تکملی احصاء

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x$$

شانتی نارائن

تکملی احصاء

ترقی اُردو بورڈ کی کتاب

تکملی احصاء

[بی۔اے اور بی۔ایس سی کے طلبا کے لیے]

شانتی نارائن

مترجم

سیّد ممتاز علی

نیشنل بُک ٹرسٹ، انڈیا

نئی دہلی

(1900) 1979

© انگریزی : ایس. چاند اینڈ کمپنی. دہلی
اُردو : ترقیِ اُردو بورڈ، وزارت تعلیم اور سماجی بہبود، حکومتِ ہند

Original Title: INTEGRAL CALCULUS
Urdu Translation: TAKMILI EHSA

قیمت : 22/25

تقسیم کار :

مکتبہ جامعہ لمیٹڈ

جامعہ نگر، نئی دہلی 110025 ، اُردو بازار، دہلی 110006
پرنسس بلڈنگ، بمبئی 400003، یونیورسٹی مارکیٹ، علی گڑھ 202001

ڈائرکٹر نیشنل بک ٹرسٹ، انڈیا A-5 گرین پارک نئی دہلی 16 نے
ترقیِ اُردو بورڈ (مرکزی وزارتِ تعلیم اور سماجی بہبود، حکومت ہند)
کے لیے لبرٹی آرٹ پریس (پروپرائٹرز: مکتبہ جامعہ لمیٹڈ) دریا گنج دہلی میں چھپوا کر شائع کیا۔

پیش لفظ

کسی بھی زبان کی ترقی کے لیے یہ ضروری ہے کہ اس میں مختلف سائنسی، علمی اور ادبی کتابیں لکھی جائیں اور دوسری زبانوں کی اہم کتابوں کے ترجمے شائع کیے جائیں۔ یہ نہ صرف زبان کی ترقی کے لیے بلکہ قوموں کی معاشی اور سماجی ترقی کے لیے بھی ضروری ہے۔ اُردو میں اسکولوں اور کالجوں کی نصابی کتابیں، بچوں کے ادب، لغات اور سائنسی کتابوں کی ہمیشہ کمی محسوس کی جاتی رہی ہے۔ حکومت ہند نے کتابوں کی اس کمی کو دور کرنے اور اُردو کو فروغ دینے کے لیے ترقی اُردو بورڈ قائم کر کے اعلا پیمانے پر معیاری کتابوں کی اشاعت کا ایک جامع پروگرام مرتب کیا ہے، جس کے تحت مختلف سائنسی و سماجی علوم کی کتابوں کے ترجمے اور اشاعت کے ساتھ لغات، انسائیکلوپیڈیا، اصطلاحات سازی، اور بنیادی متن کی تحقیق و تیاری کا کام ہو رہا ہے۔

ترقی اُردو بورڈ اب تک بہت سی نصابی کتابیں، بچوں کے ادب، علمی، ادبی اور سائنسی کتابیں شائع کر چکا ہے جنھیں اُردو دُنیا میں بیحد مقبولیت حاصل ہوئی ہے، یہاں تک کہ بعض کتابوں کے دوسرے اور تیسرے ایڈیشن بھی شائع ہو رہے ہیں۔ زیرِ نظر کتاب بھی اسی اشاعتی پروگرام کا ایک حصہ ہے۔ مجھے امید ہے کہ اسے بھی علمی اور ادبی حلقوں میں پسند کیا جائے گا۔

(ڈاکٹر ایس۔ ایم۔ عبّاس شارب)

پرنسپل پبلیکیشن افیسر

بیورو فار پروموشن آف اُردو۔ وزارتِ تعلیم اور سماجی بہبود، حکومت ہند

آٹھویں اشاعت کا دیباچہ

یہ کتاب کئی بار شائع ہو چکی ہے اور ہر بار اس پر نظر ثانی کی گئی ہے۔ یہ امید کی جاتی ہے کہ سابقہ اڈیشن میں جو طباعت وغیرہ کی غلطیاں تھیں وہ اب دور ہو جائیں گی۔ مثالوں اور مشقوں میں بھی کچھ تبدیلیاں کرنے کے علاوہ علامتیں ⇐ ، ⇒ اور ⇔ بھی استعمال کی گئی ہیں جن کے ترتیب وار معنی ہیں: "تب" "جبکہ" اور "تبھی جبکہ"۔ امید کی جاتی ہے کہ ان کے استعمال سے سمجھنے میں آسانی ہوگی۔

میں مرنڈا ہاؤس دہلی کے شعبہ ریاضی کی کماری نیلما کا شکر گزار ہوں جنھوں نے اس اڈیشن کی تیاری میں مجھے بھرپور تعاون دیا۔

شانتی نارائن

دہلی 20.7.1968

پہلی اشاعت کا دیباچہ

اس کتاب لکھنے کا مقصد یہ ہے کہ یہ میری کتاب "Differential Calculus" کی معاون کتاب کا کام دے اور اس طرح لکھی گئی ہے کہ ہماری یونی ورسٹیوں کے بی۔اے، بی۔ایس سی کے طالب علموں کی ضرورت کو پورا کرے۔

