q میں ملتا ہے، تو ثابت کیجیے کہ $MQ=SP$ ۔ [دہلی پری انجینیرنگ 59]

11. ثابت کیجیے کہ ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کے ذریعے خط $y=mx+c$ سے کٹے وتر کی لمبائی اور وسطی نقطہ بالترتیب یہ ہیں:

$$2b\sqrt{\left\{\left(1+\frac{a^2-b^2}{a^2m^2+b^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{a^2m^2+b^2}\right)\right\}}$$

اور

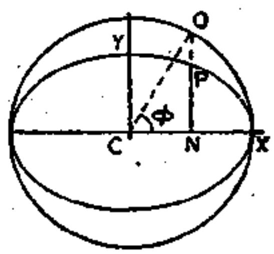
$$\left(-\frac{a^2mc}{a^2m^2+b^2},\ \frac{b^2c}{a^2m^2+b^2}\right)$$

باب 13

ناقص (مسلسل)

13·1 . معاون دائرہ :

تعریف : ناقص کے محور اکبر کو قطر مان کر کھینچے گئے دائرہ کو ناقص کا معاون دائرہ کہتے ہیں۔



شکل 74

مان لیا ناقص پر P کوئی نقطہ ہے اور PN ناقص محور اکبر پر عمود ہے مان لیا NP بڑھانے پر معاون دائرہ سے Q میں ملتا ہے تو P اور Q مطابق نقطے کہلاتے ہیں۔

ناقص اور اس کے معاون دائرہ کے مطابق نقطوں کی محور اکبر سے دوریوں میں رشتہ نکالنا۔ مان لیا ناقص کی مساوات

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1 \qquad . \; . \; . \quad (1)$$

ہے ؛ تو معاون دائرہ کی مساوات

$$x^2+y^2=a^2 \qquad . \; . \; . \quad (2)$$

ہے۔

مان لیا (1) پر $(x_1, \; y_1)$ کوئی نقطہ P ہے اور (2) پر (x_1, y_2) مطابق نقطہ Q ہے۔ تو

$$x_1^2/a^2+y_1^2/b^2=1$$

اور

$$x_1^2/a^2+y_2^2/a^2=1$$

گھٹانے پر

$$y_2^2/a^2 = y_1^2/b^2$$

جس سے

$$y_2/y_1 = a/b$$

اس طرح ناقص پرکسی نقطہ کی اورمعاون دائرہ پراس کے مطابق نقطہ کی ناقص سے دوریاں مستقل نسبت میں رہتی ہیں۔

ضمنی نتیجہ : مذکورہ بالا نتیجے سے ناقص کی یہ تعریف کی جاسکتی ہے : دائرہ کے کسی قطر پر دائرہ کے نقطوں سے عمود کھینچیے ؛ تو ان نقطوں کا طریق جو ان عمودوں کو ایک دی ہوئی نسبت میں تقسیم کرتے ہیں ، ناقص ہے ۔ بہ الفاظ دیگر، اگر دائرہ کا ہر ایک عرض کسی مقررہ نسبت میں بدل دیا جائے تو حاصل ہوا منحنی ایک ناقص ہے ۔ اگر عمودوں کو کسی مقررہ نسبت میں داخلی طور پر تقسیم کیا جائے تو قطر محور اکبر ہے اور دیا ہوا دائرہ معاون دائرہ۔

13.2 . بے مرکز زاویہ:

تعریف : ناقص کے کسی نقطہ کا بے مرکز زاویہ وہ زاویہ ہے جو معاون دائرہ کے مطابق نقطہ تک کھینچا گیا نصف قطر ناقص سے بناتا ہے ۔ یہ زاویہ عام طور پر گریک لفظ ϕ (فائی) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

§ 13.1 کی شکل میں P کا بے مرکز زاویہ $\angle QCN$ ہے ۔

اب ہم ناقص پر واقع کسی نقطہ کے محددات کو بے مرکز زاویہ ϕ کی رکنیت میں نکالیں گے۔

قائمہ زاویہ مثلث QCN میں

$\angle QCN = \phi$ اور $CQ = a$

اس لیے

$$CN = a\cos\phi$$

پھر

$$NQ = a\sin\phi$$

اس لیے

$$NP = (b/a)NQ = (b/a)a\sin\phi = b\sin\phi$$

اس طرح ناقص کے کسی نقطہ کے محددات

$$(\mathbf{a}\cos\phi,\ \mathbf{b}\sin\phi)$$

ہیں۔

ناقص پر واقع کسی نقطہ کے یہ پیرامیٹری محددات ہیں اور ϕ پیرامیٹر ہے۔ نقطہ $(a\cos\phi, b\sin\phi)$ مختصراً نقطہ ϕ کہلاتا ہے۔

اگر ہم § 13·1 کے (1) میں $x=a\cos\phi$ رکھیں تو ہمیں $y=b\sin\phi$ ملتا ہے۔ لہٰذا ہم صرف ناقص کی مساوات سے بھی پیرامیٹری محددات نکال سکتے ہیں۔

13·3. نقطہ ϕ پر خط مماس اور عماد :

ویسے تو ہم نقطہ (x', y') پر خط مماس اور عماد کی مساوات میں x' اور y' کی جگہ بالترتیب $a\cos\phi$ اور $b\sin\phi$ رکھ کر نقطہ ϕ پر مطلوبہ مساوات حاصل کر سکتے ہیں ؛ لیکن ہم نقطہ ϕ پر خط مماس اور عماد کی مساوات جداگانہ طور پر بھی حسب ذیل طریقے سے حاصل کر سکتے ہیں۔

مان لیا ناقص کی مساوات $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ ہے اور اس پر دو نقطوں کے بے مرکز زاویے ϕ اور ϕ' ہیں۔ تو ان نقطوں کے محددات $(a\cos\phi, b\sin\phi)$ اور $(a\cos\phi', b\sin\phi')$ ہیں اور ان کو ملانے والے خط مستقیم کی مساوات حسب ذیل شکل میں لکھی جا سکتی ہے :

$$y-b\sin\phi=\frac{b(\sin\phi'-\sin\phi)}{a(\cos\phi'-\cos\phi)}\,(x-a\cos\phi)$$

یعنی

$$bx(\sin\phi-\sin\phi')+ay(\cos\phi'-\cos\phi)+ab\sin(\phi'-\phi)=0$$

$2ab\sin\frac{1}{2}(\phi'-\phi)$ سے تقسیم دینے پر ہم دیکھتے ہیں کہ نقطوں ϕ اور ϕ' کو ملانے والے وتر کی مساوات حسب ذیل ہے :

$$(\mathbf{x}/\mathbf{a})\cos\tfrac{1}{2}(\phi+\phi')+(\mathbf{y}/\mathbf{b})\sin\tfrac{1}{2}(\phi+\phi')=\cos\tfrac{1}{2}(\phi-\phi')$$

اب مان لیا ϕ'، ϕ کی جانب بڑھتا ہے؛ تو ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ ϕ پر خط مماس کی مساوات یہ ہے :

$$(x/a)\cos\phi+(y/b)\sin\phi=1$$

پھر، نقطہ ϕ سے گزرنے والے اور خط مماس پر عمود خط یہ ہے :

$$a\sec\phi(x-a\cos\phi)-b\operatorname{cosec}\phi(y-b\sin\phi)=0$$

اس لیے نقطہ ϕ پر عماد کی مساوات حسب ذیل ہے :

$$ax\sec\phi-by\operatorname{cosec}\phi=a^2-b^2$$

13.31. ناقص پر قضیے :

ناقص پر کچھ قضیے تحلیلی طور پر ذیل میں ثابت کیے گئے ہیں :

(I) ناقص کے کسی نقطہ پر خط مماس اور عماد اس نقطہ کے ماسکی نصف قطروں کے درمیانی زاویوں کے ناصف ہیں۔

مان لیا ناقص کی مساوات $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ ہے اور دیا ہوا نقطہ P (x_1, y_1) ہے۔
مان لیا P پر خط مماس اور عماد x-محور سے T اور G میں ملتے ہیں اور مان لیا ماسکے S اور S' ہیں۔
تو عماد PG کی مساوات یہ ہے :

$$a^2(x-x_1)/x_1=b^2(y-y_1)/y_1$$

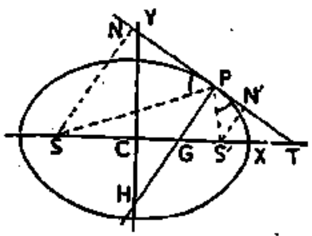
$y=0$ رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$CG=x_1(1-b^2/a^2)=x_1e^2$$

$$\therefore\ SG=SC+CG=ae+e^2x_1$$

$$=e(a+ex_1)$$

$PS=e$ (مہتمہ سے P کی دوری)



شکل 75

$$=e(a/e+x_1)=a+ex_1$$

اس لیے

$$SG=e\,.\,SP$$

اسی طرح

$$GS'=e\,.\,PS'$$

لہٰذا $SP : PS' :: SG : GS'$

یعنی عماد PG ماسکی نصف قطروں کے درمیانی $\angle SPS'$ کا ناصف ہے۔

خط مماس PT ، خط مستقیم PG پر عمود ہونے کی وجہ سے ماسکی نصف قطروں کے متصل زاویہ کا ناصف ہے۔

نوٹ : اس صفت سے ظاہر ہے کہ S سے نکلنے والی روشنی کی کرنیں، ناقص کے مختلف نقطوں پر انعکاس کے بعد، S' سے گزریں گی۔

(2) ناقص کے کسی خط مماس پر ماسکوں سے کھینچے گئے عمودوں کی ضرب نصف محور اصغر کے مربع کے برابر ہوتی ہے اور ان عمودوں کے پائے معاون دائرہ پر ہوتے ہیں۔

مان لیا $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کسی ناقص کی مساوات ہے۔ تو اس پر کوئی بھی خط مماس یہ ہے :

$$y=mx+\sqrt{(a^2m^2+b^2)} \quad \ldots \quad (1)$$

(i) ماسکوں $\{\pm\sqrt{(a^2-b^2)}, 0\}$ سے (1) پر کھینچے گئے عمودوں کی ضرب

$$=\frac{m\sqrt{(a^2-b^2)}+\sqrt{(a^2m^2+b^2)}}{\sqrt{(1+m^2)}}\times\frac{-m\sqrt{(a^2-b^2)}+\sqrt{(a^2m^2+b^2)}}{\sqrt{(1+m^2)}}$$

$$=\{-m^2(a^2-b^2)+(a^2m^2+b^2)\}/(1+m^2)$$

$$=(m^2b^2+b^2)/(1+m^2)=b^2$$

(ii) ماسکہ S' $\{\sqrt{(a^2-b^2)}, 0\}$ سے گزرنے والا اور (1) پر عمود خط

$$x+my=\sqrt{(a^2-b^2)} \quad \ldots \quad (2)$$

ہے، اور پائے عمود N' خطوط (1) اور (2) کا نقطۂ تقاطع ہے۔

لہٰذا N' کے محددات (1) اور (2) کے مربعوں کو جوڑنے سے حاصل ہوئی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں - یہ مساوات حسب ذیل ہے :

$$(y-mx)^2+(x+my)^2=a^2m^2+b^2+a^2-b^2$$

یعنی

$$(y^2+x^2)(1+m^2)-a^2(m^2+1)$$

یا

$$x^2+y^2=a^2$$

اس طرح معادن دائرہ پر واقع ہے۔

مشق 44

1. اگر ناقص کے کسی ماسکی وتر کے سروں کے بے مرکز زاویے θ اور ϕ ہیں، تو ثابت کیجیے کہ

$$\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\phi)=e\cos\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)$$ [الٰہ آباد 1959]

2. ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ پر دو نقطوں P اور Q کے بے مرکز زاویے θ اور ϕ ہیں - اگر نقطوں P اور Q سے گزرنے والا وتر، ماسکہ S سے گزرتا ہے اور S' ناقص کا دوسرا ماسکہ، تو ثابت کیجیے کہ

(i) $SP.S'P=a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta$

(ii) $4a=$ $\triangle S'PQ$ کا احاطہ

(iii) $(a^2-b^2)\cos^2\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)=a^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\theta-\phi)$. [جبل پور 1960]

(iv) $\tan\tfrac{1}{2}\theta\,.\,\tan\tfrac{1}{2}\phi+(1-e)/(1+e)=0$ [دہلی پری انجینیرنگ 1959]

3. اگر α اور β بے مرکز زاویوں والے نقطوں کو ملانے والا وتر (chord) ناقص کے محور اکبر کو مرکز سے دوری d پر کاٹتا ہے، تو دکھائیے کہ

$$\tan\tfrac{1}{2}\alpha\tan\tfrac{1}{2}\beta=(d-a)/(d+a)$$

جہاں $2a$ محور اکبر کی لمبائی ہے۔

4. اگر ناقص کے محور اکبر پر مرکز سے دو ہم فصل نقطوں سے گزر کر دو وتر (chords) کھینچے جائیں،

تو دکھائیے کہ

$$\tan \tfrac{1}{2}\alpha \tan \tfrac{1}{2}\beta \tan \tfrac{1}{2}\gamma \tan \tfrac{1}{2}\delta = 1$$

جہاں α ، β ، γ ، δ وتروں کے سروں کے بے مرکز زاویے ہیں۔

5. ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کے ایک نقطہ P پر خط مماس اور عماد محور اکبر سے T اور T' میں ملتے ہیں اور $TT'=a$۔ ثابت کیجیے کہ P کا بے مرکز زاویہ θ حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتا ہے :

$$e^2 \cos^2 \theta \pm \cos \theta - 1 = 0$$

جہاں e ناقص کی بے مرکزیت ہے۔

6. دکھائیے کہ ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کے نقطوں α ، β کو ملانے والا وتر

(i) کسی راس پر زاویہ قائمہ تب بنائے گا جب

$$\tan \tfrac{1}{2}\alpha \tan \tfrac{1}{2}\beta = -a^2/b^2$$

(ii) مرکز پر تب زاویہ قائمہ بنائے گا جب

$$\tan \alpha \tan \beta = -a^2/b^2$$

7. دکھائیے کہ ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ پر مہتمہ اور محور اکبر کے نقطۂ تقاطع سے کھینچا گیا خط مماس محور اصغر کو وہاں کاٹتا ہے جہاں معاون دائرہ کاٹتا ہے۔

8. ناقص پر نقطوں کے ایسے جوڑے لیے جاتے ہیں جن کے بے مرکز زاویوں کا جوڑ مستقل ہے۔ ثابت کیجیے کہ ان نقطوں پر کھینچے گئے خطوط مماس کے نقطۂ تقاطع کا طریق ناقص کے مرکز سے گزرنے والا ایک خط مستقیم ہے۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1961]

9. اگر ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ پر دو نقطوں کے بے مرکز زاویوں کا فرق $\tfrac{1}{2}\pi$ ہے، تو ثابت کیجیے کہ ان نقطوں پر کھینچے گئے خطوط مماس اسی بے مرکزیت اور اسی مرکز والے ایک ناقص پر ملتے ہیں۔ [رڑکی 1962]

10. ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ پر تین نقطے بے مرکز زاویوں θ ، ϕ ، ψ کے ہیں۔ ان سے بنے مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے؛ اور ثابت کیجیے کہ اگر یہ زاویے $\tfrac{2}{3}\pi$ ، $\tfrac{1}{3}\pi$ اور

$\frac{2}{3}\pi$ ہوں اور $a=2$ ، $b=\sqrt{3}$ تو مثلث کا رقبہ 1·5 مربع اکائی ہے۔
[رڑکی 1948]

11. نصف قطر r کے کسی دائرہ کا مرکز وہی ہے جو ایک ناقص کا ہے، جس کے نصف محاور a اور b ہیں۔ ثابت کیجیے کہ ان کا مشترک خط مماس محور اکبر سے

$$\tan^{-1}\sqrt{\{(r^2-b^2)/(a^2-r^2)\}}$$

کا زاویہ بناتا ہے۔ اس خط مماس کی لمبائی بھی معلوم کیجیے۔ [رڑکی 1959]

12. ثابت کیجیے کہ کسی ناقص کی بے مرکزیت

$$\frac{2\cot\omega}{\sin 2\theta}=\frac{e^2}{\sqrt{(1-e^2)}}$$

سے حاصل ہوتی ہے، جہاں ω ان زاویوں میں ایک ہے جو بے مرکز زاویوں θ اور $\frac{1}{2}\pi+\theta$ والے نقطوں پر عمادوں کے درمیان بنتے ہیں۔ [جبل پور 1962]

13·4. ناظم دائرہ :

ناقص کے دو عمودی خطوط مماس کے نقطۂ تقاطع کا طریق نکالنا۔ مان لیا ناقص کی مساوات

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1$$

ہے اور اس کے دو عمودی خطوط مماس نقطہ (x_1, y_1) پر ملتے ہیں۔
اب ناقص کا کوئی خط مماس

$$y=mx+\sqrt{(a^2m^2+b^2)}$$

یعنی

$$y-mx=\sqrt{(a^2m^2+b^2)} \quad \ldots \quad (1)$$

ہے اور اس پر عمود خط مماس یہ ہے :

$$y-(-1/m)x=\sqrt{\{a^2(-1/m)^2+b^2\}}$$

یعنی

$$my+x=\sqrt{(a^2+b^2m^2)} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

(1) اور (2) کے نقطۂ تقاطع کا طریق ان مساوات سے m کو خارج کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔ اس کے لیے ہم ان کے مربعوں کو جوڑتے ہیں، تب

$$(y^2+x^2)\,(m^2+1)=(a^2+b^2)\,(1+m^2)$$

(m^2+1) کو کاٹنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کے عمودی خطوط مماس کے نقطۂ تقاطع کا طریق

$$\mathbf{x^2+y^2=a^2+b^2}$$

ہے، جو ایک دائرہ ہے۔

تعریف : وہ دائرہ، جس پر ناقص کے عمودی خطوط مماس کے نقاطِ تقاطع رہتے ہیں، ناقص کا ناظم دائرہ کہلاتا ہے۔

13·5. خطوط مماس کا جوڑا :

§ 11·1 اور § 11·9 کے طریقوں سے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ (i) عام طور پر ایک نقطہ سے ناقص پر دو خطوط مماس کھینچے جاسکتے ہیں۔

(ii) نقطہ (x_1, y_1) سے ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کے جو دو خطوط مماس کھینچے جاسکتے ہیں ان کی مساوات $SS_1=T^2$ ہے، جہاں

$$S\equiv x^2/a^2+y^2/b^2-1 \text{ ، } S_1\equiv x_1^2/a^2+y_1^2/b^2-1$$

اور

$$T\equiv xx_1/a^2+yy_1/b^2-1$$

13·6. وترِ تماس :

مان لیا ناقص کی مساوات

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

سے ہے اور $P\ (x_1, y_1)$ کوئی خارجی نقطہ ہے۔

مان لیا P سے کھینچے گئے خطوط مماس ناقص کو نقطوں (x', y') اور (x'', y'') پر چھوتے ہیں۔

اب نقطہ (x', y') پر (1) کا خط مماس

$$xx'/a^2+yy'/b^2=1$$ ہے۔

کیوں کہ یہ نقطہ (x_1, y_1) سے گزرتا ہے، اس لیے

$$x_1x'/a^2+y_1y'/b^2=1 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

اسی طرح، کیوں کہ نقطہ (x'', y'') پر خط مماس بھی نقطہ (x_1, y_1) سے گزرتا ہے، اس لیے

$$x_1x''/a^2+y_1y''/b^2=1 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

مساوات (2) اور (3) سے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ (x', y') اور (x'', y'')، خط مستقیم $xx_1/a^2+yy_1/b^2=1$ پر واقع ہے۔

لہٰذا ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ پر نقطہ (x_1, y_1) سے کھینچے گئے خطوط مماس کے وتر تماس کی مساوات حسب ذیل ہے:

$$\mathbf{xx_1/a^2+yy_1/b^2=1}$$

مثال: ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ پر ایسے نقطوں سے خطوط مماس کھینچے جاتے ہیں کہ ان کے وتر تماس ناقص کے مرکز پر زاویہ قائمہ بناتے ہیں، نقطوں کا طریق نکالیے۔

[دہلی پری انجینیرنگ 1960]