پہلے باب میں "تفرقی سر کے برعکس" مفہوم پر مبنی غیر معین تکملوں کی تعریف بتائی گئی ہے اور پھر معین تکملوں کا جیومٹریائی مفہوم بتایا گیا ہے۔ اس باب میں غیر واجب تکملوں کا بھی آسان اور مختصر تذکرہ ہے۔ دوسرے باب میں تکمل کے دونوں طریقے۔ یعنی متغیری تبدیلی سے تکمل اور حصے سے تکمل کے طریقے بیان کیے گئے ہیں۔ تیسرے، چوتھے اور پانچویں ابواب میں باقاعدہ ترتیب وار جبری ناطق تفاعلوں، شلثی تفاعلوں اور جبری غیر ناطق تفاعلوں کا تکمل

بتایا گیا ہے۔ اس کتاب کے ابواب میں تقسیم تکمل کے طریقوں کے حساب سے نہ کر کے، اُن تفاعلوں کی قسموں کے مطابق کی گئی ہے جن کا تکمل کرنا ہوتا ہے۔ اس سے طالب علموں کو تکمل کی ترکیب پر مہارت حاصل کرنے میں بڑی مدد ملے گی۔ اس کے بعد رقبہ، قوسی اصلاح اور گردشی سطح اور حجم نکالنے میں تکملی احصا کے استعمال کا ذکر ہے۔ اس کے بعد کسی معین تکملہ کا مفہوم بطور مجموعہ کی انتہا بتایا گیا ہے۔ یہ تذکرہ صرف جیومٹریائی نظریے پر منحصر ہے، تحویلی خیالات پر نہیں۔ میں نے جان بوجھ کر تحویلی ثبوت نہیں دیے کیونکہ مشکل ہونے کے باعث وہ طالب علم کی سمجھ میں آسانی سے نہیں آتے اور جو ثبوت عموماً دیے جاتے ہیں وہ نامناسب اور بہکانے والے ہوتے ہیں۔ تحویلی فارمولوں کا کوئی الگ باب نہیں ہے اور ایسی سبھی صورتوں پر اُن کی مناسب جگہوں پر ہی غور کیا گیا ہے۔ آخری دو ابواب میں تفرقی مساوات پر مختصر ابتدائی نصاب دے دیا گیا ہے۔

اس کتاب میں مختلف قسم کے سوالات سمجھانے کے لیے بہت سی مثالیں دی گئی ہیں۔

میں گورنمنٹ کالج لاہور کے پروفیسر سیتا رام گپتا ایم۔اے، پی۔ای۔ایس کا بہت ممنون ہوں جنھوں نے کتاب کے اس نسخے کے ایک حصہ کو دیکھنے کی مہربانی کی اور کئی بیش قیمت مشورے دیے۔ میں اپنے دوست اور ساتھی پروفیسر اوم پرکاش گپتا، ایم۔اے، ڈی۔اے۔وی کالج لاہور اور پروفیسر رام جی داس سیال، ایم۔اے، دیانند ٹکنیکل انسٹی ٹیوٹ، لاہور کا بھی تہ دل سے شکرگزار ہوں جنھوں نے مجھے اس کتاب کی تیاری میں مدد دی۔

میں ان لوگوں کا شکرگزار ہوں گا جو اس کتاب کو بہتر بنانے میں مشورے دیں گے یا ایسی غلطیوں کی طرف توجہ دلائیں گے جو مجھ سے سرزد ہوئی ہیں۔

شانتی نارائن

لاہور

دسمبر، 1942

فہرست مضامین

باب 1

معیاری نتائج کی جدول

1·1 تفاعل کے تکملہ کی تعریف 17
1·3 تکمل کا عدم تعین 19
1·4 معیاری ابتدائی تکملوں کی جدول 20
1·5 دو آسان مسئلے 23
1·6 معیّن تکملہ 27
1·7 معیّن تکملوں کی دو اہم خصوصیات 29
1·8 معیّن تکملہ کا جیومٹریائی مفہوم 30
1·9 غیر واجب معیّن تکملے 35

باب 2

تکمل کے طریقے

(عوضی اور حصہ وار تکمل)

2·1 تکمل کے طریقے 44
2·2 عوضی سے تکمل 45
2·3 تین اہم قسم کے تکملے 49

2·4 ذیلی تفاعلوں کا تکمل
$1/\sqrt{(a^2-x^2)}$, $1/\sqrt{(a^2+x^2)}$, $1/\sqrt{(x^2-a^2)}$,
$\sqrt{(a^2-x^2)}$, $\sqrt{(a^2+x^2)}$, $\sqrt{(x^2-a^2)}$ 58

2·5 حصے سے تکمل 65

2·52 $e^{ax}\cos(bx+c)$ اور $e^{ax}\sin(bx+c)$ کا تکمل 71

2·7 معین تکملے 76

2·8 تحویلی فارمولے 82

باب 3

جبری ناطق تفاعلوں کا تکمل

3·1 عمومی تبصرہ 92

3·2 وہ صورت جبکہ ایک ہی بار آئے والے خطی فیکٹر ہوں 97

3·3 وہ صورت جبکہ ایک بار یا کئی بار آئے والے خطی فیکٹر ہوں 98

3·4 وہ صورت جبکہ خطی یا دوسری ڈگری کے ایک ہی بار آئے والے فیکٹر ہوں ... 100

3·5 $(Lx+M)/(Ax^2+2Bx+C)^n$ کا تکمل اور $\int dx/(a^2+x^2)^n$ کے لیے
تحویلی فارمولا 104

3·6 عوضی سے جبری تفاعلوں کا تکمل 110

3·7 e^x کے جبری تفاعلوں کا تکمل 114

باب 4

مثلثاتی تفاعلوں کا تکمل

4·1 $\sin^n x$ کا تکمل اور $\int \sin^n x\,dx$ کے لیے تحویلی فارمولا۔
$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$ حاصل کرنا 119

4·2 $\cos^n x$ کا تکمل اور $\int \cos^n x\, dx$ کے لیے تحویلی فارمولا
$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$ حاصل کرنا 124
4·3 $\sin^p x \cos^q x$ کا تکمل اور $\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x\, dx$ حاصل کرنا 128
4·4 $\int \tan^n x\, dx$ اور $\int \cot^n x\, dx$ کے لیے تحویلی فارمولے 136
4·5 $\sec^n x$ اور $\operatorname{cosec}^n x$ کا تکمل اور
$\int \sec^n x\, dx$ اور $\int \operatorname{cosec}^n x\, dx$ کے لیے تحویلی فارمولے 138
4·6 $\sin^p x \cos^q x$ کا تکمل جب کہ $p+q$ منفی جفت کامل عدد ہو نیز
$\int \sin^p x \cos^q x\, dx$ کے لیے مختلف تحویلی فارمولے 140
4·7 $\cos x$ اور $\sin x$ کے ناطق تفاعلوں کا تکمل 146
4·81 $(a \cos x + b \sin x)/(c \cos x + d \sin x)$
اور $(a \cos x + b \sin x + c)/(d \cos x + e \sin x + f)$ کا
تکمل کرنا 154
4·9 معین تکملوں کی دو خصوصیات 156
4·10 $\int \cos^m x \cos nx\, dx$ کے لیے تحویلی فارمولا 164
4·11 $\int_0^a e^{-ax} \sin^n x\, dx$ حاصل کرنا 165

باب 5

غیر ناطق تفاعلوں کا تکمل

5·1 x اور ایک خطی سرڈ $(ax+b)^{1/n}$ کے ناطق تفاعل کا تکمل جب کہ n مثبت
کامل عدد ہو۔ .. ..
5·2 تکملے $\int \sqrt{(ax^2+bx+c)}dx$, $\int dx/\sqrt{(ax^2+bx+c)}$ حاصل کرنا۔ .. 183
5·3 تفاعلوں $\int (Ax+B)dx/\sqrt{(ax^2+bx+c)}$
اور $\int (Ax+B)/\sqrt{(ax^2+bx+c)}dx$ کا تکمل کرنا 185

5·4 $\int x^n\,dx/\sqrt{(ax^2+bx+c)}$ کے لیے تحویلی فارمولا 187

5·5 تکملہ $\int dx/(Ax+B)\sqrt{(ax^2+bx+c)}$ حاصل کرنا 192

تکملہ $\int dx/(ax^2+bx+c)\sqrt{(Ax^2+Bx+C)}$ حاصل کرنا.. 194

5·7 مثلثاتی استحالوں کے ذریعے جبری غیر ناطق تفاعلوں کا تکمل 196

5·8 $x^m\,(a+bx^n)^p$ کا تکمل 199

5·9 تکملہ $\int x^m\,(a+bx^n)^p\,dx$ کے لیے تحویلی فارمولا 205

5·10 عام خیالات 213

متفرق مشقیں 1 217

متفرق مشقیں 2 226

باب 6

معیّن تکملہ بطور مجموعہ کی انتہا

6·1 تمہید 232

6·2 بنیادی مسئلے کا ثبوت.. 233

6·3 سلسلوں کا مجموعہ نکالنا 238

استعمال

باب 7

ہموار قطعوں کے رقبے

7·1 وہ رقبہ جو ایک منحنی X-محور اور دو عرضوں کے درمیان گھرا ہوا ہو 246

7·2 زائد کی ترسیع 254

7·3 قطع کا رقبہ 258

7·4 کسی بند منحنی سے گھرا ہوا رقبہ 268
7·5 معین تکملوں اور رقبوں کا تخمینہ لگانے کے لیے سمپسن کا اصول 277

قوسی اصلاح

باب 8

ہموار منحنیوں کی لمبائیاں

8·1 تمہید .. .. } 288
8·2 منحنی $y = f(x)$ کی لمبائی کا فارمولا .. .. }
8·3 منحنیوں $x = f(y)$; $x = f(t), y = \varphi(t)$; $r = f(\theta)$ کے قوسوں
کی لمبائی کے فارمولے 289
8·4 کارتیسی اور قطبی مساوات سے نجی مساوات حاصل کرنا 296
8·5 علپس کی قوسی اصلاح 302

باب 9

گردشی شکلوں کے حجم اور سطح

9·1. تمہید .. .. } 307
9·2 دو میں سے، کسی محور کے گرد گھمانے پر بنے حجم کا فارمولا .. .. }
9·3 کسی بھی خط کے گرد گھمانے پر بنے حجم کا فارمولا 316
9·4 مخروط کے فرسٹم کی سطح کا رقبہ 322
9·5 گردشی سطح کے رقبہ کا فارمولا 323
9·6 پاپس کے مسئلے 327
9·7 گردشی سطح 329