مان لیا مطلوبہ طریق پر کوئی نقطہ (x_1, y_1) ہے؛ تو ناقص پر اس سے کھینچے گئے خطوط مماس کا وتر تماس یہ ہے:

$$xx_1/a^2+yy_1/b^2=1$$

اس وتر کے سروں کو مبدأ سے ملانے والے خطوط کی مساوات (§ 6·8) یہ ہے:

$$x^2/a^2+y^2/b^2=(xx_1/a^2+yy_1/b^2)^2$$

یہ خطوط ایک دوسرے پر عمود تب ہوں گے جب x^2 اور y^2 کے ضربیوں کا جوڑ صفر ہوگا (§6·3) ، یعنی جب

$$1/a^2+1/b^2-x_1^2/a^4-y_1^2/b^4=0$$

لہٰذا (x_1, y_1) کا طریق حسب ذیل ناقص ہے :

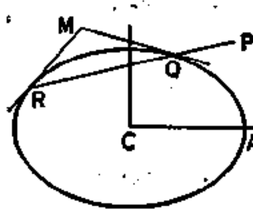
$$x^2/a^4+y^2/b^4=1/a^2+1/b^2$$

13·61 . قطبی خط :

مان لیا ناقص کی مساوات

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1$$

ہے اور مان لیا (x_1, y_1) کوئی دیا ہوا نقطہ P ہے۔ P کے قطبی خط کی مساوات نکالنا مطلوب ہے۔



شکل 76

[مان لیا P سے گزرنے والا کوئی خط مستقیم ناقص کو Q اور R میں کاٹتا ہے اور Q اور R پر کھینچے گئے خطوط مماس M (x', y') میں ملتے ہیں۔ تو M کا طریق ہی P کا قطبی خط ہے۔]

اب ناقص پر M سے کھینچے گئے خطوط مماس کا وتر تماس QR ہے ، لہٰذا اس کی مساوات

$$xx'/a^2+yy'/b^2=1$$ ہے۔

کیوں کہ یہ وتر نقطہ P سے گزرتا ہے ، اس لیے

$$x_1x'/a^2+y_1y'/b^2=1$$

اس سے ظاہر ہے کہ نقطہ (x', y') کا طریق یہ ہے :

$$xx_1/a^2+yy_1/b^2=1$$

لہٰذا، ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کے لحاظ سے (x_1, y_1) کا قطبی خط حسب

ذیل ہے :

$$xx_1/a^2+yy_1/b^2=1$$

ضمنی نتیجہ : ناسکوں $(\pm ae,\ 0)$ کے قطبی خطوط دونوں مہتمہ $x=\pm a/e$ ہیں ۔

ناقص کے لحاظ سے کسی دیے ہوئے خط مستقیم کا قطب اسی طرح نکالا جا سکتا ہے جیسے دائرہ کے لحاظ سے (§ 9·11 دیکھیے) ۔

13·7 . قطر :

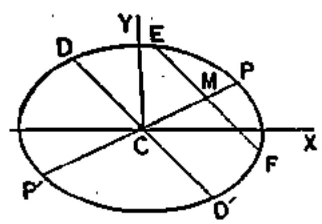
ناقص کے متوازی وتروں کے نظام کے وسطی نقطوں کا طریق نکالنا۔ مان لیا ناقص کی مساوات

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1 \quad \ldots \quad (1)$$

ہے اور متوازی وتروں کے نظام کی مساوات

$$y=mx+c \quad \ldots \quad (2)$$

ہے ، جہاں c پیرامیٹر ہے۔



شکل 77

مان لیا متوازی وتروں میں سے کوئی ایک وتر EF ہے اور اس کے وسطی نقطہ M کے محددات $(x',\ y')$ ہیں ۔

تو E اور F کے طول ، مانا x_1 اور x_2 ، مساوات (1) اور (2) سے y کو خارج کرنے پر حاصل ہوئی حسب ذیل مساوات کے ریشے ہیں :

$$x^2/a^2+(mx+c)^2/b^2=1$$

یعنی

$$b^2x^2+a^2(mx+c)^2=a^2b^2$$

یا

$$(b^2+a^2m^2)x^2+2a^2mcx+a^2(c^2-b^2)=0$$

لیکن $x' = \frac{1}{2}(x_1+x_2)$ ، اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$x' = -a^2mc/(b^2+a^2m^2) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

پھر نقطہ (x', y') خط (2) پر واقع ہے ، اس لیے $y' = mx' + c$ اس میں (3) سے c کی قیمت رکھنے پر

$$y' = mx' - \frac{(b^2+a^2m^2)x'}{a^2m} = -\frac{b^2x'}{a^2m}$$

لہذا نقطہ (x', y') کا طریق خط $y = -(b^2/a^2m)x$ ہے ، جو مرکز سے گزرنے کی وجہ سے ایک قطر ہے۔

اس طرح ناقص کے متوازی وتروں کے نظام کے وسطی نقطوں کا طریق ایک قطر ہے۔

ضمنی نتیجہ : اگر قطر $y = m_1x$ ، قطر $y = m_2x$ کے متوازی وتروں کا ناصف ہے تو

$$m_1m_2 = -b^2/a^2$$

اس نتیجہ کے تشاکل سے ہم دیکھتے ہیں کہ دوسرا قطر پہلے قطر کے متوازی وتروں کا ناصف ہے۔

اس طرح اگر ناقص کا ایک قطر دوسرے قطر کے متوازی وتروں کا ناصف ہے ، تو دوسرا قطر پہلے قطر کے متوازی وتروں کا ناصف ہوتا ہے۔

تعریف : جب دو قطروں میں سے ایک قطر دوسرے قطر کے متوازی وتروں کا ناصف ہوتا ہے تو دونوں قطر زواجی قطر کہلاتے ہیں۔

اس طرح دو خطوط $y = m_1x$ اور $y = m_2x$ ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$ کے زواجی قطر تب ہوں گے جب

$$\mathbf{m_1m_2 = -b^2/a^2}$$

13.8 زواجی قطروں پر قضیے :

(1) ناقص کے زواجی نصف قطروں کے سروں کے بے مرکز زاویوں کا فرق

زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

مان لیا CP اور CD ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کے دو زواجی نصف قطر ہیں (سابقہ شکل دیکھیے)، اور ان کے سروں کے بے مرکز زاویے ϕ اور ϕ' ہیں۔

تو CP اور CD کے m یہ ہیں:

$$b\sin\phi/a\cos\phi \quad \text{اور} \quad b\sin\phi'/a\cos\phi'$$

لیکن ان کی ضرب $-b^2/a^2$ ہے۔

$$\therefore\ b^2\sin\phi\sin\phi'/a^2\cos\phi\cos\phi'=-b^2/a^2$$

یا $\sin\phi\sin\phi'+\cos\phi\cos\phi'=0,$

یعنی $\cos(\phi'-\phi)=0$

اس لیے $\phi\sim\phi'=\frac{1}{2}\pi$

نوٹ: ظاہر ہے کہ اگر P کا بے مرکز زاویہ ϕ ہے تو D، P' اور D' کے بے مرکز زاویے بالترتیب $\frac{1}{2}\pi+\phi$ ، $\pi+\phi$ اور $\frac{3}{2}\pi+\phi$ ہیں۔

(2) ناقص کے زواجی نصف قطروں کے مربعوں کا جوڑ مستقل اور ناقص کے نصف محاور کے مربعوں کے جوڑ کے برابر ہوتا ہے۔

مان لیا دو زواجی نصف قطروں CP اور CD کے سروں P اور D کے بے مرکز زاویے، زاویے ϕ اور $\frac{1}{2}\pi+\phi$ ہیں۔

تو کیوں کہ P نقطہ $(a\cos\phi, b\sin\phi)$ ہے

اس لیے $CP^2=a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi$

اسی طرح $CD^2=a^2\cos^2(\frac{1}{2}\pi+\phi)+b^2\sin^2(\frac{1}{2}\pi+\phi)$

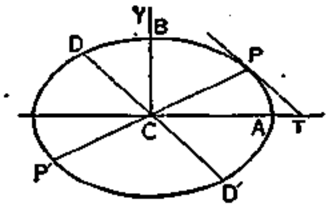
یا $CD^2=a^2\sin^2\phi+b^2\cos^2\phi$

اس لیے، جوڑنے پر،

$$CP^2+CD^2=a^2+b^2$$

(3) ناقص کے کسی قطر کے سروں پر کھینچے گئے خطوط مماس زواجی قطر کے متوازی

ہوتے ہیں۔



شکل 78

مان لیا PCP' اور DCD' دو زواجی قطر ہیں اور ان کے سروں P اور D کے بے مرکز زاویے ϕ اور $\frac{1}{2}\pi+\phi$ ہیں

تو P پر کھینچا گیا خط مماس

$$(x\cos\phi)/a+(y\sin\phi)/b=1$$

ہے اور اس کا m یہ ہے :

$$-(\cos\phi)/a\div(\sin\phi)/b \quad \text{یعنی} \quad -(b\cos\phi)/(a\sin\phi)$$

CD کا m بھی

$$b\sin(\tfrac{1}{2}\pi+\phi)\div a\cos(\tfrac{1}{2}\pi+\phi) \quad \text{یعنی} \quad -(b\cos\phi)/(a\sin\phi) \quad \text{ہے۔}$$

اس طرح CD اور P پر خط مماس کے m برابر ہیں۔ لہذا CD ، نقطہ P پر خط مماس کے متوازی ہے۔

اسی طرح CD ، P' پر کھینچے گئے خط مماس کے بھی متوازی ہے اور CP ، D اور D' پر کھینچے گئے خطوط مماس کے متوازی ہے۔

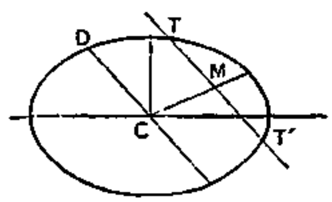
نوٹ : اس قضیے سے ہمیں دیے ہوئے قطر کے زواجی قطر کو کھینچنے کا آسان طریقہ ملتا ہے۔

13.81 وتر جس کا وسطی نقطہ دیا ہو :

ہم ثابت کریں گے کہ ناقص کے لحاظ سے کسی نقطہ کا قطبی خط اس قطر کے متوازی ہوتا ہے جو اس نقطہ سے گزرنے والے قطر کے زواجی ہوتا ہے اور اس کا استعمال کر کے ہم اس وتر کی مساوات حاصل کریں گے جس کا وسطی نقطہ (x_1, y_1) ہے۔

مان لیا ناقص کی مساوات $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ ہے اور (x_1, y_1) دیا ہوا نقطہ M ہے۔

ناقص کا مرکز C مبدأ ہے۔ اس لیے CM کا m ، y_1/x_1 ہے۔



شکل 79

لہٰذا زواجی قطر CD کا m ، $-b^2x_1/a^2y_1$ ہے (بذریعہ 13·7 §) ۔

اب نقطہ (x_1, y_1) پر قطبی خط

$$xx_1/a^2+yy_1/b^2=1,$$

ہے اور اس کا m بھی $-b^2x_1/a^2y_1$ ہے ۔

لہٰذا قضیہ حل ہوجاتا ہے ۔

اب مان لیا اس وتر TT' کی مساوات معلوم کرنی ہے جس کا وسطی نقطہ $M\,(x_1, y_1)$ ہے ۔ TT' ، CM کے زواجی قطر کے متوازی ہے ، کیوں کہ CM ، TT' کا ناصف ہے ۔ لہٰذا (ابھی ثابت کیے ہوئے قضیہ سے) ، TT' ، M کے قطبی خط کے متوازی ہے ۔

اس طرح ، اگر (x_1, y_1) ناقص کے کسی وتر کا وسطی نقطہ ہے ، تو وہ وتر (x_1, y_1) کے قطبی خط کے متوازی ہے ۔

اس لیے وتر کی مساوات حسب ذیل شکل کی ہوگی :

$$xx_1/a^2+yy_1/b^2=c$$

لیکن نقطہ (x_1, y_1) اس خط پر واقع ہے ، اس لیے $x_1^2/a^2+y_1^2/b^2=c$

لہٰذا ، ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کا وہ وتر ، جس کا وسطی نقطہ (x_1, y_1) ہے ، حسب ذیل ہے :

$$\mathbf{xx_1/a^2+yy_1/b^2=x_1^2/a^2+y_1^2/b^2}$$

یعنی

$$\mathbf{T=S_1}$$

جہاں $T\equiv xx_1/a^2+yy_1/b^2-1$ اور $S_1\equiv x_1^2/a^2+y_1^2/b^2-1$

مثال : ناقص $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}y^2=1$ کے اس وتر کا قطب معلوم کیجیے جس کا وسطی نقطہ $(1, 2)$ ہے ۔

وہ وتر جس کا وسطی نقطہ $(1, 2)$ ہے ، حسب ذیل ہے :

$$\tfrac{1}{4}x\times 1+\tfrac{1}{3}y\times 2=\tfrac{1}{4}(1)^2+\tfrac{1}{3}(2)^2$$

یعنی

$$9x+8y=25 \quad \cdots \quad (1)$$

مان لیا اس کا قطب (x_1, y_1) ہے ، تو (1) اور حسب ذیل مساوات ایک ہی ہیں :

$$\tfrac{1}{4}xx_1+\tfrac{1}{9}yy_1=1$$

(1) اور (2) کا موازنہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$9/\tfrac{1}{4}x_1=8/\tfrac{1}{9}y_1=25$$

جس سے

$$y_1=\tfrac{72}{25} \;,\; x_1=\tfrac{36}{25}$$

لہٰذا ، مطلوبہ قطب ، نقطہ $(\tfrac{36}{25}, \tfrac{72}{25})$ ہے۔

مشق 45 (ناقص پر)

1. اگر کسی ناقص میں وترِ عمود ماسکی محور اصغر کا نصف ہو تو ناقص کی بے مرکزیت نکالیے۔
[علی گڑھ 1961]

2. ناقص $\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{4}y^2=1$ اور دائرہ $x^2+y^2=12$ کے نقاطِ تقاطع پر خطوط مماس کا درمیانی زاویہ نکالیے۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1961]

3. اگر ناقص کے وترِ عمود ماسکی کے کسی سرے پر کھینچا گیا عماد محور اصغر کے ایک سرے سے گزرتا ہے تو محور اکبر اور محور اصغر کی نسبت نکالیے۔ [رڑکی 1960]

4. ثابت کیجیے کہ خط $lx+my+n=0$ ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کا کوئی عماد تب ہوگا جب
$a^2/l^2+b^2/m^2=(a^2-b^2)^2/n^2$ [الٰہ آباد 1959]

5. ثابت کیجیے کہ ناقص میں دو عمودی قطروں کے مقلوبوں کے مربعوں کا جوڑ مستقل ہوتا ہے۔
[پلانی، فار، 1965]

6. ناقص کے ایک نقطہ P پر خط مماس اور عماد محور اصغر سے T اور G میں ملتے ہیں۔ ثابت کیجیے کہ TG ہر ایک ماسکہ پر زاویہ قائمہ بناتا ہے۔ [رڑکی 1941]

7. ثابت کیجیے کہ ناقص کے معاون دائرہ کے ان عمودی وتروں کے مربعوں کا جوڑ، جو ناقص

کو چھوتے ہیں، مستقل ہوتا ہے۔

8. اگر ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کے نقطہ P پر عماد، x اور y محاور سے M اور N ملے تو دکھائیے کہ $PM : PN = b^2 : a^2$ [دہلی پری انجینیرنگ 1961]

9. ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ میں نقطہ $(3, \frac{12}{5})$ پر تحتی خط ماس کی لمبائی $\frac{16}{3}$ ہے۔ ثابت کیجیے کہ ناقص کی بے مرکزیت $\frac{4}{5}$ ہے۔ [رڑکی 1956]

10. ثابت کیجیے کہ ناقص کے متوازی وتروں کے سروں کے بے مرکز زاویوں کا جوڑ مستقل ہوتا ہے۔

11. ثابت کیجیے کہ ناقص کے کسی نقطہ کی ماسکی دوری کو قطر مان کر کھینچا گیا دائرہ معاون دائرہ کو چھوتا ہے۔ [دہلی پری انجینیرنگ 1960]

12. ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کے محور اصغر کے مثبت سرے سے گزرنے والے وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق معلوم کیجیے۔

13. دکھائیے کہ ناقص کے لحاظ سے اور اس کے معاون دائرہ کے لحاظ سے کسی بھی نقطہ کے قطبی خطوط محور اکبر پر ملتے ہیں۔ [علی گڑھ 1958]

14. اگر ناقص کا مرکز C ہو، تو ثابت کیجیے کہ ناقص کے ماسکہ سے کسی بھی نقطہ P کے قطبی خط پر کھینچا گیا عمود، CP سے دہتمہ پر ملے گا۔

15. ثابت کیجیے کہ ناقص کے وتر عمود ماسکی سے اس کے قطب پر بنا زاویہ اس زاویہ کے برابر ہوتا ہے جو ماسکوں کو ملانے والا خط وتر عمود ماسکی کے کسی سرے پر بناتا ہے۔

[رڑکی 1964]

16. ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کے ماسکوں سے P کے قطبی خط پر کھینچے گئے عمودوں کی ضرب ہمیشہ c^2 رہے، تو ثابت کیجیے کہ P کا طریق ناقص

$$(c^2+a^2-b^2)b^4x^2+c^2a^4y^2=a^4b^4$$ ہے۔

17. ناقص پر کسی نقطہ P پر خط مماس محور اکبر کو T میں کاٹتا ہے اور P سے اس محور پر پائے عمود N ہے۔ دکھائیے کہ NT کو قطر مان کر کھینچا گیا دائرہ معاون دائرہ کو زاویہ قائمہ

پر کاٹتا ہے۔ [رڑکی 1958]

18. ثابت کیجیے کہ ناقص میں ماسکہ سے کسی خط مماس پر کھینچا گیا عمود، نقطۂ تماس سے گزرنے والے قطر سے (اس ماسکہ کی) مطابق نہتمہ پر ملتا ہے۔

19. اگر ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کے ذریعے خط $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ سے مقطوعہ حصہ ناقص کے مرکز پر زاویہ قائمہ بنائے، تو ثابت کیجیے کہ یہ خط اس دائرہ کو چھوتا ہے جو ناقص سے ہم مرکز اور نصف قطر $ab/\sqrt{(a^2+b^2)}$ کا ہے۔ [الہ آباد 1946]

20. اگر نقطہ (α, β) سے ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ پر کھینچے گئے خطوط مماس کا وتر تماس دائرہ $x^2+y^2=c^2$ کو چھوئے، تو ثابت کیجیے کہ نقطہ (α, β) ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1/c^2$ پر واقع ہے۔ [رڑکی 1963]

21. ثابت کیجیے کہ ناقص کے کسی نقطہ P کو محور اکبر کے سروں سے ملانے والے خطوط نہتمہ سے ایسا داخلی قطع کاٹتے ہیں جو مطابق ماسکہ پر زاویہ قائمہ بناتا ہے۔

22. ثابت کیجیے کہ ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کے خطوط مماس سے محاور کے درمیان مقطوعہ حصوں کے وسطی نقطوں کا مریق یہ ہے:

$a^2y^2+b^2x^2=4x^2y^2$ [علی گڑھ 1965]

23. دکھائیے کہ اگر $a^2l^2+b^2m^2=2n^2$، تو خط $lx+my=n$ ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کو ایسے دو نقطوں میں کاٹے گا جن کے بے مرکز زاویوں کا فرق $\frac{1}{2}\pi$ ہوگا۔

24. S اور S_1 ناقص کے ماسکے ہیں اور P ناقص پر کوئی نقطہ ہے۔ اگر ناقص کی بے مرکزیت e ہو تو ثابت کیجیے کہ

$\tan\frac{1}{2}PSS_1\tan\frac{1}{2}PS_1S=(1-e)/(1+e)$ [رڑکی 1960]

[اشارہ: مان لیا $\angle PSS_1=\alpha$ اور $\angle PS_1S=\beta$ تو $\triangle PSS_1$ سے

$$\frac{PS_1}{\sin\alpha}=\frac{PS}{\sin\beta}=\frac{SS_1}{\sin\{\pi-(\alpha+\beta)\}}$$

$$\therefore \frac{PS_1+PS}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{SS_1}{\sin(\alpha+\beta)}$$

یعنی $e=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}$، وغیرہ]

25 . اگر ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ پر نقطہ T (h, k) سے خطوط مماس TP اور TQ کھینچے جائیں تو ثابت کیجیے کہ $\triangle TPQ$ کا رقبہ

$ab(h^2/a^2+k^2/b^2-1)^{3/2}\div(h^2/a^2+k^2/b^2)$ ہے ۔ [الٰہ آباد 1946]

26 . اگر ماسکوں S اور S' والے ناقص پر کسی خارجی نقطہ T سے خطوط مماس TP اور TP' کھینچے جائیں تو ثابت کیجیے کہ

$\angle STP=\angle S'TP'$ [علی گڑھ 1934]

27 . اگر ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کے ماسکہ اور مرکز سے کسی خط مماس پر عمود p اور p' ہوں اور نقطۂ تماس کی ماسکہ سے دوری r ہو تو ثابت کیجیے کہ

$p'a=pr$ [علی گڑھ 1961]

28 . اگر ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کے کسی نقطہ P کے خط مماس پر ماسکہ S سے کھینچے گئے عمود کی لمبائی p ہو تو ثابت کیجیے کہ $b^2/p^2=2a/SP-1$

29 . کسی ناقص کا مرکز C اور P اس پر کوئی نقطہ ہے۔ P پر عاد اور CP کے درمیانی زاویہ کی tangent نکالیے اور دکھلائیے کہ اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت $(a^2-b^2)/2ab$ ہے، جہاں $2a$ اور $2b$ محور اکبر اور محور اصغر ہیں۔

[الٰہ آباد 1953]

30 . ناقص کا کوئی عرض NP معاون دائرہ سے Q میں ملتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ نقطوں P اور Q پر عمادوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق دائرہ $x^2+y^2=(a+b)^2$ ہے۔

[اجمیر 1960]

باب 14

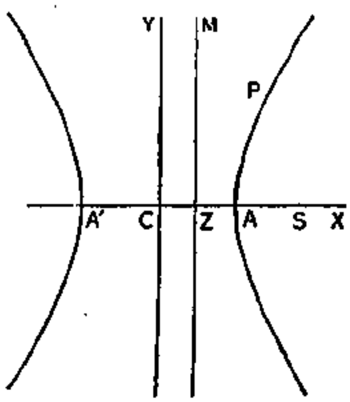
مکافی زائد

14.1. تعریف :

مکافی زائد ایسا منحنی ہے جس کی بے مرکزیت ایک سے زیادہ ہوتی ہے۔
اس طرح مکافی زائد اس نقطہ کا طریق ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک مقررہ نقطہ سے (جسے ماسکہ کہتے ہیں) اس کی دوری ایک معین خط مستقیم سے (جسے مہتمہ کہتے ہیں) اس کی دوری کے مقابلہ مستقل نسبت میں بڑی رہتی ہے۔
اس مستقل نسبت کو مکافی زائد کی بے مرکزیت کہتے ہیں اور e سے ظاہر کرتے ہیں۔

معیاری مساوات :

مکافی زائد کی مساوات نکالنا۔



شکل 90

مان لیا مکافی زائد کا ماسکہ S اور مہتمہ ZM ہے۔ مہتمہ پر عمود SZ کھینچیے۔
کیوں کہ $e>1$ اس لیے ہم SZ کو داخلی اور خارجی طور پر $e:1$ کی نسبت میں تقسیم کر سکتے ہیں۔ مان لیا تقسیم کرنے والے نقطے A اور A' ہیں۔

مان لیا $AA'=2a$

AA' کو نقطہ C پر نصف کیجیے ؛

تب

$$SA = e \cdot AZ$$

اور

$$SA' = e \cdot ZA'$$

جوڑنے پر

$$SA + SA' = e(AZ + ZA')$$
$$= e \cdot AA' = 2ae$$

یعنی

$$SC = ae \quad \text{یا} \quad 2SC = 2ae$$

اسی طرح، گھٹانے پر

$$SA' - SA = e(ZA' - AZ) = e(AA' - 2AZ)$$

یعنی

$$a/e = ZC \quad \text{یا} \quad 2a = e.2(AC - AZ)$$

اب C کو مبدأ، CS کو x-محور اور عمودی خط CY کو y-محور مانیے۔
تو S نقطہ $(ae, 0)$ ہے اور ZM خط $x = a/e$ ہے۔
مان لیا مکافی زائد پر کوئی نقطہ (x, y) ہے، تو شرط

$$SP^2 = e^2 \times (\text{کی دوری } P \text{ سے } ZM)^2$$

کے ذریعے

$$(x - ae)^2 + y^2 = e^2(x - a/e)^2$$

یا

$$x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)$$

یعنی

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1 \quad \ldots (1)$$

کیوں کہ $e > 1$ ، اس لیے $e^2 - 1$ مثبت ہے۔ اس لیے مان لیا $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ ، تو (1) حسب ذیل شکل اختیار کرلیتی ہے :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

جو مکافی زائد کی مطلوبہ مساوات ہے۔

ضمنی نتیجہ : مکافی زائد $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ کی بے مرکزیت مساوات $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ سے حاصل ہوتی ہے ، یعنی

$$e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$$

14.2 . مکافی زائد کا خاکہ کھینچنا :

مکافی زائد کی شکل حاصل کرنے کے لیے ہم حسب ذیل مساوات کا خاکہ کھینچیں گے :

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

y کے لیے حل کرنے پر ،

$$y = \pm b\sqrt{(x^2/a^2 - 1)}$$

اس طرح x کی ہر ایک قیمت کے لیے y کی دو برابر لیکن مخالف علامتوں کی قیمتیں ملیں گی۔ لہذا منحنی x-محور کے لحاظ سے متشاکل ہے۔

اسی طرح منحنی y-محور کے لحاظ سے بھی متشاکل ہے۔

ان متشاکل کی وجہ سے منحنی کی شکل صرف ایک ربع میں ، مان لو ، پہلے میں ، جاننا کافی ہے۔

اب مساوات (2) سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر $x = 0$ یا اگر x کی قیمت 0 اور a کے درمیان ہو تو y کی قیمت فرضی ہے۔ لہذا مکافی زائد کا کوئی حصہ خطوط $x = 0$ اور $x = a$ کے درمیان نہیں ہے۔

اگر $x = a$ ، تو $y = 0$ ؛ اور اگر y کی مثبت قیمتوں پر غور کریں تو جیسے جیسے x بڑھتا ہے ویسے ویسے y بھی بڑھتا جاتا ہے۔

جب x لامتناہی کی طرف جاتا ہے تو y بھی لامتناہی کی طرف جاتا ہے۔

مذکورہ بالا حقائق کی بنیاد پر اور (1) کو مطمئن کرنے والے کچھ نقطے ترسیم کرنے پر منحنی کی شکل سابقہ دفعہ میں دی گئی شکل جیسی ملتی ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ منحنی کی دو شاخیں ہیں جو ایک دوسرے سے علاحدہ ہیں۔ ہر ایک شاخ کا درمیانی حصہ کچھ کچھ مکافی کے راس کے قریبی حصہ جیسا ہے۔

14.21. مکافی زائد کی قطبی مساوات سے اس کا خاکہ کھینچنا:

مساوات $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ میں $x=r\cos\theta$ اور $y=r\sin\theta$ رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$r^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta} \qquad \ldots \quad (1)$$

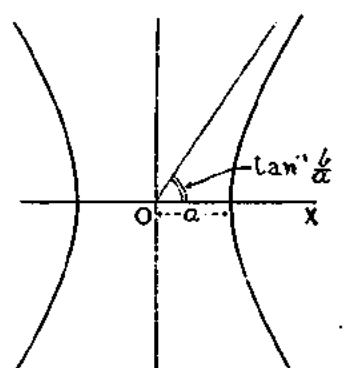
ہم اس مساوات سے بھی مکافی زائد کی شکل معلوم کر سکتے ہیں۔ جب $\theta=0$ تب $r^2=a^2$ یعنی $r=a$ (مثبت قیمت لینے پر)۔

جب θ بڑھتا ہے تو $b^2\cos^2\theta$ گھٹتا ہے اور $a^2\sin^2\theta$ بڑھتا ہے، چنانچہ r^2 کی قیمت میں نسب نما گھٹتا جاتا ہے اور اس لیے r^2 کی قیمت بڑھتی جاتی ہے۔

جب θ ایسا ہو کہ

$$b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta=0$$

یعنی جب $\theta=\tan^{-1}(b/a)$ ، تو (1) میں نسب نما صفر ہو جاتا ہے۔ جب θ تھوڑا سا کم ہوتا ہے تو نسب نما بہت چھوٹا ہوتا ہے اور اس طرح r بہت بڑا ہو جاتا ہے۔ جیسے جیسے θ ‏$\tan^{-1}(b/a)$ کی طرف بڑھتا ہے، r لامتناہی کی طرف بڑھتا ہے۔



شکل 81

جب θ کی قیمت $\tan^{-1}(b/a)$ سے

زیادہ اور $\frac{1}{2}\pi$ سے کم ہوتی ہے تو r^2 منفی ہوتا ہے اور اس طرح r فرضی ہوتا ہے، یعنی ان سمتوں کے درمیان کوئی حقیقی نقطہ نہیں ہے۔

لہٰذا پہلے ربع میں منحنی کی شکل حاشیہ میں دی گئی طرح ہوگی۔

منحنی کا بقیہ حصہ پہلے کی ہی طرح تشاکل کے اعتبار سے کھینچا جاسکتا ہے۔

14.3. مرکز، ماسکہ اور محاور :

کیوں کہ منحنی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ جہاں $1+\frac{b^2}{a^2}=e^2$ ، y-محور کے لحاظ سے متشاکل ہے، اس لیے ظاہر ہے کہ ایک اور ماسکہ، نقطہ $(-ae, 0)$ پر ہوگا اور اس کے مطابق، ہتمہ $Z'M'$ کی مساوات $x=-a/e$ ایسی ہوگی کہ اگر کوئی نقطہ اس طرح حرکت کرے کہ S' سے اس کی دوری $Z'M'$ سے اس کی دوری کا ہمیشہ e گنا رہے تو وہی مکافی زائد بنے گا۔ (شکل 80 دیکھیے)

ماسکوں کو ملانے والا خطِ مستقیم جن نقطوں A اور A' میں مکافی زائد کو کاٹتا ہے، مکافی زائد کے راس کہلاتے ہیں۔

راسوں کو ملانے والا خطِ مستقیم مکافی زائد کا اریب محور کہلاتا ہے۔ اس کی لمبائی AA' کو عام طور پر $2a$ مان لیتے ہیں۔

AA' کے وسطی نقطہ C میں یہ صفت ہے کہ اس سے گزرنے والے مکافی زائد کے کسی بھی وتر کا وسطی نقطہ یہی ہے۔ اس کو ہم حسب ذیل طریقے سے ثابت کرسکتے ہیں :

مان لیا مکافی زائد $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ پر P (x_1, y_1) کوئی نقطہ ہے؛ تو نقطہ P' $(-x_1, -y_1)$ بھی مکافی زائد پر ہوگا کیوں کہ P' کے محددات مکافی زائد کی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

لہٰذا خطِ مستقیم PP' ایک وتر ہے جس کا وسطی نقطہ $(0, 0)$ یعنی مبدأ C ہے۔ یعنی مبدأ سے گزرنے والے ہر ایک وتر کا یہی وسطی نقطہ ہے۔ اس طرح محور اکبر AA' کا وسطی نقطہ بھی مبدأ ہی ہے۔

اس صفت کی وجہ سے مکافی زائد کے راسوں کو ملانے والے خط مستقیم کا وسطی نقطہ مکافی زائد کا مرکز کہلاتا ہے۔

مکافی زائد کے مرکز سے گزرنے والا وہ خط مستقیم جو اریب محور پر عمود ہو، مکافی زائد کو حقیقی نقطوں میں نہیں کاٹتا، کیوں کہ مساوات (1) میں $x=0$ رکھنے پر y کی قیمتیں $\pm b\sqrt{(-1)}$ ملتی ہیں۔

لیکن اگر اس خط پر دو نقطے B، B' ایسے لیے جائیں کہ $BC=CB'=b$ تو خط BB' زواجی محور کہلاتا ہے۔

وترِ عمود ماسکی وہ وتر ہے جو ماسکہ سے گزرتا ہے اور اریب محور پر عمود ہے۔ کیوں کہ ایک ماسکہ $(ae, 0)$ ہے اس لیے مکافی زائد کی مساوات میں $x=ae$ رکھنے پر ہم نصف وترِ عمود ماسکی کی لمبائی معلوم کر سکتے ہیں؛ تب

$$y^2=b^2(e^2-1)=b^4/a^2$$

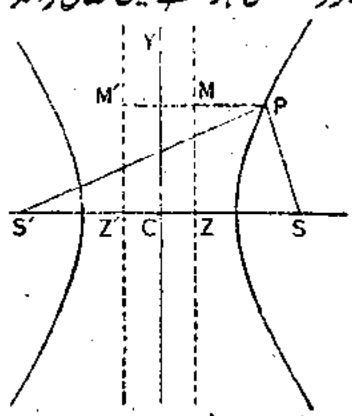
کیوں کہ

$$b^2=a^2(e^2-1)$$

لہٰذا نصف وترِ عمود ماسکی کی لمبائی b^2/a ہے۔

14.31. ماسکی دوریوں میں رشتہ :

ناقص پر واقع کسی نقطہ کی ماسکی دوریوں کا جوڑ مستقل ہوتا ہے لیکن مکافی زائد پر واقع کسی نقطہ کی ماسکی دوریوں کا فرق مستقل رہتا ہے۔



شکل 82

اس کو ثابت کرنے کے لیے مان لیا S اور S' دو ماسکے ہیں اور دونوں ہتمہ ZM ؛ $Z'M'$ ہیں۔

P سے ہتمہ ZM ، اور $Z'M'$ پر عمود PM اور $P'M'$ کھینچیے۔ تو کیوں کہ

M سے اور M' سے متوازی ہیں ، اس لیے P، M، M' ایک ہی خط مستقیم پر ہوں گے ۔ لہٰذا

$$PS' - PS = e \,.\, PM' - e \,.\, PM$$
$$= e(PM' - PM) = e \,.\, MM'$$
$$= e \,.\, ZZ' = 2a$$

جو ایک مستقل ہے ۔

مثال : مکافی زائد $xy = c^2$ کے ماسکے اور دونوں نہتمہ معلوم کیجیے۔

مان لیا دیے ہوئے مکافی زائد کا ایک ماسکہ (x_1, y_1) ہے اور اس کے مطابق نہتمہ $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$ ہے اور مانا e مکافی زائد کی بے مرکزیت ہے ؛ تب بذریعہ تعریف مکافی زائد کی مساوات حسب ذیل ہوگی :

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = e^2(x \cos\alpha + y \sin\alpha - p)^2$$

یعنی

$$x^2(1 - e^2\cos^2\alpha) + y^2(1 - e^2\sin^2\alpha) - 2e^2xy\sin\alpha\cos\alpha$$
$$-2x(x_1 - e^2p\cos\alpha) - 2y(y_1 - e^2p\sin\alpha)$$
$$= e^2p^2 - x_1^2 - y_1^2$$

یہ وہی ہے جو کہ $xy = c^2$ اور ضربیوں کا موازنہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$e^2\cos^2\alpha = 1 = e^2\sin^2\alpha$$

$$y_1 = e^2p\sin\alpha \quad , \quad x_1 = e^2p\cos\alpha$$

اور

$$e^2 \quad \cos\alpha = \tfrac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 - e^2p^2)$$

انھیں حل کرنے پر $e^2 = 2$ اور

یا تو (i) $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ ، $x_1 = p\sqrt{2} = y_1$ ؛ $c^2 = p^2$ یعنی $p = \pm c$

یا (ii) $\alpha = -\frac{1}{4}\pi$ ، $x_1 = p\sqrt{2}$ ، $y_1 = -p\sqrt{2}$ اور $c^2 = -p^2$

حل (ii) ناقابل قبول ہے کیوں کہ اس سے p کی فرضی قیمتیں ملتی ہیں اور حل (i) سے ماسکے

$(c\sqrt{2}, c\sqrt{2})$ اور $(-c\sqrt{2}, -c\sqrt{2})$ اور ان کے مطابق دونوں نہتمہ $x+y=c\sqrt{2}$
اور $x+y=-c\sqrt{2}$ ہیں۔

مشق 46

1. اس مکافی زائد کی مساوات معلوم کیجیے، جس کا نہتمہ $2x+y=1$ ماسکہ $(1, 1)$ اور بے مرکزیت $\sqrt{3}$ ہے۔

2. حسب ذیل مکافی زائد کے محاور کی لمبائیاں اور بے مرکزیت معلوم کیجیے:

(i) $4x^2-y^2+2y=3$

(ii) $x^2-9y^2-2x=1$

3. حسب ذیل مکافی زائد کی نہتمہ، ماسکہ اور بے مرکزیت معلوم کیجیے:

(i) $9x^2-y^2=1$

(ii) $x^2+2x-y^2+5=0$

4. اگر مکافی زائد $x^2-y^2=c^2$ کے ماسکے S ، S' اور مرکز C ہو تو ثابت کیجیے کہ $SP \cdot S'P=CP^2$ جہاں P مکافی زائد پر کوئی نقطہ ہے۔

5. مقررہ نقطوں $(\pm a e, 0)$ سے کوئی دو خطوط مستقیم کھینچے جاتے ہیں جن کے ڈھالوں کی ضرب k ہے جہاں $k>0$ ثابت کیجیے کہ ان خطوط کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک مکافی زائد ہے۔

14.4. خط مماس، وغیرہ :

ہم دیکھیں گے کہ ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کے واسطے حاصل کیے گئے کچھ نتائج b^2 کی جگہ $-b^2$ رکھنے پر مکافی زائد کے لیے صحیح ہو جاتے ہیں؛ ثابت کرنے کا طریقہ بھی بالکل ایک جیسا ہی ہے۔

مکافی زائد کے کسی نقطہ پر خط مماس کی مساوات معلوم کرنا۔

مان لیا مکافی زائد کی مساوات :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \ldots \quad (1)$$

ہے اور اس پر کوئی نقطہ $P \quad (x_1, y_1)$ ہے، تو

$$x_1^2/a^2 - y_1^2/b^2 = 1 \quad \ldots \quad (2)$$

(i) نقطہ (x_1, y_1) پر خط مماس کی مساوات حسب ذیل ہوگی :

$$y-y_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_1(x-x_1) \quad \ldots \quad (3)$$

$(dy/dx)_1$ کی قیمت معلوم کرنے کے لیے، (1) کا تفرقی ضربیہ نکالیے، جس سے

$$\frac{2x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

یعنی

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b^2x}{a^2y}$$

. لہٰذا خط مماس (3) کی مساوات حسب ذیل ہوجائے گی :

$$y-y_1=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$$

یعنی

$$\frac{y_1}{b^2}(y-y_1)=\frac{x_1}{a^2}(x-x_1)$$

یا

$$\frac{yy_1}{b^2}-\frac{xx_1}{a^2}=\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{x_1^2}{a^2}=-1$$ بذریعہ (2)

اس طرح، مکافی زائد $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ کے کسی نقطہ (x_1, y_1) پر خط مماس کی مساوات حسب ذیل ہوگی :

$$\mathbf{xx_1/a^2-yy_1/b^2=1}$$

(ii) **عماد :** نقطہ (x_1, y_1) پر عماد وہ خط ہے جو (x_1, y_1) سے گزرتا ہے اور خط مماس (3) پر عمود ہے ؛ لہٰذا، اس کی مساوات حسب ذیل ہوگی :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1(y-y_1)+(x-x_1)=0$$

یا

$$\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(y-y_1)+(x-x_1)=0$$

یعنی

$$\frac{x-x_1}{x_1/a^2}=\frac{y-y_1}{-y_1/b^2}$$

(iii) خط $y=mx$ کے متوازی خط مماس :