3 متفرق مشقیں 334

باب 10

مرکز ثقل و جمود کا معیار اثر

10.1 تمہید 341
10.2 مرکز ثقل 342
10.3 مرکز ثقل اور جمود کا معیار اثر 343
10.4 جمود کا معیار اثر 353

تفرقی مساواتیں

باب 11

پہلے رتبے اور پہلی ڈگری کی تفرقی مساواتیں

11.1 ابتدائی تعریفیں 360
11.2 اختیاری مستقل 364
11.3 وہ مساوات جن میں متغیر الگ الگ ہو سکتے ہوں 366
11.4 خطی مساوات 370
11.5 وہ مساوات جو خطی شکل میں بدل سکیں 375
11.6 ہم جنس مساوات 377
11.7 وہ مساوات جو ہم جنس صورت میں بدل سکیں 380
11.8 راست تفرقی مساواتیں 383
11.9 تکملی جزو 387

باب 12

وہ مساوات جو پہلے رتبے کی ہیں لیکن پہلی ڈگری کی نہیں ہیں

12.1 تمہید 391
12.2 p کے لیے حل ہوسکنے والی مساوات 391
12.3 y کے لیے حل ہوسکنے والی مساوات 394
12.4 x کے لیے حل ہوسکنے والی مساوات 395
12.5 کلیرو کی مساوات 397
12.6 پہلے رتبے کی تفرقی مساوات کا جیومٹریائی مفہوم 400
12.7 واحد حل 401

باب 13

قبیلۂ منحنی کے مستدیر

13.1 تعریفیں 409
13.2 کارٹیزی مختصات 409
13.3 قطبی مختصات 411

باب 14

خطی مساواتیں

14.1 خطی مساوات کی تعریف 418
14.2 تمامی تفاعل اور تکملۂ خاص 418
14.3 عامل۔ عاملوں کے حاصل ضرب کے لیے مبادی اصول 421
14.5 تمامی تفاعل حاصل کرنا 424

14·6 معکوس عامل 431
14·7 تکملۂ خاص حاصل کرنا 434
14·81 تکملۂ خاص نکالنے کے عملی اصول 439
14·10 ہم جنس خطی مساواتیں 460
متفرق مشقیں 4 466

ضمیمہ 1

A·1 غیر واجب تکملوں کا تقارب .. .. } 471
A·21 وہ صورت جبکہ قطعۂ تکمل لا متناہی ہو .. .. }
A·22 وہ صورت جبکہ تکاملیہ لا متناہی ہو 474
A·3 تین اہم موازنی تکملے 475
A·4 بیٹا تفاعل 480
A·5 گاما تفاعل 485
A·6 بیٹا اور گاما تفاعلوں میں رشتہ 487

ضمیمہ 2

A·7 تکملی علامت کے تحت تفرق، جبکہ حدیں مستقل ہوں 493
A·8 وہ صورت جبکہ تکملی حدیں متغیر ہوں 496
A·9 تکملی علامت کے تحت تفرق 498

لغت 1

L·1 انگریزی سے اُردو .. .. (xi) — (ix) 512
L 2 اُردو سے انگریزی .. .. (xv) (ix) 525

1

تعریفیں (Definitions)

معیاری نتایج کی جدول

1·1. تفاعل (function.) کا تکملہ (Integral) : مُکاملیہ (Integrand.) :

اگر کسی تفاعل $f(x)$ کا تفرقی سر (differential coefficient) $F(x)$ ہو، یعنی اگر

$$\frac{df(x)}{dx} = F(x)$$

تو ہم کہتے ہیں کہ $F(x)$ کا ایک تکملہ (Integral) یا آبائی (Primitive) $f(x)$ ہے اور ہم اسے علامتوں میں اس طرح لکھتے ہیں:

$$\int F(x)dx = f(x)$$

مثال کے طور پر cos کا ایک تکملہ sin x ہے، یعنی

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \Rightarrow \int \cos x \, dx = \sin x.$$

ایک اور مثال لیجیے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $1/x$ کا ایک تکملہ log x ہے، یعنی

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \log x$$

dx میں حرف x یہ ظاہر کرتا ہے کہ تکمل بلحاظ متغیر x ہو رہا ہے۔

کسی تفاعل کا تکملہ معلوم کرنے کے عمل کو تکمل کہتے ہیں اور جس تفاعل کا تکمل ہو رہا ہو اُسے تکاملیہ کہتے ہیں۔

چونکہ تکمل اور تفرق ایک دوسرے کے معکوس عمل ہیں اس لیے

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x).$$

مشق: ثابت کیجیے کہ

(i) $\int x\,dx = x^2/2.$ (ii) $\int \sin x\,dx = -\cos x + 2.$
(iii) $\int at^3\,dt = at^4/4.$ (iv) $\int 1/y\,dy = \log y - 3.$

1.2 تکملی احصار (Integral Calculus) کے علم کا مقصد کسی دیے ہوئے تفاعل کا تکملہ نکالنے کے طریقوں کے دریافت کرنے سے متعلق ہے۔ اس علم کا استعمال جیومیٹری اور قدرتی و سماجی سائنس میں کثرت سے کیا جاتا ہے۔ ہم اس کتاب میں پڑھیں گے کہ اس علم کی مدد سے مستوی سطح کا ارقبہ (Plane areas) قوس کی لمبائی (Lengths of arcs) گردشی ٹھوس شکلوں (solids of revolution) کے حجم اور سطح (Volumes and Surfaces) مرکزِ ثقل (Centre of gravity) اور معیارِ جمود کے معیارِ اثر (Moment of Inertia) کس طرح معلوم کیے جا سکتے ہیں۔

تاریخی اعتبار سے اس علم کا آغاز ہموار قطعوں (plane regions) کا رقبہ نکالنے کے سلسلے میں ہوا اور یہ علم ایسے ارکان (terms) کے مجموعوں کی انتہائی قیمت - (Limiting value) سے متعلق تھا جن میں ارکان کی تعداد انتہائی بڑھتی جائے اور ہر رکن چھوٹا ہو کر صفر کی طرف مائل ہو رہا ہو۔ دراصل جوڑنے کے اس عمل کی بنا پر ہی اس مضمون کا نام تکملی احصار پڑا۔ یہاں تکمل کرنے کے لفظی معنی "جوڑ معلوم کرنا" ہے۔ بعد میں یہ دیکھا گیا کہ تکمل کے مضمون کو تفرق کا معکوس بھی سمجھا جا سکتا ہے۔ اس علم کی تاریخی ترتیب میں پڑے بغیر، جیسا اوپر کہا جا چکا ہے تکمل کو ہم تفرق کا معکوس مضمون ہی سمجھیں گے۔ باب 9 میں ہم تکمل کو ارکان کے مجموعے کی حیثیت سے بھی پڑھیں گے۔

1·3 تکمل کی قیمت کا عدم تعین (Indefinite valuedness of Integration.):

عام تکملہ (General Integral): اختیاری مستقل (Arbitrary Constant):

اگر $F(x)$ کا ایک تکملہ $f(x)$ ہو تو $f(x)+c$ بھی $F(x)$ کا ایک تکملہ ہوگا جہاں c کوئی بھی مستقل (constant) ہے: کیونکہ اگر

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = F(x)$$

تو ساتھ ہی

$$\frac{d\,[f(x)+c]}{dx} = F(x)$$

پھر مان لیجیے کہ $F(x)$ کے کوئی دو تکملے $f(x)$ اور $\varphi(x)$ ہیں، تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$f'(x) = \varphi'(x) = F(x)$$

چونکہ تفاعلوں $f(x)$ اور $\varphi(x)$ کے تفرقی سر (differential coefficients) برابر ہیں اس لیے اُن میں فرق صرف ایک مستقل کا ہی ہوگا، یعنی

$$f(x) - \varphi(x) = c$$

$$\Rightarrow f(x) = \varphi(x)+c,$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔

اِن باتوں سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی تفاعل کا تکملہ لاثانی (unique) نہیں ہوتا اور یہ کہ اگر $F(x)$ کا ایک تکملہ $f(x)$ ہو تو

(i) $f(x)+c$ بھی $F(x)$ کا تکملہ ہوتا ہے جہاں c کوئی بھی مستقل ہے؛

(ii) $f(x)+c$ میں c کو مناسب قیمت (value) دے کر $F(x)$ کا ہر ایک تکملہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اس لیے اگر $F(x)$ کا کوئی ایک تکملہ $f(x)$ ہو تو $f(x)+c$ اس کا عام تکملہ (General integral) ہوتا ہے۔

---

* مصنف کی کتاب Differential Calculus دیکھیے۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی بھی تفاعل کے دو تکملوں میں فرق صرف ایک مستقل کا ہی ہو سکتا ہے۔

مستقل c کو تکملی مستقل (constant of integrals) کہتے ہیں۔ عموماً تکملی مستقل لکھا نہیں جاتا اور $F(x)$ کے کسی بھی تکملہ کو $\int F(x)\,dx$ سے ہی ظاہر کرتے ہیں لیکن یہ یاد رہے کہ علامت $\int F(x)\,dx$ کی دراصل لامتناہی قیمتیں ہو سکتی ہیں۔

ہو سکتا ہے کہ تکمل کے مختلف طریقوں سے ہمیں ایک ہی تفاعل کے مختلف تکملے حاصل ہوں لیکن ہمیشہ اُن میں فرق صرف ایک مستقل کا ہی ہوگا۔

مشق: ثابت کیجیے کہ

(i) $4x^3$ کا عام تکملہ x^4+c ہے۔

(ii) $1/\sqrt{(1-x^2)}$ کا عام تکملہ $\sin^{-1} x+c$ ہے۔

(iii) $\sec x \tan x$ کا عام تکملہ $\sec x+c$ ہے۔

جہاں c ایک اختیاری مستقل ہے۔

۱۸ ابتدائی تکملوں کی جدول

اب ہم ابتدائی تکملوں کی فہرست دے رہے ہیں جو کہ ابتدائی تفاعلوں کے تفرقی سروں (differential coefficients) کی مدد سے تیار کی گئی ہے۔

$$^{*}\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1},\ (n \neq -1) \qquad \because \frac{1}{n+1}\frac{d(x^{n+1})}{dx} = x^n.$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x, \qquad \because \frac{d(\log x)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

$$\int e^x\,dx = e^x, \qquad \because \frac{d(e^x)}{dx} = e^x.$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}, \qquad \because \frac{d(a^x/\log a)}{dx} = a^x.$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x, \qquad \because \frac{d(-\cos x)}{dx} = \sin x.$$