مان لیا مطلوبہ مساوات

$$y-mx=\lambda \qquad \ldots (4)$$

ہے۔ اگر نقطہ تماس (x_1, y_1) ہے، تو یہ مساوات وہی ہے جو

$$xx_1/a^2-yy_1/b^2=1 \qquad \ldots (5)$$

ساتھ ہی

$$x_1^2/a^2-y_1^2/b^2=1 \qquad \ldots (6)$$

(4) اور (5) کا موازنہ کرنے پر

$$-\frac{b^2}{y_1}=-\frac{ma^2}{x_1}=\lambda$$

جس سے کہ $y_1=-b^2/\lambda$ اور $x_1=-ma^2/\lambda$

ان قیمتوں کو (6) میں رکھنے پر

$$\frac{m^2a^4}{\lambda^2}\cdot\frac{1}{a^2}-\frac{b^4}{\lambda^2}\cdot\frac{1}{b^2}=1 \text{ یا } m^2a^2-b^2=\lambda^2$$

جس سے

$$\lambda=\pm\sqrt{(a^2m^2-b^2)}$$

λ کو یہ قیمتیں دینے پر، $y=mx$ کے متوازی خطوط مماس

$$y=mx\pm\sqrt{(a^2m^2-b^2)} \qquad \ldots (7)$$

حاصل ہوئے۔ اس سے ظاہر ہے کہ کسی بھی دیے ہوئے خط کے متوازی دو خطوط مماس

ہوتے ہیں۔

(iv) شرط مماس :

خط $px+qy+r=0$ مکافی زائد کا خط مماس ہوگا اگر اس کی مساوات یعنی

$$y=-\frac{p}{q}x-\frac{r}{q}$$

(7) کی شکل کی ہو۔ موازنہ سے ظاہر ہوتا ہے کہ

$$\pm\sqrt{(a^2m^2-b^2)}=-\frac{r}{q} \quad \text{اور} \quad m=-\frac{p}{q}$$

m کو خارج کرنے پر، مطلوبہ شرط

$$\pm\sqrt{\left(a^2\frac{p^2}{q^2}-b^2\right)}=-\frac{r}{q}$$

ہوئی، جو مربع کرنے پر

$$a^2p^2-b^2q^2=r^2$$

ہو جاتی ہے۔

14.5 . دیے ہوئے نقطہ سے خطوط مماس :

(i) مان لیا (x_1, y_1) کوئی دیا ہوا نقطہ ہے اور اس سے مکافی زائد $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ پر ایک خط مماس

$$y=mx+\sqrt{(a^2m^2-b^2)} \quad \cdots \quad (1)$$

ہے، جو کہ خط مماس کی عام مساوات ہے۔

کیوں کہ نقطہ (x_1, y_1) خط (1) کو مطمئن کرتا ہے،

$$y_1=mx_1+\sqrt{(a^2m^2-b^2)}$$

یعنی

$$(y_1 - mx_1)^2 = a^2 m^2 - b^2 \quad . . . \quad (2)$$

یہ m میں دو درجی ہے ؛ اس لیے کسی بھی نقطہ سے مکافی زائد پر دو خطوط مماس (حقیقی یا فرضی) کھینچے جا سکتے ہیں۔

(ii) **ناظم دائرہ :** (2) کو کھولنے اور ترتیب وار لکھنے پر

$$m^2 (x_1^2 - a^2) - 2 mx_1 y_1 + (y_1^2 + b^2) = 0 \quad . . . \quad (3)$$

اگر اس مساوات کے ریشے m_1 ، m_2 ہیں تو (1) میں m کو یہ قیمتیں دینے پر جو دو خطوط مماس ملیں گے ان کے عمود ہونے کی شرط $m_1 m_2 = -1$, ہے ، یعنی

$$(y_1^2 + b^2)/(x_1^2 - a^2) = -1$$

یعنی

$$x_1^2 - a^2 + y_1^2 + b^2 = 0$$

لہذا نقطہ (x_1, y_1) کا طریق ، جس سے کھینچے گئے خطوط مماس ایک دوسرے پر عمود ہیں ، یعنی مکافی زائد $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ کا ناظم دائرہ حسب ذیل ہے :

$$\mathbf{x^2 + y^2 = a^2 - b^2}$$

اگر $b > a$ تو یہ دائرہ فرضی ہوگا۔

14.51. وتر تماس :

مکافی زائد

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1 \quad . . . \quad (1)$$

پر کسی نقطہ (x_1, y_1) سے کھینچے گئے خطوط مماس کے وتر تماس کی مساوات معلوم کرنا۔

مان لیا (x_1, y_1) سے (1) پر کھینچے گئے خطوط مماس میں سے ایک کا نقطہ تماس (h, k) ہے ، تو خط مماس کی مساوات

$$hx/a^2 - ky/b^2 = 1$$

ہوگی اور کیوں کہ (x_1, y_1) اس پر واقع ہے، اس لیے

$$h\,x_1/a^2 - k\,y_1/b^2 = 1$$

اس سے ظاہر ہے کہ (h, k) مساوات

$$xx_1/a^2 - yy_1/b^2 = 1 \qquad . \; . \; . \; (2)$$

کے گراف پر ہے۔

اس طرح، خط (2) نقطہ تماس (h, k) سے گزرتا ہے۔ اسی طرح کی دلیل سے یا تشاکل کے اعتبار سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ خط (2) دوسرے نقطہ تماس سے بھی گزرتا ہے۔

لہٰذا، (2) وتر تماس ہے۔ اگر نقطہ (x_1, y_1) مکافی زائد پر ہو تو ظاہر ہے وتر تماس کی مساوات اس نقطہ پر خط مماس کی مساوات ہو جائے گی۔

وتر تماس قطبی خط بھی ہوتا ہے۔

نوٹ : یہ ممکن ہے کہ کچھ نقطوں (x_1, y_1) کے لیے h اور k میں سے کوئی ایک یا دونوں فرضی ہوں لیکن تب بھی محددات (h, k) مساوات (2) کو مطمئن کریں گے۔

14.52. متوازی وتروں کے وسطی نقطے :

(i) مکافی زائد کے متوازی وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق معلوم کرنا۔

مان لیا متوازی وتروں کے نظام کا ایک وتر $y = mx + \lambda$ ہے؛ اس لیے m مقرر اور λ متغیر (یعنی پیرامیٹر) ہے؛ اور مانا مکافی زائد کی مساوات

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$ ہے۔

جہاں وتر $y = mx + \lambda$ اس مکافی زائد سے ملتا ہے، وہاں

$$x^2/a^2 - (mx + \lambda)^2/b^2 = 1$$

یعنی

$$b^2x^2 - a^2(m^2x^2 + 2\lambda mx + \lambda^2) = a^2b^2$$

یا

$$x^2(b^2-a^2m^2)-2m\lambda a^2x-a^2(\lambda^2+b^2)=0 \quad . \; . \; . \quad (1)$$

اگر وتر کا وسطی نقطہ (x_1, y_1) ہو، تو

$$x_1=\tfrac{1}{2}\times \text{(1) کے ریشوں کا جوڑ} = m\lambda a^2/(b^2-a^2m^2) \quad . \; . \; . \quad (2)$$

ساتھ ہی کیوں کہ (x_1, y_1) وتر $y=mx+\lambda$ پر واقع ہے، اس لیے

$$y_1=mx_1+\lambda=\frac{m^2\lambda a^2}{b^2-a^2m^2}+\lambda=\frac{b^2\lambda}{b^2-a^2m^2} \quad . \; . \; . \quad (3)$$

(2) اور (3) کا موازنہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ،

$$y_1=\frac{b^2}{ma^2}\cdot\frac{m\lambda a^2}{b^2-a^2m^2}=\frac{b^2}{ma^2}x_1 \quad . \; . \; . \quad (4)$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ خط $y=mx+\lambda$ کے متوازی وتروں کے وسطی نقطوں (x_1, y_1) کا طریق حسب ذیل ہے:

$$\mathbf{y=(b^2/ma^2)x} \quad . \; . \; . \quad (5)$$

(ii) **قطر:** طریق (5) مکافی زائد کے مرکز سے گزرنے والا خط مستقیم ہے اور اسے قطر کہتے ہیں۔

مذکورہ بالا قضیہ سے ہم دیکھتے ہیں کہ قطر (5) کے متوازی وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق

$$y=\frac{b^2}{a^2(b^2/a^2m)}x=mx$$ ہے۔

اگر (5) کو $y=m'x$ مان لیں تو ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ دو قطر $y=mx$ اور $y=m'x$ میں سے ایک قطر دوسرے کے متوازی وتروں کا ناصف تب ہوگا جب

$$mm'=b^2/a^2$$

ایسے قطر زواجی کہلاتے ہیں۔

(iii) **دیے ہوئے وسطی نقطہ والا وتر:** وتر $y=mx+\lambda$ کے وسطی نقطہ

(x_1, y_1) کا قطبی خط

$$\frac{xx_1}{a^2}=\frac{yy_1}{b^2} \quad \text{قطر}$$

یعنی بذریعہ (4) $y=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x=mx,$ کے متوازی ہے۔

لہٰذا، ہم کہہ سکتے ہیں کہ دیے ہوئے وسطی نقطہ والا وتر اس نقطہ کے قطبی خط کے متوازی ہوتا ہے۔

اگر ہم

$$S\equiv\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1 \text{ ، } S_1\equiv\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}-1 \text{ اور } T\equiv\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}-1$$

لکھیں تو

(i) (x_1, y_1) کے قطبی خط کی مساوات $T=0$ ہے۔

(ii) وسطی نقطہ (x_1, y_1) رکھنے والا وتر، جو قطبی خط کے متوازی ہے،

$$T=S_1$$

ہے اور، (iii) § 11·9 کی طرح دکھایا جا سکتا ہے کہ نقطہ (x_1, y_1) سے $S=0$ پر کھینچے گئے خطوط مماس کی مشترک مساوات حسب ذیل ہوگی:

$$SS_1=T^2$$

مشق 47

1. ثابت کیجیے کہ خط $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ مکافی زائد $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ کو چھوئے گا اگر $p^2=a^2\cos^2\alpha-b^2\sin^2\alpha$

2. مکافی زائد $9x^2-5y^2=45$ کے ان خطوط مماس کی مساوات معلوم کیجیے جو خط $y=3x$ کے متوازی ہیں۔ نقاطِ تماس بھی معلوم کیجیے۔

3. ثابت کیجیے کہ ناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ پر واقع کسی بھی نقطہ کا مکافی زائد $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ کے لحاظ سے قطبی خط ناقص کو چھوتا ہے۔

4. ثابت کیجیے کہ اگر مکافی زائد $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ کے لحاظ سے (x_1, y_1) اور (x_2, y_2)

کے قطبی خطوط ایک دوسرے پر عمود ہوں تو $x_1x_2/y_1y_2=-a^4/b^4$

5. ثابت کیجیے کہ دائرہ $x^2+y^2=a^2$ اور مکافی زائد $4x^2-y^2=4a^2$ ایسے منحنیات ہیں کہ کسی ایک پر واقع نقطوں کے، مکافی $y^2=4ax$ کے لحاظ سے قطبی خطوط دوسرے کے خطوط مماس ہیں۔

6. مبدأ سے گزرنے والا کوئی خط دائرہ $x^2+y^2=a^2$ سے P میں اور مکافی زائد $x^2-y^2=a^2$ سے Q میں ملتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ دائرہ کے P پر خط مماس اور مکافی زائد کے Q پر خط مماس کے نقطہ تقاطع کا طریق $(a^4+4y^4)x^2=a^6$ ہے۔

7. ثابت کیجیے کہ مقررہ نقطہ (h, k) سے گزرنے والے، مکافی زائد $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ کے وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ایک مکافی زائد ہے جس کا مرکز $(\frac{1}{2}h, \frac{1}{2}k)$ ہے۔

8. ثابت کیجیے کہ مکافی زائد $x^2-y^2=a^2$ کے عماد وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق $(y^2-x^2)^3=4a^2x^2y^2$ ہے۔

9. ثابت کیجیے کہ مکافی زائد $x^2-y^2=a^2$ کے عماد وتروں کے قطبوں کا طریق $4x^2y^2=a^2(x^2-y^2)$ ہے۔

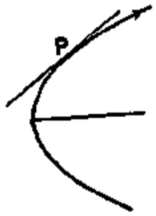
10. مکافی زائد $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ کے ایسے وتر لیے گئے ہیں جو ماسکوں کی دوری کو قطر مان کر کھینچے گئے دائرہ کے خطوط مماس ہیں۔ ثابت کیجیے کہ مکافی زائد کے لحاظ سے وتروں کے قطبوں کا طریق $x^2/a^4+y^2/b^4=1/(a^2+b^2)$ ہے۔

14.6. خطِ متقارب :

کسی منحنی کے لیے نقطہ تماس کے ساتھ ساتھ خط مماس بھی بدلتا رہتا ہے۔ جیسے جیسے نقطہ تماس لامتناہی کی طرف بڑھتا ہے ویسے ویسے خط مماس کسی خاص خطِ مستقیم (مبدأ سے محدود دوری پر) کی طرف بڑھتا ہے۔ یہ خطِ مستقیم منحنی کا ایک خطِ متقارب کہلاتا ہے۔

کچھ منحنیات کا رقبہ محدود ہوتا ہے جیسے دائرہ اور ناقص۔ ان منحنیات میں نقطۂ

تماس لا متناہی کی طرف نہیں جاسکتا اور اس لیے ان کا کوئی خط متقارب نہیں ہوتا۔



شکل 83

مکافی میں اگر ہم P پر خط مماس لیں اور یہ مان لیں کہ P تیر کی طرف حرکت کرتا ہے (شکل میں دیکھیے) تو جیسے جیسے P دور ہوتا جاتا ہے تیسے تیسے خط مماس مبدأ سے دور سے دور تر ہوتا جاتا ہے، اور اس کو ہم آسانی سے ثابت کر سکتے ہیں۔ ایسی حالتوں میں ہم یہ بھی کہتے ہیں کہ یہاں کوئی خط متقارب نہیں ہے۔

لیکن اگر مکافی زائد کے کسی نقطہ پر ہم خط مماس لیں اور مان لیں کہ نقطہ دور سے دور تر حرکت کرتا ہے (لیکن ہمیشہ مکافی زائد پر رہتے ہوئے) تو ہم دیکھیں گے کہ خط مماس ایک خاص اور معین حالت میں آجاتا ہے۔ اب ہم اس کو ثابت کریں گے۔

مان لیا مکافی زائد کی مساوات

$$x^2/a^2-y^2/b^2=1$$

ہے۔ اس کے نقطہ (x_1, y_1) پر خط مماس یہ ہے:

$$xx_1/a^2-yy_1/b^2=1 \qquad \ldots \; (1)$$

لیکن کیوں کہ نقطہ (x_1, y_1) مکافی زائد پر واقع ہے، اس لیے

$$x_1^2/a^2-y_1^2/b^2=1 \qquad \ldots \; (2)$$

(1) اور (2) میں y کا اخراج کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ مکافی زائد کے ان دو نقطوں پر جن کا طول x_1 ہے، خطوط مماس کی مساوات حسب ذیل ہیں:

$$\frac{xx_1}{a^2}\pm\frac{y}{b}\sqrt{\left(\frac{x_1^2}{a^2}-1\right)}=1$$

یعنی

$$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}\sqrt{\left(1-\frac{a^2}{x_1^2}\right)}=\frac{a}{x_1} \qquad \ldots \; (3)$$

اب جیسے جیسے x_1 لا متناہی کی طرف بڑھتا ہے، ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (3) حسب ذیل شکل کی طرف بڑھتی ہے:

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0 .$$

اس لیے یہ مکافی زائد $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ کے خطوط متقارب ہیں۔ یہ مبدأ سے گزرتے ہیں۔

مثال : ثابت کیجیے کہ مکافی زائد کے خط متقارب پر کسی نقطہ کا مکافی زائد کے لحاظ سے قطبی خط اس خط متقارب کے متوازی ہوتا ہے۔

مان لیا مکافی زائد کی مساوات

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \ (1)$$

ہے۔

مان لیا اس کا ایک خط متقارب حسب ذیل ہے :

$$x/a - y/b = 0$$

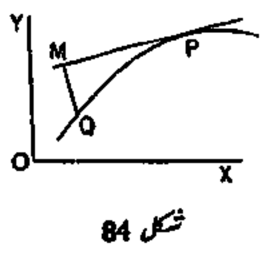
اس پر کوئی نقطہ $(\lambda, \lambda b/a)$ ہے اور مکافی زائد (1) کے لحاظ سے اس کا قطبی خط یہ ہے :

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{a}{\lambda} \quad \text{یعنی} \quad \frac{\lambda x}{a^2} - \frac{\lambda b}{a} \cdot \frac{y}{b^2} = 1$$

ظاہر ہے یہ خط متقارب کے متوازی ہے۔

14.61. منحنی اور خط متقارب :

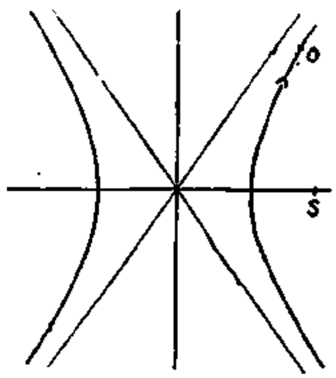
مان لیا کسی دیے ہوئے منحنی پر دو نقطے P اور Q ہیں اور QM نقطہ Q سے P پر کھینچے گئے خط مماس پر عمود ہے۔ تب جیسے جیسے Q، P کی طرف بڑھتا ہے، QM گھٹتا جاتا ہے اور صفر کی طرف بڑھتا ہے۔



شکل 84

اسی طرح جب کسی مکافی زائد پر کوئی نقطہ Q لامتناہی کی طرف بڑھتا ہے، تو خط متقارب سے اس کی دوری (جو ایک ایسا خط مماس کہا جا سکتا ہے جس کا نقطہ تماس بہت دور ہو) کم سے کم تر ہوتی جاتی ہے۔ بہ الفاظ دیگر منحنی مسلسل خط متقارب

کی شکل اختیار کرتا جاتا ہے۔



شکل 85

اس حقیقت کی بنیاد پر ہم مکافی زائد کا خاکہ زیادہ صحیح کھینچ سکتے ہیں۔ سب سے پہلے ہم خطوط متقارب $x/a \pm y/b = 0$ کھینچتے ہیں اور پھر راس $(a, 0)$ سے شروع کر کے مکافی زائد کی ایک شاخ کا خاکہ کھینچتے ہیں اور منحنی خط متقارب کی طرف جھکتا ہوا بناتے ہیں۔

اور تب دوسری شاخ تشاکل کے ذریعے بنائی جاسکتی ہے۔

طالب علم کو چاہیے کہ مکافی زائد کا خاکہ کھینچنے کے لیے پہلے اس کے خطوط متقارب کھینچے۔

مثال: $2a$ لمبائی کے مشترک اریب محور والے کچھ مکافی زائد کھینچے جاتے ہیں۔ ثابت کیجیے ایسے نقطوں کا طریق جن کی مشترک اریب محور سے دوری ان کی خط متقارب کی دوری کے برابر ہو، منحنی

$$(x^2-y^2)^2=4x^2(x^2-a^2)$$ ہے۔

مشترک اریب محور کو x-محور مانیے اور اس کے عمود ناصف کو y-محور مانیے۔ تب مکافی زائد کی مساوات یہ ہوگی:

$$x^2/a^2 - y^2/\lambda^2 = 1, \quad \ldots \quad (1)$$

جہاں λ پیرامیٹر ہے۔ اس مکافی زائد کے خطوط متقارب حسب ذیل ہیں:

$$x/a = \pm y/\lambda$$

مان لیا $P\ (x', y')$ مکافی زائد (1) پر ایسا نقطہ ہے جو مشترک اریب محور اور خط متقارب سے برابر دوری پر ہے۔ تب

$$y' = (x'/a - y'/\lambda) \div \sqrt{(1/a^2+1/\lambda^2)} \quad \text{اور} \quad x'^2/a^2 - y'^2/\lambda^2 = 1 \quad \ldots \quad (2)$$

ان سے λ کو خارج کرنے پر ہمیں x'، y' میں ایک رشتہ ملتا ہے جس میں سے مفرد اعداد کو ہٹانے پر ہمیں مطلوبہ طریق ملتا ہے۔

(2) میں لکھے رشتوں کو ہم بالترتیب یوں لکھ سکتے ہیں :