* جب $n = -1$ تو $x^n = x^{-1} = 1/x$ اور اس کا تکملہ $\log x$ ہے۔

$$\int \cos x\,dx = \sin x, \qquad \because \quad \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x, \qquad \because \quad \frac{d(\tan x)}{dx} = \sec^2 x.$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x \qquad \because \quad \frac{d(-\cot x)}{dx} = \operatorname{cosec}^2 x.$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x, \qquad \because \quad \frac{d(\sec x)}{dx} = \sec x \tan x.$$

$$\int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x, \quad \because \quad \frac{d(-\operatorname{cosec} x)}{dx} = \cot x \operatorname{cosec} x.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\,dx = \sin^{-1} x \text{ or } -\cos^{-1} x,$$

$$\because \quad \frac{d(\sin^{-1} x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{d(-\cos^{-1} x)}{dx}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x \text{ or } -\cot^{-1} x, \quad \because \quad \frac{d(\tan^{-1} x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = \frac{d(-\cot^{-1} x)}{dx}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}}\,dx = \sec^{-1} x \text{ or } -\operatorname{cosec}^{-1} x, \quad \because \quad \frac{d(\sec^{-1} x)}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}} = \frac{d(-\operatorname{cosec}^{-1} x)}{dx}$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x, \quad \because \quad \frac{d(\sinh x)}{dx} = \cosh x$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x, \quad \because \quad \frac{d(\cosh x)}{dx} = \sinh x.$$

یہ غور کرنے کی بات ہے کہ جب $n \neq -1$ تو x^n کا تکملہ پانے کے لیے x کی قوت نما (index) میں ایک بڑھا کر x^{n+1} حاصل کر کے اسے $n+1$ سے تقسیم کر کے x^n کا تکملہ ملتا ہے۔

مثال کے طور پر

$$\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}x^{3/2},$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{x}$$

نوٹ 1: ضمنی نتیجہ

$$\int \frac{dx}{x} = \log x$$

پر روشنی ڈالنے کی ضرورت ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ $\log x$ اُسی وقت معنی رکھتا ہے جب x مثبت (positive) ہو۔ اس لیے جب ہم $d(\log x)/dx = 1/x$ یا $\int (1/x)dx = \log x$ لکھتے ہیں تو یہ ذہن میں رکھتے ہوئے کہ x مثبت ہے۔

اگر x منفی (negative) ہو تو $(-x)$ مثبت ہوگا اور اس لیے $\log(-x)$ معنی رکھے گا۔ اس لیے اس صورت میں

$$\frac{d[\log(-x)]}{dx} = \frac{1}{-x} \times -1 = \frac{1}{x}$$

اس لیے x منفی ہو تو

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log(-x)$$

اس طرح $1/x$ کا تکملہ $\log x$ ہوگا اگر x مثبت ہو اور تکملہ $\log(-x)$ ہوگا اگر x منفی ہو۔ ان دونوں نتیجوں کو یکجا کرکے لکھ سکتے ہیں:-

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$$

جہاں $|x|$ کا مطلب x کی مطلق قیمت (absolute value) ہے۔

نوٹ 2: اوپر دی ہوئی فہرست میں معکوس مثلثاتی تفاعل (inverse trigonometrical functions) واحد قیمتی (single-valued) تفاعل ہیں جن کی تعریف (Definition) مصنف کی کتاب *Differential Calculus* کے باب 2 میں دی ہوئی ہے۔ اس طرح

$$\sin^{-1}x,\ \tan^{-1}x,\ \cot^{-1}x,\ \operatorname{cosec}^{-1}x$$

بالترتیب $-\pi/2$ اور $\pi/2$ کے درمیان والے وہ زاویے ہیں جن کے
sine, tangent, Colangent, Cosecant
x کے برابر ہوں۔ اسی طرح

$$\cos^{-1}x,\ \sec^{-1}x$$

صفر اور x کے درمیان والے وہ زاویے ہیں جن کے
cosine , secant
x کے برابر ہوں۔

نوٹ 3 : اوپر دی ہوئی فہرست سے پتہ چلتا ہے کہ $1/\sqrt{(1-x^2)}$ کے دو تکملے ہیں $\sin^{-1}x$ اور $(-\cos^{-1}x)$ اس کا یہ مطلب نہیں کہ $\sin^{-1}x$ اور $-\cos^{-1}x$ برابر ہیں۔ بلکہ اس کا صحیح مطلب یہ ہے کہ ان کے درمیان فرق ایک مستقل کے برابر ہے۔ دراصل ابتدائی علم مثلث (trigonometry) سے ہم جانتے ہیں کہ

$$\sin^{-1}x-(-\cos^{-1}x) = \sin^{-1}x+\cos^{-1}x = \tfrac{1}{2}\pi$$

مشق : ذیل کے تکملے حاصل کیجیے :

(i) x^3, (ii) $\sqrt{x}$, (iii) $\sqrt[3]{x^2}$, (iv) $\sqrt{x^{-3}}$,
(v) 2^x, (vi) $(\frac{1}{2})^x$, (vii) a^{2x}, (viii) e^{3x}.

جوابات :

(i) $\frac{1}{4}x^4$, (ii) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, (iii) $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}$ (iv) $-2x^{-\frac{1}{2}}$

(v) $\dfrac{2^x}{\log 2}$, (vi) $\dfrac{-(\frac{1}{2})^x}{\log 2}$, (vii) $\dfrac{a^{2x}}{2\log a}$, (viii) $\dfrac{e^{3x}}{3}$

1.5- دو آسان مسئلے (theorems)

1.51- پہلا مسئلہ :

$$\int a\, f(x)dx = a\int f(x)\, dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(A)}$$

یعنی ایک مستقل اور ایک تفاعل کے حاصل ضرب (product) کا تکملہ اس تفاعل کے تکملے اور مستقل کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔

اس کا ثبوت اس کے مطابق (corresponding) تفرقی احصاء (Differential Calculus) کے اس مسئلے سے ملتا ہے جس کی رو سے ایک مستقل اور ایک تفاعل کے

حاصل ضرب کا تفرقی سَر (Differential Coefficient) تفاعل کے تفرقی سَر اور مستقل کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔
(A) کی داہنی جانب کا تفرق کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\frac{d}{dx}\left[a \int f(x)\, dx \right] = a \frac{d}{dx}\int f(x)\, dx = af(x).$$

$$\Rightarrow \qquad \int af(x)\, dx = a \int f(x)\, dx.$$

1·52 دوسرا مسئلہ:

$$\text{(B)} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \int[f(x) \pm F(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int F(x)\, dx$$

یعنی دو تفاعلوں کے جوڑ (فرق) کا تکملہ اُن کے تکملوں کے جوڑ (فرق) کے برابر ہوتا ہے۔

اِس کا ثبوت اِس کے مطابق تفرقی حساب کے اُس مسئلے سے ملتا ہے جس کی روسے دو تفاعلوں کے جوڑ (فرق) کا تفرقی سَر اُن تفاعلوں کے تفرقی سَروں (Differential Coefficients) کے جوڑ (فرق) کے برابر ہوتا ہے۔
(B) کی داہنی جانب کا تفرق کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\, dx \pm \int F(x)\, dx \right] = \frac{d}{dx}\int f(x)\, dx \pm \frac{d}{dx}\int F(x)\, dx$$

$$= f(x) \pm F(x)$$

$$\Rightarrow \qquad \int [f(x) \pm F(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int F(x)\, dx.$$

بہ آسانی اس مسئلے کی توسیع (Extension) تفاعلوں کی کسی محدود (finite) تعداد کے لیے ہوسکتی ہے۔ اِس طرح ہم پاتے ہیں

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm \cdots\cdots \pm f_n(x)]dx$$

$$= \int f_1(x)\, dx \pm \int f_2(x)dx \pm \cdots\cdots \pm \int f_n(x)\, dx$$

نوٹ : جب کسی تکاملیہ (integrand) کو ایسے کئی تکاملیوں کے جوڑ کی شکل میں رکھا جا سکے جن کے تکملے معلوم ہوں تب یہ دونوں مسئلے نہایت فائدہ مند ثابت ہوتے ہیں۔ در اصل آگے دیکھیں گے کہ کسی تکاملیہ کو ایسے تکاملیوں جن کے تکملے معلوم ہوں کے جوڑ کی شکل میں رکھنے کا یہ طریقہ تکمل کا نہایت اہم اور کارآمد طریقہ ہے۔

مثالیں

1. $\int 3x^3\,dx = 3\int x^3\,dx = \frac{3x^4}{4}$

2. $\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)\,dx$

$$= \int a_0 dx + \int a_1 x\,dx + \int a_2 x^2\,dx + \ldots\ldots\ldots + \int a_n x^n\,dx$$

$$= a_0 \int 1 dx + a_1 \int x\,dx + a_2 \int x^2\,dx + \ldots\ldots + a_n \int x^n\,dx$$

$$= a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

3. $\int \left(\cos x + \frac{2}{x} - e^x \right) dx = \int \cos x\,dx + 2 \int \frac{1}{x}\,dx - \int e^x\,dx$

$$= \sin x + 2 \log x - e^x$$

4. $\int \frac{3 - 5x^2 + 7x^4 - 9x^6}{x^6}\,dx = \int \left(\frac{3}{x^6} - \frac{5}{x^4} + \frac{7}{x^2} - 9 \right) dx$

$$= \int \frac{3}{x^6}\,dx - \int \frac{5}{x^4}\,dx + \int \frac{7}{x^2}\,dx - \int 9\,dx$$

$$= -\frac{3}{5x^5} + \frac{5}{3x^3} - \frac{7}{x} - 9x$$

$$= \frac{-9 + 25x^2 - 105x^4 - 135x^6}{15x^5}$$

5. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{(x^2+1) - 1}{x^2+1}\,dx$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \int 1\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = x - \tan^{-1} x.$$

6. $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^4 - 1 + 1}{x^2+1}\,dx = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} \right) dx$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \tan^{-1} x.$$

7. $\int \frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{\sin^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx + \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$

$= \int \tan x \sec x\, dx + \int \cot x \operatorname{cosec} x\, dx$

$= \sec x - \operatorname{cosec} x.$

8. $\int \sqrt{(1-\sin 2x)}\, dx = \int \sqrt{(\sin^2 x+\cos^2 x-2 \sin x \cos x)}\, dx$