$y'^2/\lambda^2 - x'^2/a^2 = 1$ اور $y'^2(1/a^2+1/\lambda^2) = x'^2/a^2 + y'^2/\lambda^2 - 2x'y'/a\lambda$

دوسرے رشتے کو آسان کرکے مربع کرنے پر ،

بذریعہ رشتہ (1) $(y'^2-x'^2)^2 = 4x'^2y'^2a^2/\lambda^2 = 4x'^2(x'^2-a^2)$,

لہٰذا P کا طریق $(y^2-x^2)^2 = 4x^2(x^2-a^2)$ ہے۔

14.7. مستطیل نما مکافی زائد :

وہ مکافی زائد جس کے خطوط متقارب ایک دوسرے پر عمود ہوں، مستطیل نما مکافی زائد کہلاتا ہے۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ مکافی زائد $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ کے خطوط متقارب کا درمیانی زاویہ $2\tan^{-1}(b/a)$ ہے۔ یہ زاویہ قائمہ ہوگا اگر $\tan^{-1}(b/a) = \frac{1}{4}\pi$ یعنی اگر $b/a = 1$ یا $b = a$ ← اس وجہ سے مستطیل نما مکافی زائد کو **مساوی ضلعی مکافی زائد** بھی کہتے ہیں۔

اس لیے مشترک اریب محور اور زواجی محور کو محاور محددات مان کر مستطیل نما مکافی زائد کی مساوات حسب ذیل ہوگی :

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad \ldots \quad (1)$$

خطوط متقارب کو محاور محددات مان کر مستطیل نما مکافی زائد کی مساوات نکالنا اہم ہے کیوں کہ اس طرح مساوات زیادہ آسانی سے حاصل ہو جاتی ہے۔

اس مساوات کو حاصل کرنے کے لیے محاور محددات کو $-45°$ کے زاویہ پر گھمائیے۔ تب ہمیں x کی جگہ $\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}$ اور y کی جگہ $-\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}$ لکھنا ہوگا۔

اس طرح (1) حسب ذیل شکل اختیار کرے گی :

$$\tfrac{1}{2}(x+y)^2 - \tfrac{1}{2}(x-y)^2 = a^2,$$

یعنی $xy = \frac{1}{2}a^2$ یا $\mathbf{xy = c^2}$

جہاں $\frac{1}{2}a^2$ کی جگہ بغرضِ سہولت c^2 لکھا گیا ہے۔ یہی مطلوبہ مساوات ہے۔

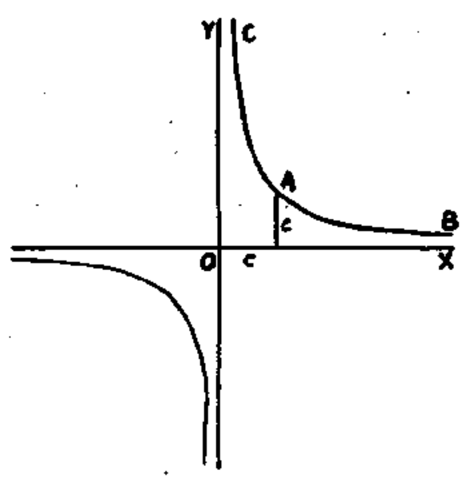
مساوات $xy = c^2$ کو کھینچنا آسان ہے۔ اسے y کے لیے حل کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$y = c^2/x$$

جب $x = c$ ، تب $y = c$ ۔ جیسے جیسے x بڑھتا ہے ویسے ویسے y گھٹتا ہے۔ جب x لامتناہی کی طرف بڑھتا ہے تو y صفر کی طرف بڑھتا ہے۔ لہٰذا x کی ان قیمتوں کے لیے جو c سے زیادہ ہیں، منحنی شکل میں دکھائی گئی طرح A سے B تک ہوگا۔

جب x ، c سے کم لیکن مثبت ہے تب y ، c سے زیادہ ہے۔ جیسے جیسے x مثبت رہتے ہوئے صفر کی طرف بڑھتا ہے ویسے ویسے y مثبت لامتناہی کی طرف بڑھتا ہے۔ لہٰذا x کی ان مثبت قیمتوں کے لیے جو c سے کم ہیں، منحنی (جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے) A سے C تک ہوگا۔

جب x منفی ہے تو y بھی منفی ہے۔ منحنی پر ہر ایک نقطہ (x_1, y_1) کے لیے ایک نقطہ $(-x_1, -y_1)$ منحنی پر ہوگا۔ لہٰذا x کی منفی قیمتوں کے لیے منحنی تشاکل کی بنیاد پر کھینچا جا سکتا ہے [اس طرح کے تشاکل کو مخالف ربعوں میں تشاکل کہتے ہیں]۔



شکل 86

یہاں یہ بات نوٹ کرلینی چاہیے کہ جب x بائیں طرف سے حرکت کرکے صفر کی طرف بڑھتا ہے (اس طرح x کی قیمتیں منفی ہوں گی)، تب y منفی لامتناہی کی طرف بڑھتا ہے۔ $x=0$ کے لیے y بے معنی ہے (اور مثبت لامتناہی یا منفی لامتناہی نہیں)۔

14.8. خط مماس، قطبی خط اور عماد :

مستطیل نما مکافی زائد $xy=c^2$ کے لیے، منحنی پر کسی نقطہ کے محددات

$$(cp, c/p)$$

لیے جا سکتے ہیں جہاں p پیرامیٹر ہے کیوں کہ یہ محددات منحنی کی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ ان محددات والے نقطہ کو ہم 'نقطہ p' کہیں گے۔

نقطوں p_1 اور p_2 کو ملانے والا وتر حسب ذیل ہے :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ cp_1 & c/p_1 & 1 \\ cp_2 & c/p_2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

یعنی

$$x\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)+y(p_2-p_1)+c\left(\frac{p_1}{p_2}-\frac{p_2}{p_1}\right)=0$$

اسے $p_1p_2/(p_2-p_1)$ سے ضرب کرنے پر ہمیں یہ ملتا ہے :

$$x+p_1p_2y-c(p_1+p_2)=0 \qquad \ldots \quad (1)$$

(i) جب p_2، p_1 کی طرف بڑھتا ہے، تب (1) بڑھتا ہے

$$x+p_1^2y-2cp_1=0$$

کی جانب یعنی

$$(c/p_1)x+cp_1y=2c^2$$

یہ p_1 پر خط مماس ہوگا

x_1 کی جگہ cp_1 اور y_1 کی جگہ c/p_1 رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ مکافی زائد

$xy=c^2$ کے نقطہ (x_1, y_1) پر خط مماس کی مساوات یہ ہے :

$$xy_1+yx_1=2c^2$$

(ii) کسی نقطہ (x_1, y_1) پر قطبی خط کی مساوات مذکورہ بالا طریقے سے نکالی جا سکتی ہے، جو حسب ذیل ہے :

$$xy_1+yx_1=2c^2$$

(iii) p پر عماد نقطہ $(cp,\ c/p)$ سے گزرتا ہے اور خط مماس $x+p^2y=2cp$ پر عمود ہے۔ لہٰذا اس کی مساوات یہ ہوگی :

$$(x-cp)p^2-(y-c/p)=0$$

یعنی

$$xp^3-py-cp^4+c=0$$

مثال 1 : کسی مستطیل نما مکافی زائد کی مساوات $xy=c^2$ ہے۔ ثابت کیجیے کہ لمبائی $2d$ والے وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق $(x^2+y^2)(xy-c^2)=d^2xy$ ہے۔

مان لیا مکافی زائد $xy=c^2$ کے اس وتر کا وسطی نقطہ جو x-محور سے زاویہ θ پر جھکا ہے، (x', y') ہے۔ تب وتر کے سروں کے محددات، جو (x', y') سے d کی دوری پر ہیں، یہ ہیں :

$$(x'-d\cos\theta, y'-d\sin\theta) \quad \text{اور} \quad (x'+d\cos\theta, y'+d\sin\theta)$$

کیوں کہ یہ مکافی زائد $xy=c^2$ پر واقع ہیں، اس لیے

$$(x'-d\cos\theta)(y'-d\sin\theta)=c^2 \quad \text{اور} \quad (x'+d\cos\theta)(y'+d\sin\theta)=c^2$$

جوڑنے اور گھٹانے پر،

$$x'\sin\theta+y'\cos\theta=0 \quad \text{اور} \quad x'y'+d^2\cos\theta\sin\theta=c^2$$

ان کو بالترتیب $\cos\theta$ اور $\cos^2\theta$ سے تقسیم کرنے پر،

$$\tan\theta=-y'/x' \quad \text{اور} \quad (x'y'-c^2)\sec^2\theta+d^2\tan\theta=0$$

ان مساوات سے θ کو خارج کرکے مفرد اعداد کو چھوڑنے پر ہمیں مطلوبہ طریق حسب ذیل شکل میں ملتا ہے :

$$(xy-c^2)(1+y^2/x^2)-d^2y/x=0$$

یعنی

$$(xy-c^2)(x^2+y^2)=d^2xy$$

مثال 2 : نصف قطر r کا ایک دائرہ، مرکز C والے کسی مستطیل نما مکافی زائد کو چار نقطوں P ،
Q ، R ، S میں کاٹتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ

$$CP^2+CQ^2+CR^2+CS^2=4r^2$$

مان لیا مستطیل نما مکافی زائد کی مساوات

$$x^2-y^2=a^2, \qquad . \; . \; . \; (1)$$

ہے اور نصف قطر r والے دائرہ کی مساوات

$$(x-g)^2+(y-f)^2=r^2 \qquad . \; . \; . \; (2)$$

ہے۔

(1) اور (2) سے y کو خارج کرنے پر، ہمیں نقطوں کے طول (مانا x_1، x_2، x_3، x_4) دینے والی مساوات ملتی ہے اور وہ یہ ہے :

$$\{(x-g)^2+f^2-r^2+x^2-a^2\}^2=4f^2(x^2-a^2)$$

یعنی

$$4x^4-8gx^3+4x^2(2g^2-r^2-a^2)+\ldots=0$$

جس سے ،

$$\Sigma x_1x_2=2g^2-r^2-a^2 \quad \text{اور} \quad x_1+x_2+x_3+x_4=2g$$

لہٰذا ،

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(\Sigma x_1)^2-2\Sigma x_1x_2=2r^2+2a^2$$

اگر نقطوں P ، Q ، R ، S کے عرض y_1 ، y_2 ، y_3 ، y_4 ہوں تو

بذریعہ (1)

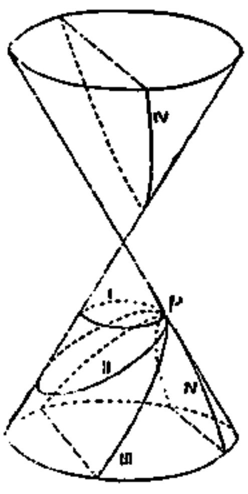
$$\Sigma y_1^2=\Sigma(x_1^2-a^2)=\Sigma x_1^2-4a^2,$$

لہٰذا

$$\Sigma CP^2=\Sigma(x_1^2+y_1^2)=2(2r^2+2a^2)-4a^2=4r^2$$

14.9 . مخروطات :

ناقص (جس کی ایک مخصوص شکل دائرہ ہے)، مکافی اور مکافی زائد (جس کی ایک مخصوص شکل خطوط مستقیم کا جوڑا ہے) ۔ یہ سبھی منحنیات مخروطی تراش ہیں، یعنی وہ مخروط کو مستوی سے کاٹنے پر حاصل ہو سکتے ہیں، جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے ۔ یہی نہیں بلکہ ہم ناقص سے مکافی میں اور پھر مکافی زائد میں خفیف سی تبدیلیوں کے بعد جا سکتے ہیں۔



شکل 87

کیوں کہ، مان لیا ایک دوہرا قائم دائرہ مخروط دیا ہوا ہے جو دونوں سمت لامتناہی تک پھیلا ہوا ہے (شکل 87 دیکھیے) ۔ اس پر ایک نقطہ P لیجیے اور P سے گزرنے والے مستویات کے ذریعے دوہرے مخروط کے تراشوں پر غور کیجیے۔

جب کاٹنے والا مستوی مخروط کے محور پر عمود ہوتا ہے تو تراش ایک **دائرہ** ہوتا ہے۔

جب کاٹنے والا مستوی اس سمت سے کچھ جھکا ہوا ہوتا ہے تو تراش **ناقص** ہوتا ہے جو خفیف سی ہی لمبائی کا ہوتا ہے۔

جیسے جیسے جھکاؤ بڑھتا ہے، ویسے ویسے ناقص بھی لمبائی میں بڑھتا جاتا ہے اور آخر میں جب کاٹنے والا مستوی P کے قطرا روبرو مولد کے متوازی ہوتا ہے تو ناقص لامتناہی لمبائی کا ہو جاتا ہے اور تب وہ دراصل ایک **مکافی** ہے۔

جب کاٹنے والا مستوی اور زیادہ جھکتا ہے، تو یہ مخروط کے دوسرے حصے کو بھی کاٹنے لگتا ہے اور ہمیں دو شاخوں والا **مکافی زائد** ملتا ہے۔

جب P مخروط کے راس پر رہتا ہے، تب تراش **خطوط مستقیم کا جوڑا** ہوتا ہے اور یہ دونوں خطوط منطبق تب ہو جاتے ہیں جب کاٹنے والا مستوی مخروط کو چھوتا ہے۔

مشق 48

1. ثابت کیجیے کہ مستطیل نما مکافی زائد کے مرکز سے کسی نقطہ کی دوری اس کے قطبی خط کی مرکز سے دوری کے معکوس طور پر بدلتی ہے۔

2. ایک دائرہ دو معین عمودی خطوط کو اس طرح کاٹتا ہے کہ ہر ایک داخلی قطع کسی دی ہوئی لمبائی کا ہے۔ ثابت کیجیے کہ دائرہ کے مرکز کا طریق ایک مستطیل نما مکافی زائد ہے۔

3. دو خطوط مستقیم AOB اور COD ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہیں۔ دکھائیے ایک ایسے نقطہ کا طریق جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ایک مستطیل نما مکافی زائد ہے۔

4. ایک دائرہ مستطیل نما مکافی زائد $xy=1$ کو نقطوں (x_r, y_r) $r = 1, 2, 3, 4$ میں کاٹتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ

$$x_1x_2x_3x_4 = y_1y_2y_3y_4 = 1$$

5. ایک مستطیل نما مکافی زائد کسی دائرہ کو چار نقطوں میں کاٹتا ہے۔ دکھائیے کہ ان نقطوں کی وسطی حالت کا مرکز، دونوں منحنیات کے مراکز کو ملانے والے خط کا وسطی نقطہ ہے۔

6. دکھائیے کہ مکافی زائد کے کسی خط مماس کا وہ قطع جو دونوں خطوط متقارب کے درمیان کٹتا ہے، نقطہ تماس پر تنصیف پاتا ہے۔ یہ بھی دکھائیے کہ خط مماس اور دونوں خطوط متقارب سے بنے مثلث کا رقبہ مستقل ہے۔

7. ثابت کیجیے کہ اگر مکافی $y^2=4ax$ کے لحاظ سے P کا قطبی خط مکافی $x^2=4by$ کو چھوئے، تو P کا طریق مستطیل نما مکافی زائد $xy=-2ab$ ہے۔

8. ایک خط مستقیم کسی مکافی زائد کو نقطوں Q، Q' میں اور اس کے خطوط متقارب کو نقطوں R، R' میں کاٹتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ QQ' اور RR' کا وسطی نقطہ ایک ہی ہے۔

9. مکافی زائد میں خطوط مماس کا ایک جوڑا، خطوط متقارب کو کاٹتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ نقاط تقاطع کو ملانے والے خطوط مستقیم آپس میں متوازی ہیں اور یہ کہ وتر تماس سے برابر دوری پر ہیں۔

10. ثابت کیجیے کہ مکافی زائد $xy = hx+ky$ کے خطوط متقارب $x=k$ اور $y=h$ ہیں۔

11. ثابت کیجیے کہ مستطیل نما مکافی زائد کے ایک نقطہ سے کسی قطر کے سروں کو ملانے والے خطوط

مستقیم خطوط متقارب سے برابر زاویہ پر جھکے ہوتے ہیں۔

12. ثابت کیجیے کہ مکافی زائد میں زواجی قطر کا صرف ایک ہی جوڑا منحنی سے حقیقی نقطوں میں ملتا ہے۔

13. ثابت کیجیے کہ m کی چاہے جو بھی قیمت ہو، خطوط $y=mx$ اور $y=-mx$ مکافی زائد $xy=c^2$ کے زواجی قطر ہیں۔

14. مرکز O والے مستطیل نما مکافی زائد کے کسی نقطہ P سے صدری محور پر عمود PM، PN کھینچے گئے ہیں۔ دکھائیے کہ P پر خط مماس MN پر عمود ہے۔ یہ بھی دکھائیے کہ O کی خط مماس سے دوری، OP سے معکوس طور پر بدلتی ہے۔

15. اگر مستطیل نما مکافی زائد پر چار نقطے ایسے لیے جائیں کہ ان میں سے کوئی سے دو کو ملانے والا وتر باقی دو کو ملانے والے وتر پر عمود ہو، اور اگر مرکز سے ان نقطوں کو ملانے والے خطوط مستقیم ہر ایک خط متقارب سے زاویہ α، β، γ، δ پر جھکے ہوں تو ثابت کیجیے کہ

$$\tan\alpha \tan\beta \tan\gamma \tan\delta = 1$$

16. اگر مستطیل نما مکافی زائد $xy=c^2$ کے نقطوں (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، (x_3, y_3) اور (x_4, y_4) پر عماد نقطہ (α, β) پر ملیں، تو ثابت کیجیے کہ

$$\alpha = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$\beta = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$$

اور

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = y_1 y_2 y_3 y_4 = -c^4$$

17. مکافی زائد کے کسی نقطہ P سے اریب محور پر عمود NP ہے اور P پر عماد PG اس محور سے نقطہ G میں ملتا ہے۔ اگر NP بڑھائے جانے پر خط متقارب سے Q میں ملے تو ثابت کیجیے کہ QG اس خط متقارب پر عمود ہوگا۔

18. اگر مستطیل نما مکافی زائد کا ایک وتر منحنی کے کسی نقطہ پر زاویہ قائمہ بنائے تو ثابت کیجیے کہ وتر اس نقطہ پر کھینچے عماد کے متوازی ہے۔

19. مستطیل نما مکافی زائد کے تین نقطوں P، Q، R پر عماد، منحنی کو کسی ایک ہی نقطہ پر کاٹتے ہیں۔ ثابت کیجیے کہ مکافی زائد کا مرکز مثلث PQR کا وسطانی مرکز ہے۔

20. ثابت کیجیے کہ مستطیل نما مکافی زائد $xy=c^2$ کے عماد وتروں کے قطب کا طریق، منحنی

$$(x^2-y^2)^2+4c^2xy=0$$

ہے۔

21. دکھائیے کہ مکافی زائد $y^2-x^2=a^2$ کے خطوط مماس کے مکافی $y^2=4ax$ کے لحاظ سے قطبوں کا طریق ناقص $4x^2+y^2=4a^2$ ہے۔

باب 15

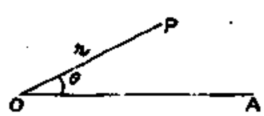
قطبی محدّدات

15.1 . قطبی محدّدات :

کسی نقطہ کے مقام کو کارتیزی محددات سے ظاہر کرنے کے بجائے ہم اس کو کسی مقررہ نقطہ سے ملانے والے خط مستقیم کی لمبائی اور اس کی سمت سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ یہ دونوں رقم یعنی لمبائی اور سمت بتانے والا زاویہ ــــ نقطہ کے قطبی محددات کہلاتے ہیں۔

مان لیا O مقررہ نقطہ اور OA ایک معین خط مستقیم ہے۔

مان لیا P کوئی نقطہ ہے۔



شکل 88

تب لمبائی OP ، جسے عام طور پر ہم r سے ظاہر کرتے ہیں اور AOP∠ کی ناپ ، جسے عام طور پر ہم θ سے ظاہر کرتے ہیں ، نقطہ کے قطبی محددات ہیں۔

نقطہ O کو قطب یا مبدأ کہتے ہیں اور OA کو ابتدائی خط کہتے ہیں۔

r کو سمتیہ نصف قطر اور θ کو زاویہ سمتی کہتے ہیں۔

نوٹ : اگر سمتیہ نصف قطر کو O سے شروع کر کے اس خط کے ساتھ ساتھ ناپا جائے جو سمتی زاویہ کی حدبندی کرتا ہے ، تو وہ مثبت مانا جاتا ہے اور اگر مخالف سمت میں ناپا جائے تو منفی مانا جاتا ہے (یعنی 'OP کی سمت میں ، جہاں 'P ، PO پر واقع ہے جس کو O سے آگے بڑھایا گیا ہے)۔

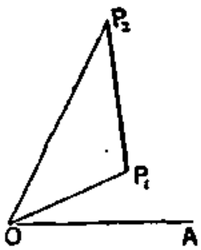
اگر OP ، OA سے اپنی موجودہ حالت کی طرف گھومتا ہے (یعنی غیر ساعت وار سمت

میں) تو سمتی زاویہ مثبت مانا جاتا ہے۔

قطبی محددات میں کسی ایک ہی نقطہ کو ظاہر کرنے والے محددات کے جوڑے لاتعداد ہو سکتے ہیں۔ اس طرح (r, θ) ، $(r, \theta+2\pi)$ ، $(r, \theta+4\pi)$ ، .... ؛ $(r, \theta-2\pi)$ ، $(r, \theta-4\pi)$ ، ... ؛ $(-r, \theta+\pi)$ ، $(-r, \theta+3\pi)$ ، .... ؛ اور $(-r, \theta-\pi)$ ، $(-r, \theta-3\pi)$ . . . . ؛ یہ سبھی ایک ہی نقطہ P کو ظاہر کرتے ہیں۔ ان محددات کی ترسیم کرکے طالب علم اس کو آسانی سے سمجھ سکتا ہے۔

15.2 . دو نقطوں کے درمیان کی دوری :

دو نقطوں کے قطبی محددات دیے ہونے پر ان کے درمیان کی دوری نکالنا۔



شکل 89

مان لیا P_1 نقطہ (r_1, θ_1) اور P_2 نقطہ (r_2, θ_2) ہے۔

تب $\triangle P_1 \; OP_2$ میں ہم دیکھتے ہیں کہ

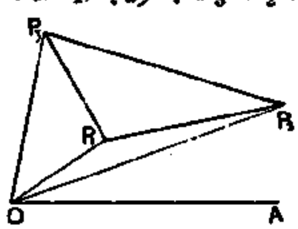
$OP_1=r_1$ ، $OP_2=r_2$ اور

$$\angle P_1OP_2=\angle AOP_2-\angle AOP_1=\theta_2-\theta_1$$

15.3 . مثلث کا رقبہ :

کسی مثلث کے زاویائی نقطوں کے قطبی محددات دیے ہونے پر اس کا رقبہ نکالنا۔

مان لیا $P_1P_2P_3$ ایک مثلث ہے، جس کے راس P_1 ، P_2 ، P_3 بالترتیب (r_1, θ_1) ، (r_2, θ_2) ، (r_3, θ_3) ہیں۔



شکل 90

تب شکل سے ،

$$\triangle P_1P_2P_3=\triangle OP_2P_3-\triangle OP_2P_1-\triangle OP_1P_3$$

لیکن

$$\triangle OP_2P_3 = \tfrac{1}{2}OP_2 . OP_3 \sin P_2OP_3=\tfrac{1}{2}r_2r_3\sin(\theta_3-\theta_2)$$

اسی طرح

$$\triangle OP_2P_1 = \tfrac{1}{2}r_2r_1 \sin(\theta_1-\theta_2) = -\tfrac{1}{2}r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)$$

اور

$$\triangle OP_1P_3 = \tfrac{1}{2}r_1r_3\sin(\theta_3-\theta_1) = -\tfrac{1}{2}r_1r_3\sin(\theta_1-\theta_3)$$

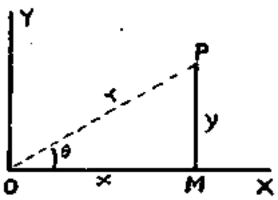
اس لیے

$$\triangle P_1P_2P_3 = \tfrac{1}{2}\{\mathbf{r_1r_2\sin}(\theta_2-\theta_1) + \mathbf{r_2r_3\sin}(\theta_3-\theta_2) + \mathbf{r_3r_1\sin}(\theta_1-\theta_3)\}$$

15.4 . تبدیلی :

کسی نقطہ کے قطبی محددات کو مستطیل نما کارتیزی محددات میں اور مستطیل نما کارتیزی محددات کو قطبی محددات میں بدلنا۔

عام طور پر x-محور کو ابتدائی خط کے ساتھ ساتھ لیا جاتا ہے۔ ایسا کرنے پر ہمیں حاشیہ میں دی گئی شکل ملتی ہے۔



شکل 91

OX پر PM عمود کھینچیے۔ تب $\triangle OMP$ سے

$$\mathbf{y = r \sin}\,\theta \;،\; \mathbf{x = r \cos}\,\theta$$

ہم دیکھتے ہیں کہ x ، y میں دی گئی کسی مساوات میں x کی جگہ $r\cos\theta$ اور y کی جگہ $r\sin\theta$ رکھنے پر اسے قطبی محددات میں بدلا جا سکتا ہے۔

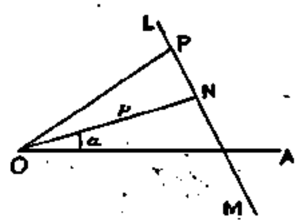
مذکورہ بالا مساوات کا مربع کرکے جوڑنے، اور تقسیم کرنے پر ہمیں بالترتیب حسب ذیل رشتے ملتے ہیں :

$$\theta = \mathbf{\tan^{-1}(y/x)} \;،\; \mathbf{r} = \sqrt{(\mathbf{x^2+y^2})}$$

جن کے استعمال سے قطبی محددات میں دی گئی کسی مساوات کو کارتیزی محددات والی مساوات میں بدلا جا سکتا ہے۔

15.5. خطِ مستقیم کی مساوات :

کسی خط مستقیم کی مساوات قطبی محددات میں نکالنا۔ [کسی کارتیسزی مساوات میں x کی جگہ $r\cos\theta$ اور y کی جگہ $r\sin\theta$ رکھنے پر، مساوات قطبی محددات میں نکالی جا سکتی ہے۔ اس کے علاوہ سیدھے بھی قطبی مساوات حسب ذیل طریقے سے نکالی جا سکتی ہے :]



شکل 92

مان لیا LM دیا ہوا خط مستقیم، OA ابتدائی خط اور ON نقطہ O سے خط LM پر کھینچا گیا عمود ہے۔

مان لیا $ON=p$ اور وہ زاویہ جو ON ابتدائی خط سے بناتا ہے، α ہے یعنی $\angle AON=\alpha$ ۔

ہم یہ مان لیتے ہیں کہ p اور α دیے ہیں۔

مان لیا LM پر P کوئی نقطہ (r, θ) ہے۔ تب $OP=r$ اور $\angle AOP=\theta$ ، جس سے $\angle NOP=\theta-\alpha$

لیکن قائمہ زاویہ مثلث ONP سے جس میں N پر زاویہ قائمہ ہے، ہم دیکھتے ہیں کہ $OP\cos NOP=ON$ اس لیے $r\cos(\theta-\alpha)=p$

اس سے ظاہر ہے کہ **اس خط مستقیم کی قطبی مساوات جس پر قطب سے کھینچے گئے عمود کی لمبائی p ہے اور جو ابتدائی خط سے زاویہ α بناتا ہے، یہ ہے :**

$$\mathbf{r\cos(\theta-\alpha)=p}$$

قطبی محددات میں دی گئی ان تمام مساوات کو جو خطوط مستقیم ظاہر کرتی ہیں، مستقلات کی مناسب تبدیلی کرکے اس شکل میں لایا جا سکتا ہے۔

ضمنی نتیجہ 1 : مبدأ سے گزرنے والے اور ابتدائی خط سے زاویہ β بنانے والے خط مستقیم کی قطبی مساوات

$$\theta=\beta$$

ہے کیوں کہ خط مستقیم پر کسی بھی نقطہ کا سمتی زاویہ β ہے، چاہے r کی کچھ بھی قیمت ہو۔ (y-محور

کے متوازی خط مستقیم کی مساوات $x=a$ سے موازنہ کیجیے۔)

مساوات $r\cos(\theta-\alpha)=p$ میں $p=0$ رکھنے پر ہمیں یہی نتیجہ حاصل ہو سکتا ہے۔ ایسا کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $r\cos(\theta-\alpha)=0$ یعنی $\cos(\theta-\alpha)=0$، کیونکہ $r=0$ صرف ایک ہی نقطہ (یعنی قطب) ظاہر کرتا ہے۔ یہ مساوات $\theta=\alpha+\frac{1}{2}\pi$ کے معادل ہے یعنی $\theta=\beta$ کیوں کہ $\beta=\alpha+\frac{1}{2}\pi$۔

ضمنی نتیجہ 2 : شکل $c/r=a\cos\theta+b\sin\theta$ رکھنے والی ہر ایک قطبی مساوات ایک خط مستقیم ظاہر کرتی ہے؛ کیوں کہ r سے ضرب کرکے اور x کی جگہ $r\cos\theta$ اور y کی جگہ $r\sin\theta$ رکھنے پر یہ $ax+by+c=$ ہو جاتی ہے، جو ایک خط مستقیم ظاہر کرتی ہے۔ اس مساوات میں $a=k\cos\alpha$، $b=k\sin\alpha$ جہاں $k=\sqrt{(a^2+b^2)}$ رکھنے پر اس کو شکل $r\cos(\theta-\alpha)=p$ میں بدلا جا سکتا ہے۔

مثال : قطب سے خط $1/r=5\cos\theta-3\sin\theta$ پر کھینچے گئے عمود کی لمبائی اور اس کی سمت بتائیے۔ $5=k\cos\alpha$، $-3=k\sin\alpha$ رکھیے، جس سے k اور α حسب ذیل رشتوں سے ملتے ہیں :

$$\tan\alpha=-\tfrac{3}{5}\ ,\quad k^2=5^2+3^2=34$$

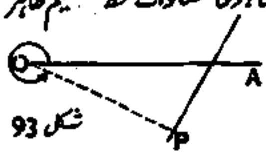
جہاں α ایک منفی زاویہ حادہ ہے۔ کیوں کہ k مثبت لیا گیا ہے، اس لیے $\cos\alpha$ مثبت اور $\sin\alpha$ منفی ہے۔

یہ بدل کرنے پر دی ہوئی مساوات حسب ذیل شکل اختیار کر لیتی ہے :

$$\frac{1}{r}=k(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)$$

$$\frac{1}{k}=r\cos(\theta-\alpha)$$

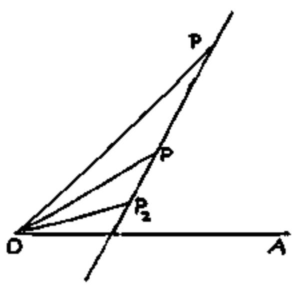
خط مستقیم کی معیاری مساوات سے موازنہ یہ دکھاتا ہے کہ دی ہوئی مساوات خط مستقیم ظاہر کرتی ہے، جس پر پول سے کھینچے گئے عمود کی لمبائی $1/k$ ہے اور جو ابتدائی خط سے منفی زاویہ حادہ $\tan^{-1}(-3/5)$ بناتا ہے۔



شکل 93

15·6. دو دیے ہوئے نقطوں سے گزرنے والا خط:

دو دیے ہوئے نقطوں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی قطبی مساوات نکالنا۔



شکل 94

مان لیا دیے ہوئے نقطوں P_1 اور P_2 کے محددات بالترتیب (r_1, θ_1) اور (r_2, θ_2) ہیں اور مانا P خط P_1P_2 کوئی نقطہ ہے جس کے محددات (r, θ) ہیں۔

تب کیوں کہ

$$\triangle P_1OP_2 = \triangle P_1OP + \triangle POP_2$$

اس لیے،

$$\tfrac{1}{2}r_1r_2\sin(\theta_1-\theta_2) = \tfrac{1}{2}rr_1\sin(\theta_1-\theta) + \tfrac{1}{2}rr_2\sin(\theta-\theta_2)$$

یا

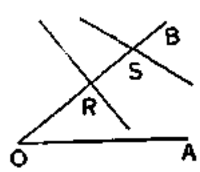
$$\frac{r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)}{r} = r_1\sin(\theta-\theta_1) - r_2\sin(\theta-\theta_2)$$

جو مطلوبہ مساوات ہے۔

مثال: ایک مقررہ نقطہ O سے ایک متغیر خطِ مستقیم OB کھینچا جاتا ہے جو دو معین خطِ مستقیم کو R اور S میں کاٹتا ہے۔ خط OB پر ایک ایسا نقطہ P لیا گیا ہے کہ

$$2/OP = 1/OR + 1/OS$$

ثابت کیجیے کہ نقطہ P کا طریق ایک ایسا خطِ مستقیم ہے جو معین خطوط مستقیم سے ہم نقطہ ہے۔



95

قطب کو مقررہ نقطہ O پر لیجیے اور O سے گزرنے والے خطِ مستقیم کو ابتدائی خط مانیے۔

مان لیا معین خطوط مستقیم کی مساوات

$$a/r = \cos(\theta+\alpha) \quad \text{اور} \quad b/r = \cos(\theta+\beta) \quad . \; . \; . \quad (1)$$

ہیں۔

اب O سے گزرنے والے کسی خط مستقیم OB کی مساوات $\theta=\lambda$ ہے۔
یہ خطوط (1) سے نقطوں R اور S میں وہاں ملے گا جہاں

$$a/OR=\cos(\lambda+\alpha) \quad \text{اور} \quad b/OS=\cos(\lambda+\beta)$$

تب OB پر چنے گئے نقطہ P کے محددات، جو دی ہوئی شرط کو مطمئن کرتا ہے، (OP, ϕ) ہیں، جہاں OP بذریعہ

$$2/OP=(1/a)\cos(\phi+\alpha)+(1/b)\cos(\phi+\beta)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس رشتہ میں OP کی جگہ r اور ϕ کی جگہ θ رکھنے پر P کا طریق ملتا ہے اور وہ (ab سے دونوں طرف ضرب کرنے پر) حسب ذیل ہے :

$$2ab/r=b\cos(\theta+\alpha)+a\cos(\theta+\beta) \quad \ldots \quad (2)$$

یہ مساوات ایک خط مستقیم ظاہر کرتی ہے کیوں کہ اس میں دائیں طرف کے ارکان صرف $\sin\theta$ اور $\cos\theta$ میں ہیں۔

پھر کیوں کہ (2) کو مساوات (1) کے خطی مجموعہ کی شکل میں حاصل کیا جاسکتا ہے، یعنی

$$(a+\lambda b)/r=\cos(\theta+\alpha)+\lambda\cos(\theta+\beta)$$

[درحقیقت $\lambda=a/b$ لینے پر] ، اس لیے خط (2) مساوات (1) سے ظاہر ہونے والے خطوط کے نقطہ تقاطع سے گزرتا ہے۔

مشق 49

1. مساوات $x^3+3x^2y-3xy^2-y^3=0$ سے ظاہر ہونے والے خطوط مستقیم کا درمیانی زاویہ نکالیے۔

[اشارہ : اسے قطبی مساوات میں بدلنے پر یہ $\tan 3\theta=-1$ ہو جاتی ہے۔ لہٰذا وغیرہ وغیرہ] ۔

2. ثابت کیجیے کہ مساوات $m(x^3-3xy^2)+y^3-3x^2y=0$ تین ایسے خطوط مستقیم ظاہر کرتی ہے جو ایک دوسرے پر برابر زاویہ بناتے ہیں۔

3. دکھائیے کہ $1/r=f(\theta)$ ایک خط مستقیم کی مساوات ہے، جہاں
$f(\theta)=a\cos(\theta+\alpha)+b\cos(\theta+\beta)$ ۔ یہ بھی دکھائیے کہ اس پر عمود کسی خط مستقیم کی
مساوات $\lambda/r=f(\theta+\frac{1}{2}\pi)$ ہے، جہاں λ پیرامیٹر ہے۔

4. ثابت کیجیے کہ خطوط $1/r=a\cos\theta+b\sin\theta$ اور $1/r=a'\cos\theta+b'\sin\theta$
کے نقطۂ تقاطع سے گزرنے والا کوئی خط

$$(1+\lambda)/r=(a+\lambda a')\cos\theta+(b+\lambda b')\sin\theta.$$ ہے۔

لہٰذا، قطب اور دونوں دیے ہوئے خطوط کے نقطۂ تقاطع سے گزرنے والے خط کی مساوات نکالیے۔

5. دکھائیے کہ منحنی $l/r=1+e\cos\theta$ کا خط $1/r=a\cos\theta+b\sin\theta$ سے کٹنے والا
وتر قطب پر زاویہ قائمہ بنائے گا اگر

$$(la-e)^2+l^2b^2=2$$

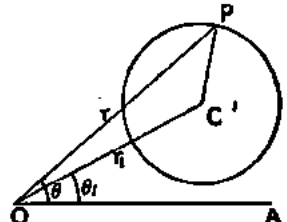
6. دیے ہوئے نقطہ O سے گزرنے والا ایک متغیر OB لیا گیا ہے جو دو معین خطوط مستقیم کو
R اور S میں کاٹتا ہے۔ OB پر واقع نقطہ P کا طریق نکالیے، جب کہ

(i) $OP^2=OR.OS$

(ii) $2OP=OR+OS$

15·7. دائرہ کی قطبی مساوات :

کسی دائرہ کا نصف قطر اور مرکز کے محددات دیے ہونے پر اس کی قطبی مساوات نکالنا۔



شکل 96

مان لیا دائرہ کا مرکز C (r_1, θ_1) اور نصف قطر a ہے۔ مانا دائرہ پر کوئی نقطہ P (r, θ) ہے۔ تب زاویہ $COP=\theta-\theta_1$ اور $\triangle OCP$ سے

$$CP^2=OC^2+OP^2-2OC.OP\cos COP$$

جس سے

$$a^2 = r_1^2 + r^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \theta_1)$$

حاصل ہوتا ہے، جو دائرہ کی مطلوبہ مساوات ہے۔

نوٹ : اگر قطب دائرہ پر ہو، تب $r_1 = a$ ؛ اس لیے تب دائرہ کی مساوات $r = 2a\cos(\theta - \theta_1)$ ہوگی۔

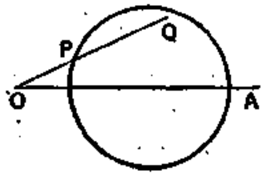
اس میں $\theta_1 = 0$ رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ابتدائی خط کو قطر اور اس کے ایک سرے کو قطب لیا جائے، تو نصف قطر a والے دائرہ کی مساوات یہ ہوگی :

$$\mathbf{r = 2a \cos \theta}$$

اگر قطر $2a$ سے اس پر اضلال کو r کے برابر رکھ دیا جائے تو یہ مساوات آزادانہ طور پر بڑی آسانی سے حاصل کی جا سکتی ہے :

مثال : O ایک مقررہ نقطہ ہے۔ دیے ہوئے دائرہ پر P کوئی نقطہ ہے۔ OP کو ملا کر اس پر ایک نقطہ Q ایسا لیا گیا ہے کہ $OP \cdot OQ$ ایک مستقل ہے۔ ثابت کیجیے کہ Q کا طریق ایک ایسا دائرہ ہے جو نقطہ O کو اصل دائرہ پر لینے سے خط مستقیم میں بدل جاتا ہے۔

O کو قطب، O اور دیے ہوئے دائرہ کے مرکز سے گزرنے والے خط کو ابتدائی خط مانیے؛ تب دائرہ کی مساوات



شکل 97

$$r^2 - 2rr_1 \cos\theta + c = 0$$

ہوگی، جہاں r_1 اور c مستقلات ہیں۔

مان لیا دائرہ پر کسی نقطہ P کے محددات (ρ, α) ہیں؛ تب

$$\rho^2 - 2\rho r_1 \cos\alpha + \;= 0 \qquad \cdots \quad (1)$$

پھر، کیوں کہ Q ، OP پر واقع ہے (ضرورت پڑے تو بڑھانے پر)، اس لیے Q کا سمتی زاویہ α ہے۔

پھر، کیوں کہ

(مانا) ، مستقل $OP.OQ = k$

اس لیے $OQ = k/p$

اس لیے Q کے محددات یہ ہیں :

$$r = k/p \quad \text{اور} \quad \theta = \alpha$$

Q کا طریق حاصل کرنے کے لیے مساوات (2) اور (1) سے p اور α کو خارج کیجیے۔ جس سے طریق حسب ذیل ملتا ہے :

$$k^2/r^2 - 2(k/r)r_1 \cos\theta + c = 0$$

یعنی

$$cr^2 - 2krr_1 \cos\theta + k^2 = 0, \qquad \ldots (3)$$

جو ایک دائرہ کی مساوات ہے۔

اگر O ، اصل دائرہ پر ہو تو $c = 0$ اور تب طریق (3) $r\cos\theta = \frac{1}{2}k/r_1$ ہو جاتا ہے جو ایک خط مستقیم کی مساوات ہے۔

مشق 50

1. دائرہ $r = 2a\cos\theta$ اور خط مستقیم $r\cos(\theta - \beta) = p$ کے نقاط تقاطع پر r قیمت حاصل کرنے کے لیے مساوات نکالیے۔

اگر خط مستقیم دائرہ کا خط مماس ہو تو p کی قیمت نکالیے۔

2. دکھائیے کہ دائرے

$$r = 2a\cos(\theta - \alpha) \quad \text{اور} \quad r = 2b\cos(\theta - \beta)$$

ایک دوسرے کو زاویہ $\alpha - \beta$ پر کاٹتے ہیں۔

3. خط $1/r = a\cos\theta + b\sin\theta$ کے دائرہ $r = 2c\cos\theta$ کو چھونے کی شرط نکالیے۔

4. دکھائیے کہ a کی تمام قیمتوں کے لیے، خط مستقیم

$$r\cos(\theta - \alpha) = a + r_1\cos\alpha$$

دائرہ $r^2 - 2rr_1\cos\theta + r_1^2 - a^2 = 0$ کا خط مماس ہے۔

5. کسی دائرہ کا O سے گزرنے والا متغیر وتر OPQ کھینچا گیا ہے اور اس پر ایک ایسا نقطہ R لیا گیا ہے جس سے OR ، OP اور OQ کے درمیان کا حسابی اوسط ہے۔ R کا طریق نکالیے۔

6. دکھائیے کہ نقطوں (a, α) اور (b, β) کو ملانے والے خط کو قطر مان کر کھینچے گئے دائرہ کی قطبی مساوات یہ ہے :

$$r^2 - r\{a\cos(\theta-\alpha) + b\cos(\theta-\beta)\} + ab\cos(\alpha-\beta) = 0$$

7. ایک دائرہ نقطہ (r_1, θ_1) سے گزرتا اور ابتدائی خط کو قطب سے c کی دوری پر چھوتا ہے۔ دکھائیے کہ اس کی قطبی مساوات یہ ہے :

$$\frac{r^2 - 2cr\cos\theta + c^2}{r\sin\theta} = \frac{r_1^2 - 2cr_1\cos\theta_1 + c^2}{r_1\sin\theta_1}$$

8. دو دیے ہوئے دائروں کے نقاط تقاطع میں سے ایک نقطہ O ہے اور O سے گزرنے والا کوئی خط دائروں کو بالترتیب نقطوں P اور Q میں کاٹتا ہے۔ دکھائیے کہ PQ کے وسطی نقطہ کا طریق ایک دائرہ ہے۔

جوابات

مشق 1

1. $(2, 1)$ ، $(-3,-1)$ ، $(0,-2)$ ، $(3,-1)$ ، $(-2,-2)$ ، $(-1, 0)$

3. $(0, 0)$ 4. 0 5. طول صفر ہے۔

6. (a, a) ، $(-a, a)$ ، $(-a,-a)$ ، $(a,-a)$

7. (a, b) ، $(-a, b)$ ، $(-a,-b)$ ، $(a,-b)$

مشق 2

1. (i) 5 ؛ (ii) 13 ؛ (iii) $\sqrt{\{2(a^2+b^2)\}}$ ؛ (iv) r

2. $(3, 6)$ ↓ $(1, 2)$ 4. $\sqrt{85}$ 8. $12\frac{1}{2}$ ؛ $5\sqrt{2}$

مشق 3

1. $(\frac{1}{5},-\frac{8}{5})$

2. $(\frac{1}{5},-\frac{3}{5})$ ؛ AB کو $m_1 : m_2$ کی نسبت میں تقسیم کرنے والا نقطہ وہی ہے جو BA کو $m_2 : m_1$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

3. $(ab-a^2-b^2, a+b)$ 4. $(\frac{8}{3},-1)$

5. $(-\frac{13}{9},-\frac{1}{2})$ 6. $(1,-\frac{8}{3})$ ، $(-1,-\frac{10}{3})$

7. $2 : 3$ ، $2 : 3$ 9. $(\frac{10}{3}, \frac{7}{3})$ ، $(\frac{13}{4}, \frac{9}{4})$

14. $(3, 3)$ ؛ $\sqrt{10}$

مشق 4

1. 10 2. $\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

3. $\frac{1}{2}a^2\sin(\alpha\sim\beta)$ 4. -1 یا $\frac{1}{3}$ 5. 11

10. $(\frac{1}{2}, 4)$ ، $(\frac{4}{3}, \frac{24}{3})$ 11. 7

مشق 5

1. $(3, 5)$ ، $(2, 0)$ ، $(-2, 0)$ 2. 8

3. (i) $x=5$ ؛ (ii) $y=2x$ ؛ (iii) $x^2+y^2+6x-8y=0$ ؛
(iv) $3x^2-y^2+2ax-a^2=0$ 4. (i) $x^2+y^2-ax=0$ ؛
(ii) $x^2+y^2+\frac{10}{3}ax+a^2=0$ ؛ (iii) $x^2/k^2+y^2/(k^2-a^2)=1$

6. $x+y=a$

7. $x^2+y^2=a^2$ ، x-محور کو AB کے ساتھ ساتھ، مبدأ AB کے وسطی نقطہ پر، اور AB کی لمبائی $2a$ لے کر ؛

8. (i) $4ax-2by=2a^2-b^2$ ، CA کو x-محور، CB کو y-محور ، $CM=a$ اور $CN=b$ لے کر ؛ (ii) $ay+bx-ab=2a^2$

9. $x^2+y^2+a^2-k=0$ ، مستقل جوڑ $2k$ ہے اور محور کو سوال 7 کی طرح مان کر

10. $x+y=5$ جب Q مبدأ ہے اور y-محور عموداً نیچے کی طرف لیا جائے

مشق 6

1. $x=3$ ، $x+7=0$ 2. $y=2$ ، $6y=5$ ، $3y+2=0$

3. $x-y\sqrt{3}+5\sqrt{3}=0$ 4. $-\frac{1}{2}$ ، $45°$

5. $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ 6. $y+x\sqrt{3}=3$

7. $2y-2x+5=0$ ، $2y+2x+5=0$

8. $y+4=0$ ، $x=3$ 9. $x-y=0$ ، $x+y=0$

10. $x-y-4=0$ ، $x+y+4=0$ ، $x+y\sqrt{3}+4\sqrt{3}=0$

11. x-محور سے $60°$ ؛ -4

12. x-محور سے $45°$ ؛ -3

مشق 7

1. $4x+3y=12$ ، $4x-3y=12$ ، $4x-3y+12=0$ ، $4x+3y+12=0$

2. $2x+y=2k$

3. $x\sqrt{3}+y=8$

4. $x-y\sqrt{3}=2$

5. $2x+y=10$

6. $x+y=7$ یا $4x+3y=24$

7. $2x-3y=12$

8. $5y-8x=60$ یا $5y-2x=30$

9. $x-y\cot\alpha=a$

10. نہیں؛ شہر کے سامنے۔

مشق 8

1. 30° ، $\frac{1}{2}$

2. -45° ، $3\sqrt{2}$

3. $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ ، $\frac{27}{4}$

5. 60° ، -4 ، $\frac{8}{3}\sqrt{3}$

7. $\frac{5}{2}$ ، $(1, \frac{3}{4})$

8. ان آٹھوں مساوات میں سے کوئی ایک ؛ $\pm 3x \pm 4y = 12$ اور $\pm 4x \pm 3y = 12$

مشق 9

1. $2x+y=1$

2. $bx+ay=ab$

3. $2x-(m_1+m_2)y+2am_1m_2=0$

4. $bx\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+ay\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=ab\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

مشق 10

1. 45° ، $(-1, 2)$

2. $(\frac{7}{4}, \frac{9}{8})$ ، $\tan^{-1}\frac{9}{10}$

3. $\{ab(a+b)/(a^2+b^2)$ ، $ab(a-b)/(a^2+b^2)\}$ ، $\frac{1}{2}\pi$

4. $\{a/m_1m_2, a(1/m_1+1/m_2)\}$ ، $\tan^{-1}\{(m_1-m_2)/(1+m_1m_2)\}$

5. $2x+3y=13$

6. 3

7. $\frac{9}{2}$ مربع اکائیاں

مشق 11

1. $3x-4y+1=0$

2. (i) $2x=y$ (ii) $x+y=5$ (iii) $8x-7y+118=0$

3. (i) $y-1=m(x-2)$ ، $x-y=1$ ؛ (ii) $x=3y$ ، $3x+y=0$ ؛ $\frac{1}{2}\pi$

4. $5x-2y+18=0$ ، $2x+5y-16=0$

5. $(-\frac{1}{10}, \frac{17}{10})$ 6. $(-\frac{5}{4}, \frac{5}{12})$

7. $5:8$ 8. $7x+y=16$ ، $x-7y+12=0$!

. x- محور سے $15°$ یا $75°$ کے زاویہ پر

10. (i) $x\cos\lambda+y\sin\lambda=p$ ؛ (ii) $x/a+y/\lambda=1$ یا $x+\lambda y=a$

(iii) $y=x\tan\alpha+\lambda$ (iv) $x/\lambda+y/(c-\lambda)=1$

11. (i) $ax-by=ax'-by'$ (ii) $x/a-y/b=x'/a-y'/b$

مشق 12

1. 3   2. 8   3. $2a\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

4. $(1\pm100\sqrt{2}, 7)$ ، $(1, 7\pm100\sqrt{2})$

7. $11/2\sqrt{13}$ 9. $y=a$ ، $3y-4x=3a$ ، $2x+y=5a$ 11. 10

مشق 13

1. $91x+7y=39$ ، $11x-143y=29$

2. $11x=3y$ ، $3x+11y=10$ 3. $x=y$ ، $(a+b)(x+y)=2ab$

4. $x=\frac{1}{2}p\sec\alpha$ ، $y=\frac{1}{2}p\operatorname{cosec}\alpha$

5. $6x+8y+31=0$ ، $16x-12y=19$ 6. $(\frac{1}{16}, \frac{37}{32})$ ، $(-\frac{1}{14}, \frac{73}{28})$

7. $9x-7y=1$ ، $7x+9y=73$ 8. $6x-7y=2$ 9. $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$

10. $x+y=3$ (داخلی) ، $x-y=1$ (خارجی)

12. $2x+y=3$ ، $x-2y+1=0$ ؛ بعد کا

مشق 14

2. $(2a-x_1, 2b-y_1)$ 4. $x+y\sqrt{3}=4$

6. (i) $(\frac{8}{5}, \frac{7}{5})$ ؛ (ii) $(\frac{112}{27}, \frac{16}{9})$ 7. (i) $(\frac{12}{11}, \frac{40}{11})$ ؛ (ii) $(-4, -3)$

8. 42 مربع اکائیاں ، $(\frac{8}{5}, \frac{14}{5})$ 9. $(-1, 2)$

12. 4 مربع اکائیاں ، $(-18, 6)$ 15. $23x-7y=9$ ، $7x+23y=53$

16. $(2-\sqrt{3})x-y=5-2\sqrt{3}$ ، $(2+\sqrt{3})x-y=5+2\sqrt{3}$

17. (i) $\frac{8}{5}$ ؛ (ii) $\frac{17}{5}\sqrt{5}$ ؛ (iii) $(d-c)/\sqrt{(1+m^2)}$ 18. $12x-y=31$

20. $9x-7y=1$ ، $7x+9y=73$ 22. داخلی ناصف یہ ہیں :

$16x+28y+51=0$ ، $7x+7y+15=0$ ، $9x-7y-3=0$

23. $x-5y=28$ یا $5x+y=10$

مشق 15

1. $39x-65y=34$ 2. $2x-y=3$

3. $20x+81y=79$ 4. $34x-43y=37$

5. $x=y$ 6. $x=y$ 7. 5

8. $10x+11y=51$ 9. $23x+23y=11$ یا $x-23y+5=0$

مشق 16

1. $x^2+4y^2=\frac{4}{5}a^2$

2. (i) $(k-1)x=\pm(k+1)a$

(ii) $x^2-y^2\pm 2xy\cot\alpha=a^2$ (iii) $y=\pm 2a/\lambda$

3. $x^2+y^2-hx-ky=0$

4. $(x^2+y^2)(x+y)=cxy$ ، c داخلی قطعوں کا جوڑ ہے

5. $p^2(x^2+y^2)-4x^2y^2=0$ 6. $x+y=\frac{1}{2}c$

7. $x^2+y^2=\frac{1}{4}$ ، محاور کو فرش اور دیوار میں لے کر۔

مشق 17

1. $3x-2y-11=0$ 2. $x^2+y^2=4$

3. $x^2+y^2=c^2$

4. $x^2+y^2=20$ ، $(2, -3)$

مشق 18

1. $x+y=7$ ، $17x+31y=175$
2. $66x-88y+101=0$
3. $2x=3y$ ، $3x=4y$ ؛ $(\frac{18}{13}, \frac{12}{13})$ ، $(\frac{28}{35}, \frac{21}{35})$
4. $4x-3y+2=0$
5. $8x-y=7$ ، $x+8y=9$
6. $43x-29y=71$
9. $-(a_1a_3+b_1b_3)/(a_2a_3+b_2b_3)$
13. $x^2/b^2+y^2/a^2=1$
15. $(\frac{8}{3}, \frac{14}{3})$
16. $(2, 0)$ ، $x^2+3xy+4y^2+1=0$

مشق 19

1. $(x-y)(x-2y-1)=0$
2. $y(x+y-1)(x-3)=0$
3. $x^2-3xy+2y^2=0$
4. (i) $x-y=0$ ، $x+y=0$ ؛ (ii) $x=0$ ، $y=0$ ؛
(iii) $x=0$ ، $2y=1$ ؛ (iv) $x=1$ ، $x=2$ ، $x+3=0$ ؛
(v) $x=4y$ ، $x=y$ ؛ (vi) $x=0$ ، $x-3y=4$
5. $\frac{27}{4}$ مربع اکائیاں 6. خطوط مستقیم $x-y=2$ اور $x+y=2$ ؛ $(2, 0)$ 90°
7. 9 مربع اکائیاں
9. $6x+5y=56$ ، $6x-5y+14=0$

مشق 20

1. (i) $\tan^{-1} 2\sqrt{3}$ ؛ (ii) $\sec^{-1} q$ ؛ (iii) $\frac{1}{2}\pi$ ؛ (iv) $\cot^{-1}(\frac{1}{2}a^2)$
2. (i) $y+(\sec\theta-\tan\theta)x=0$ ، $y+(\sec\theta+\tan\theta)x=0$ ؛ θ ؛
(ii) $y-(\sec\theta-\tan\theta)x=0$ ، $y+(\sec\theta+\tan\theta)x=0$ ؛ $\frac{1}{2}\pi$ ؛
(iii) دو خطوط مستقیم $y-x\cos\theta=0$ ؛ 0 ؛
(iv) $ax-by=0$ ، $bx+ay=0$ ؛ $\frac{1}{2}\pi$
3. $\cos^{-1}(\tan\theta)$
4. $5x^2+xy-2y^2=0$
5. (i) q^2+2p ؛ (ii) q/p ؛ (iii) $-q/(p+1)$ ؛ (iv) $\sqrt{(q^2+4p)}$

9. $ab(1+\lambda)^2=4h^2\lambda$

مشق 21

1. $x^2+xy-y^2=0$
2. $15x^2+2xy-15y^2=0$
3. $(mx-y)(x+my)=0$
4. $x^2+2xy\operatorname{cosec}2\theta-y^2=0$
6. $(a-b)(x^2-y^2)+4hxy=0$

مشق 22

2. $\tan^{-1}\frac{17}{8}$
3. $\tan^{-1}\frac{1}{7}$ ؛ 2
4. 10 ؛ $2y-3x=5$ ، $2x+5y=3$
5. 3 ؛ $y-x=2$ ، $2y-x=1$ ؛ $\frac{2}{3}$ ؛ $4y-x=2$ ، $\frac{1}{2}y-x=1$
6. 11 ؛ $4y-3x=5$ ، $2x+3y=7$ یا $-\frac{83}{12}$ ، $8x+12y=15$ ، $12y-9x=28$
7. $\frac{7}{10}\sqrt{5}$
8. (i) $(1,3)$ ؛ 90° ؛ (ii) $(-\frac{23}{5}, \frac{13}{5})$ ، 45°
9. $bx^2-2hxy+ay^2=0$

مشق 23

1. $xy=0$
3. $\frac{1}{2}$
5. ± 1
6. $(4-m^2)x^2-2mxy+3y^2=0$ ؛ $\pm\sqrt{7}$

مشق 24

2. $(3, \frac{7}{2})$ ، $(-\frac{1}{3}, -\frac{8}{3})$ ؛ $\frac{8}{3}$
3. $13x+3y=27$
4. $x-7y=5$ ، $x=7y$
5. ضلعے ہیں: $2x+y=4$ ، $x-2y+13=0$ ، $2x+y=14$ ، $x-2y+3=0$ ؛ وتر ہیں: $3x-y=1$ ، $x+3y=17$
6. $(-1,1)$ ، $(3,4)$ ، $(6,0)$ ؛ یا $(-1,1)$ ، $(-5,-2)$ ، $(-2,-6)$ ؛ 25
7. $(1, a+b+c+abc)$
8. $x^2+y^2\pm\frac{4}{3}\sqrt{3}y-4=0$
10. $5x^2+16xy-7y^2=0$
11. $2x-y=1$ ، $2x-y=2$
12. $abc+2fgh=af^2+bg^2+ch^2$ ، $h^2=ab$ ؛ $\frac{a}{b}$

18. $1+\lambda : -\lambda$ 19. $x=6$ ، $y=2$ ؛ $\sqrt{3}$ ؛ 3

23 ، $7(x-3)^2-6(x-3)(y-2)-7(y-2)^2=0$

26. $3x^2-3xy-2y^2-3x+7y=2$ 28. $(gx-fy)(gx+fy+c)=0$

32. $(a'b-ab')^2=4(ah'-a'h)(b'h-bh')$

مشق 25

1. $x^2+y^2-6y-16=0$ 2. $x^2+y^2+2x+6y=0$

3. $x^2+y^2-2ax-2by+2ab=0$

4. $x^2+y^2+4x-6y=0$ ؛ x- محور پر 4، y- محور پر 6

5. $x^2+y^2-2ax-2by+a^2=0$

6. $x^2+y^2-2px+2qy+q^2=0$ 8. $x^2+y^2-cx\pm cy+\frac{1}{4}c^2=0$

مشق 26

1. $(-2, 2)$ ، 3   2. $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ ؛ $\frac{3}{2}\sqrt{10}$ 3. $(-\frac{4}{3}, 0)$ ؛ $\frac{4}{3}$

4. (i) $x^2+y^2-23x+11y=0$ ، (ii) $x^2+y^2-17x+41=0$ ،

5. $x^2+y^2-6x+8y=0$ 6. $x^2+y^2\pm 2ax+2ay=0$ مربع کے ضلع کی لمبائی $2a$ لے کر

7. $x^2+y^2-3x-4y=0$ 8. $(3,-3)$ ؛ 3 یا $(15, -15)$ ؛ 15

9. $x^2+y^2-8x\pm 10y+16=0$ ؛ 5

10. $x^2+y^2-2x+6y+\frac{4}{9}=0$ 11. $x^2+y^2-\frac{10}{3}x-2y-15=0$

12. $x^2+y^2+4x-2\sqrt{3}y+3=0$ ، $(-2, \sqrt{3})$ ، 2

13. $\sqrt{(2c-AB^2)}$ 14. $n . AB/(n^2\sim 1)$

16. $x^2+y^2+8x-2y-8=0$

مشق 27

1. $x^2+y^2-10x+y+21=0$

3. $x^2+y^2-2ay\cot\theta-a^2=0$ ، θ کو مستقل زاویہ لے کر

5. $x^2+y^2-3x+y+2=0$

6. $x^2+y^2-2x-4y=0$

مشق 28

1. (i) $4\sqrt{\frac{2}{5}}$ ، $\left(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$ ؛ (ii) $10\sqrt{2}$

2. $x=1$ ، $3x-4y=7$

3. $\pm\sqrt{10}$

4. $x^2+y^2-x-3y=0$

5. $hx+ky=h^2+k^2$

6. $x+my=0$

مشق 29

1. (i) $x+y=5$ ، $y-x=1$ ؛ (ii) $2x+3y=0$ ، $2y=3x$

2. $5x+12y=169$ ، $12x-5y=169$ ؛ $(17, 7)$

3. $x+2y\pm5\sqrt{\frac{1}{3}}=0$

4. $x+2y+5=0$ ، $x+2y=15$

5. $x-y\sqrt{3}\pm10=0$

6. (i) $x+my\pm a\sqrt{(1+m^2)}=0$ ؛ (ii) $x\pm y\pm a\sqrt{2}=0$ ؛ (iii) $x=a$ ، $3x-4y+5a=0$

8. $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y=0$

10. $2\pm2\sqrt{(1+m^2)}$

11. $x^2+y^2-2x+4y=0$ ، $2x+y\pm5=0$

12. $12x-5y=252$ ، $12x-5y+8=0$

13. $x^2+y^2=2a^2$

14. $x^2-2\lambda y-\lambda^2=0$ جہاں $\lambda=b\pm a$

مشق 30

1. $4x-3y=9$ ؛ $\frac{24}{5}$ ؛ $\left(\frac{36}{25}, -\frac{27}{25}\right)$

2. $9x+9y=4($ ؛ $\left(\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}\right)$

3. $ax-by+a^2=0$ ؛ $2b\sqrt{\left(\frac{2a^2+b^2}{a^2+b^2}\right)}$ ؛ $\left(-\frac{a^3}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$

4. $\frac{4}{5}\sqrt{235}$

5. $x_1^2+y_1^2=2a^2$

6. $5x^2+5y^2+27x-36y+18\frac{3}{5}=0$ ؛ ایک دائرہ

10. $4x-3y-2\pm\sqrt{7}(x-2)=0$

13. $(7, 0)$ ، $(3, 0)$ ؛ $x+3y=7$ ، $3x-y=21$ ، $x-3y=3$ ، $3x+y=9$

14. $2x-y+1=0$ ، $x\pm 2y=2$ 15. $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$

مشق 31

1. $2x+2y-11=0$ 2. (i) $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$ ؛ (ii) $(\frac{3}{5}, -\frac{3}{10})$ ؛ (iii) $(8, 6)$

7. $(a^2\cos\alpha/p,\ a^2\sin\alpha/p)$ 8. $2x+3y=25$

مشق 32

1. $2x-y=8$ 2. $4x-3y-1=0$

3. $5x-12y=6$ ؛ $13x^2+13y^2+12x+18y-4=0$

4. $\sqrt{42}$ 5. $2\sqrt{2}$ 6. $x+y=2$

7. $\lambda=24$ ؛ $3x+4y+10=0$ ؛ $(-\frac{8}{5}, -\frac{6}{5})$ یا $\lambda=-16$ ؛ $3x+4y=10$ ؛ $(\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$

8. $(\frac{90}{13}, \frac{25}{13})$ ، $(-\frac{90}{13}, \frac{25}{13})$ 9. $x^2+y^2-3y-14=0$

11. $(6, -\frac{10}{3})$

13. $x^2+y^2-x-2y=0$ 14. $\tan^{-1}\frac{40}{9}$

مشق 33

1. $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ 2. $(2, 1)$

3. $(-\frac{19}{21}, -\frac{31}{33})$ 4. $(-5, -\frac{9}{5})$ ؛ $\frac{1}{3}\sqrt{1093}$

مشق 34

1. $x^2+y^2-2ax=0$ 2. $x^2+y^2-3ax+by=0$

3. $x^2+y^2+x+3y+\frac{1}{2}=0$

5. $2ab/\sqrt{(a^2+b^2)}$ ؛ $\{ab^2/(a^2+b^2), a^2b/(a^2+b^2)\}$

6. $x^2+y^2-2ax=0$

8. $x^2+y^2+4x+2y+1+\lambda(6x-4y+7)=0$ ؛ $26x^2+26y^2+98x+56y+19=0$

9. $x\pm 2\sqrt{2}y=15$ ؛ $x\pm y\sqrt{3}=10$

11. $3x=4y$ ، $5x+12y=8$ ؛ $(\frac{19}{13}, \frac{8}{26})$ ، $(\frac{3}{5}, \frac{8}{15})$ ؛ 1

مشق 35

1. $x^2+y^2-10x-10y+25=0$ ؛ 5

2. $x^2+y^2-2x+4y-3=0$

3. $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ ، اندر ؛ یا $x^2+y^2-8x+16y+55=0$ ، باہر

4. (i) $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ، $2\sqrt{\{r^2-(ma+c-b)^2/(1+m^2)\}}$ ؛

(1) $r^2(1+m^2)=(ma+c-b)^2$ ؛ (2) $ma+c=b$

(ii) $a\cos\alpha\cos\theta+b\sin\alpha\sin\theta\pm\sqrt{(a^2+b^2\sin^2\alpha)}$

5. $x^2+y^2+2x+2y=\sqrt{3}$

7. $x^2+y^2-x-y+\frac{1}{4}=0$ ، $x^2+y^2-6x-6y+9=0$

8. $(a^2-c^2)b^2x^2+(b^2-c^2)a^2y^2-2c^2abxy=0$

9. $x^2+y^2\pm bx\sqrt{2}=0$ یا $x^2+y^2\pm by\sqrt{2}=0$

12. $x^2+y^2=32$

14. $5x-2y=10$ ؛ $(6, -\frac{12}{5})$

15. $4x+3y+6=0$ ؛ $(-\frac{12}{5}, \frac{11}{5})$

16. $12x^2-4y^2-24ax+9a^2=0$

17. $x^2+y^2-cx+\frac{1}{3}(c^2-a^2)=0$

18. $x\sqrt{3}+y=6$

19. $x^2+y^2-4+\lambda(2x+y-2)=0$

20. $3x^2+3y^2-8x-13y=0$

22. $x^2+y^2-3ax+2a^2=0$

23. $9x^2+9y^2-20x+15y=0$

26. $x=0$ ، $3x\pm 4y=8$

28. $5x^2+5y^2-8x-14y-32=0$

29. $x^2+y^2-52x-45y-8\frac{1}{2}=0$

مشق 36

1. $(2, 0)$ ، 8

2. $x^2=4ay$

3. (i) $(-2, -3)$ ، $(-\frac{5}{2}, -3)$ ، $2x+5=0$

(ii) (h, k) ، $(h, k-a)$ ، $y=k+a$

.4 $(\frac{4}{3}, 4)$ .5 $y=2x$ ، $y+2x=0$ ؛ .6 $y^2=4a(x+a)$

.7 (i) محور $y=0$ ، راس $(-2, 0)$ ، ماسکہ $(-1, 0)$ ؛

(ii) محور $x=0$ ، راس $(0, a)$ ، ماسکہ $(0, 2a)$ ؛

(iii) محور $x=0$ ، راس $(0, b)$ ، ماسکہ $(0, \frac{5}{4}b)$ ؛

(iv) محور $y=\frac{5}{2}$ ، راس $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ ، ماسکہ $(-\frac{17}{4}, \frac{5}{2})$ ؛

(v) محور $y=-1$ ، راس $(\frac{9}{4}, -1)$ ، ماسکہ $(\frac{5}{4}, -1)$ ؛

. 8 $x^2-4x+12y-32=0$ ؛ وترِ عمود ماسکی $=12$ .9 $(3, \pm 2\sqrt{3})$

.10 $(1, 0)$ ، $(1, -\frac{1}{2})$ ، 2 ، $x=1$

.11 $(-2, \frac{3}{2})$ ، $(-2, 2)$ ؛ $x+2=0$ ، $2y=5$ ، $2y=3$

مشق 37

.1 (i) $x+y+3=0$ ؛ (ii) $x \pm y+a=0$ ؛ (iii) $16x-8y+3=0$

(iv) $x+my+am^2=0$ ؛ (v) $3x-y\sqrt{3}+a=0$ ، $(\frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a\sqrt{3})$

.4 $(am^2, -2am)$ .5 $(a\tan^2 \alpha, -2a\tan \alpha)$ .8 $\sqrt{35}$

.11 $x(x^2+y^2)+ay^2=0$

مشق 38

.1 (i) $x+y=9$ ؛ (ii) $x-y=9$ ؛ .2 $x \pm y-3a=0$

.4 $c+2am+am^3=0$ .5 $(2, -4)$

.8 $y=0$ ، $x \pm y=3$ .13 $(a, 0)$ ، a .15 $y^2+ax+3a^2=0$

مشق 39

.1 $3x \pm y+3a=0$ .3 $3x-y+2=0$ ، $x-3y+27=0$

.5 $4x+3y+1=0$ ، $\frac{4}{3}\sqrt{7}$

.6 $y^2=2a(x+c)$ ، معین خط مستقیم $x=c$

مشق 40

2. $(a/t^2, -2a/t)$

مشق 41

1. $(2, \pm 4)$
2. $(0, 0)$ ، $(4b, 4b)$ ؛ $x=y$
3. $(-2, -\frac{8}{3})$ ، $(-2, -\frac{4}{3})$ ، $\frac{8}{3}$ ، $6y+13=0$
5. $8a\sqrt{3}$
7. $2x+y+1=0$ ؛ $(\frac{1}{2}, -2)$ ، یا $x-2y+9=0$ ؛ $(8, 8)$
9. $\sqrt{3}x = y - \frac{7}{3}a$
12. $4y^2=25x$ ، یا $4y^2+9x=0$
14. (i) $y=mx$ ، (ii) $x=a/m$ ؛ دونوں حالتوں میں m مستقل ہے۔
25. $y^2-4ax=\tan^2 a(x+a)^2$
30. 0
31. $x \pm y+2a=0$
32. $x \pm \sqrt{3}y+3a=0$

مشق 42

2. $64x^2+81y^2=144$
3. $5x^2+9y^2=180$
4. $3x^2+7y^2=115$
5. (i) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ ؛ (ii) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ، $(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}, 0)$
6. $\frac{4}{5}$
7. 3 ، $\sqrt{7}$ ؛ $\sqrt{\frac{1}{3}}$
9. $20x^2+36y^2=405$
10. $\sqrt{\frac{1}{3}}$
11. k ، $\sqrt{(k^2-h^2)}$
12. (i) $5x^2-2xy+5y^2-76x-88y+506=0$

    (ii) $7x^2+2xy+7y^2+10x-10y+7=0$

    (iii) $24x^2-4xy+21y^2-96x+8y-404=0$
13. $y=0$ محور اکبر، لمبائی 10 ؛ $x=3$ محور اصغر، لمبائی 8
14. بغیر
16. $\frac{1}{4}\sqrt{15}$
17. 7 ، 13 ؛ $x\sqrt{3}+12y=72$ ؛ $11x\sqrt{3}-12y=72$
18. $3x^2+2xy+3y^2=8$

مشق 43

1. (i) $x+3y=7$ ؛ (ii) $4x+5y=24$

(iii) $y=x\sqrt{3}\pm\sqrt{(3a^2+b^2)}$ ، (iv) $y=x\pm5$

2. $\frac{8}{5}\sqrt{2}$ ، $(-\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$ 3. $\frac{8}{5}\sqrt{2}$ 6. $\frac{24}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$ 8. $\pm60^\circ$

مشق 44

10. $\frac{1}{2}ab\{\sin(\theta-\phi)+\sin(\phi-\psi)+\sin(\psi-\theta)\}$

11. $\sqrt{\{(a^2-r^2)(r^2-b^2)\}}/r$

مشق 45

1. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ 2. $\tan^{-1}(\frac{1}{3}\sqrt{3})$

3. $2:(\sqrt{5}-1)$ 12. $b^2x^2+a^2y^2-a^2by=0$

29. $(a^2+b^2)\sin 2\alpha/2ab$

مشق 46

1. $7x^2+12xy-2y^2-2x+4y-7=0$

2. (i) اریب محور $\sqrt{2}$ ، زوجی محور $2\sqrt{2}$ ، $e=\sqrt{5}$

(ii) اریب محور $2\sqrt{2}$ ، زوجی محور $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ ، $e=\frac{1}{3}\sqrt{10}$

3. (i) $x=\pm1/3\sqrt{10}$ ، $(\pm\frac{1}{3}\sqrt{10}, 0)$ ، $\sqrt{10}$

(ii) $y=\pm\sqrt{2}$ ، $(-1, \pm2\sqrt{2})$ ، $\sqrt{2}$

مشق 47

2. $y=3x\pm6$ ، $(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$ ، $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$

مشق 49

1. $\frac{1}{6}\pi$ 4. $\theta=\tan^{-1}\{(a'-a)/(b-b')\}$

6. قطر اور ابتدائی محور کو دفعہ 15·6 کی طرح لے کر، طریق یہ ہے :

(i) $r^2\cos(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)=ab$ (ii) $2r=a\sec(\theta+\alpha)+b\sec(\theta+\beta)$

مشق 50

1. $r^4-4ar^2(p\cos\beta+a\sin^2\beta)+4a^2p^2=0$ ، $2a\cos^2\frac{1}{2}\beta$ یا $-2a\sin^2\frac{1}{2}\beta$

3. $\theta^2c^2=1-2ag$ 5. OC کو قطر مان کر کھینچا گیا دائرہ، جہاں C دائرہ کا مرکز ہے۔

اصطلاحات

Abscissa	طول
Accent	ڈیش
Acute angle	زاویہ حادّہ
Adjacent angle	متصل زاویہ
Analytically	تحلیلی طور پر
Angle of intersection	زاویۂ تقاطع
Angular point	زاوئی نقطہ
Applied mathematics	اطلاقی ریاضی
Arbitrary	اختیاری
Area	رقبہ
Arithmetic mean	حسابی اوسط
Article	دفعہ
Asymptote	خط متقارب
Auxilary circle	معاون دائرہ
Average	اوسط
Axis	محور
Axes	محاور
Base	قاعدہ
Bisection	تنصیف
Bisector	ناصف
Cartesian plane	کارتیزی مستوی
Central angle	مرکزی زاویہ
case	حالت

Centre	مرکز
Circle	دائرہ
Centroid	وسطانی مرکز
Circumscribing circle	محیطی دائرہ
Circumscribing triangle	محیطی مثلث
Circumference	محیط
Chord	وتر
Chord of contact	وتر تماس
Circum centre	محیطی مرکز
Co axial	ہم محوری
Coefficient	ضریبہ
Collinear	ہم خط
Coincident	منطبق
Common Chord	مشترک وتر
Common point	مشترک نقطہ
Comparison	موازنہ
Complementary angles	تمامی زاویے
Composite numbers	غیر مفرد اعداد
Concentric	ہم مرکز
Concurrent	ہم نقطہ
Condition of tangency	شرط مماس
Cone	مخروط
Congruent	مماثل
Conic Section	مخروطی تراشں
Conics	مخروطات
Conjugali	زوجی
Constant	مستقل
Converse	برعکس
Corollary	ضمنی نتیجہ

Co-ordinate	محدد
Co-ordinates	محددات
Co-planer	ہم مستوی
Correspondence	مطابقت
Corresponding angles.	نظیری زاویے
Corresponding Sides	مطابق ضلعے
Cubic equation	مکعبی مساوات
Curve	منحنی
Current	رواں
Degree	درجہ
Denominator	نسب نما
Determinant	مُعَیِّن
Diagonal	وتر
Diameter	قطر
Differential Calculus	تفرقی احصا
Differential Coefficient	تفرقی ضریبہ
Direct common tangent	راست مشترک خط مماس
Directrix	مہتمہ
Director circle	ناظم دائرہ
Eccentric angle	بے مرکز زاویہ
Eccentricity	بے مرکزیت
Eliminate	خارج کرنا
Ellipse	ناقص
Equation	مساوات
Equidistant	ہم فاصلہ
Equilateral triangle	مساوی اضلاع مثلث
Equivalent	معادل
Expression	عبارت
Externally	خارجی طور پر

Factor	جزو ضربی
Finite	متناہی
Focus	ماسکہ
Foot of the perpendicular	پائے عمود
Function	تفاعل
Geometric progression	جیومیٹریہ تسلسل
Gradient	ڈھال کی شرح
Harmonic mean	اوسطِ ہم آہنگی
Homogeneous	ہم درجہ
Hyperbola	مکافی زائد
Hypotenuse	وتر
Identical	متماثل
Identically	متماثلانہ
Identity	متماثلہ
Inclined lines	مائل خطوط
Inclined plane	مائل مستوی
Infinity	لامتناہی
Inscribed circle	داخلی دائرہ
Intercept	داخلی قطع
Internally	داخلی طور پر
Imaginary	فرضی
Isoceles triangle	مساوی الساقین مثلث
Latus ractum	وترِ عمود ماسکی
Line	خط
Linear	خطی
Locus	طریق
Major arc	قوس اکبر
Major axis	محور اکبر
Mean	اوسط

Median	وسطی خط
Middle point	وسطی نقطہ
Middle term	وسطی رکن
Minor axis	محور اصغر
Normal	عماد
Numerator	شمار کنندہ
Numerical	عددی
Oblique axes	مائل محاور
Obtuse angle	زاویہ منفرجہ
Ordinate	عرض
Origin	مبدأ
Orthogonal	قائم الزاویہ
Parabola	مکافی
Parallel	متوازی
Parellelogram	متوازی الاضلاع
Perimeter	احاطہ
Perpendicular	عمود
Plane	مستوی
Point of contact	نقطۂ تماس
Point of intersection	نقطۂ تقاطع
Polar	قطبی خط
Pole	قطب
Positive	مثبت
Power	قوت
Prime numbers	مفرد اعداد
Principal axis	صدری محور
Projection	اضلال
Proportional	متناسب

Quadrant	ربع
Quadratic equation	دو درجی مساوات
Quadrilateral	چار ضلعی
Quantity	رقم
Radius	نصف قطر
Radius vector	سمتیہ نصف قطر
Radical	جذر
Radical axis	جذری محور
Radical centre	جذری مرکز
Ratio	نسبت
Rectangle	مستطیل
Rectangular	مستطیل نما
Reflector	عاکسہ
Reflection	انعکاس
Relation	رشتہ
Right angle	زاویہ قائمہ
Right angled triangle	قائمہ زاویہ مثلث
Right circular cone	قائم دائری مخروط
Rhombus	معیّن
Root	ریشہ
Reciprocal	مقلوب
Section	تراش
Segment	قطع
Sign	علامت
Semi circle	نصف دائرہ
Similar	مشابہ
Simultaneous	ہمزاد
Side	ضلع

Slope	ڈھال
Straight line	خط مستقیم
Square	مربع
Square root	جذر المربع
Substitution	بدل
Sub normal	تحتی عماد
Suffixes	لواحق
Supplement	تکملہ
Supplementary angles	تکمیلی زاویے
Symmetrical	متشاکل
Symmetry	تشاکل
Tangent	خط مماس
Term	رکن
To plot	ترسیم کرنا
Transverse	اریب
Transverse Common tangent	اریب مشترک خط مماس
Trapezium	منحرف
Trigonometry	مثلثات
Variable	متغیر
Vectorial angle	سمتی زاویہ
Vertex	راس
Vertical angle	راسی زاویہ

Price Rs. 35-00