$= \int \sqrt{(\sin x-\cos x)^2}\, dx$

$= \int (\sin x-\cos x)\, dx$

$= -\cos x-\sin x = -(\cos x+\sin x)$

9. $\int \sqrt{(1-\cos 2x)}\, dx = \int \sqrt{(2 \sin^2 x)}\, dx$

$= \int \sqrt{2} \sin x\, dx$

$= \sqrt{2} \int \sin x\, dx = -\sqrt{2} \cos x.$

مشقیں

ذیل کے تکملے حاصل کیجیے :-

1. $x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{5}}.$
2. $(x^2+2x+3)/x^4.$
3. $\frac{(1+2x)^3}{x^4}.$
4. $\frac{2x^4+3}{x^2+1}.$
5. $\frac{x^2-1}{x^2+1}.$
6. $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})^2}{x}.$
7. $\frac{x^4+x^2+1}{2(x^2+1)}.$
8. $\frac{x^6-1}{x^2+1}.$
9. $5 \cos x-3 \sin x-\frac{2}{\cos^2 x}.$
10. $\frac{5 \cos^3 x+7 \sin^3 x}{2 \sin^2 x \cos^2 x}.$
11. $\frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}.$
12. $\sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x.$
13. $\frac{3\cos x-4}{\sin^2 x}.$
14. $\frac{1+2 \sin x}{\cos^2 x}.$
15. $\tan^2 x.$
16. $\cot^2 x.$
17. $(\tan x+\cot x)^2.$
18. $(1-\cos 2x)/(1+\cos 2x).$
19. $\sqrt{(1+\sin 2x)}.$
20. $\sqrt{(1+\cos 2x)}.$

جوابات

1. $\frac{3}{4}x^{4/3}+\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{5}{8}x^{8/5}$
2. $-(x^2+x+1)/x^3$

3. $-(1+9x+36x^2)/3x^3+8\log x.$

4. $\frac{1}{3}(x^3-2x)+5\tan^{-1}x$

5. $x-2\tan^{-1}x.$

6. $x+\frac{3}{4}x^{4/3}+\frac{12}{7}x^{7/6}$

7. $\frac{1}{6}(x^3+3\tan^{-1}x).$

8. $\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+x-2\tan^{-1}x$

9. $5\sin x+3\cos x-2\tan x$

10. $\frac{7}{2}\sec x-\frac{5}{2}\operatorname{cosec} x$

11. $-\sec x\operatorname{cosec} x.$

12. $-2\cot 2x.$

13. $-4\cot x+3\operatorname{cosec} x.$

14. $\tan x+2\sec x.$

15. $\tan x-x.$

16. $-\cot x-x.$

17. $-2\cot 2x.$

18. $\tan x-x$

19. $-\cos x+\sin x$

20. $\sqrt{2}\cos x$

1·6 - معیّن تکملہ :

جیومٹری اور کچھ دیگر مضامین میں تکملی احصاء استعمال کرنے میں اکثر اس بات کی ضرورت ہوتی ہے کہ متغیر x (variable) کی دو دی ہوئی قیمتوں، مان لیجیے a اور b کے لیے تفاعل $f(x)$ کے ایک تکملے کی قیمتوں کا فرق معلوم کیا جائے۔ اس فرق کو وقفہ $[a, b]$ کے لیے $f(x)$ کا معیّن تکملہ (Definite integral) کہتے ہیں اور اسے

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

سے ظاہر کرتے ہیں۔
اس طرح

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a),$$

جہاں $F(x)$ تفاعل $f(x)$ کا کوئی تکملہ ہے۔
فرق $[F(b)-F(a)]$ کو کبھی کبھی $\left|F(x)\right|_a^b$ سے بھی ظاہر کرتے ہیں۔
اس طرح اگر $F(x)$ تفاعل $f(x)$ کا کوئی تکملہ ہو تو

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left|F(x)\right|_a^b = F(b)-F(a)$$

نمبر a کو تکمل کی زیریں حد (Lower limit) اور نمبر b کو تکمل کی صعودی حد (Upper limit) کہتے ہیں۔

یہ غور کرنے کی بات ہے کہ معین تکملہ کی قیمت یکتا ہوتی ہے اور یہ اُس خاص تکملے پر منحصر نہیں ہوتی جو اسے حاصل کرنے کے لیے استعمال کیا گیا ہو۔ اگر $F(x)$ کے بجائے $F(x)+c$ استعمال کرتے تو

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big|F(x)+c\Big|_a^b = \{F(b)+c\} - \{F(a)+c\}$$
$$= F(b) - F(a),$$

اس طرح اختیاری مستقل c کٹ جاتا ہے اور ہمیں وہی قیمت ملتی ہے جو $F(x)$ استعمال کرنے پر ملتی ہے۔

مثالیں

1. $\int_1^2 x\,dx = \left|\frac{x^2}{2}\right|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}.$

2. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left|\tan^{-1}x\right|_0^1 = \tan^{-1}1 - \tan^{-1}0$
$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$

3. $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \left|-\cos x\right|_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$

مشقیں

ذیل تکملے حاصل کیجیے:

1. $\int_0^2 x^3\,dx.$
2. $\int_0^2 (2x+3x^2)\,dx.$
3. $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\,dx.$
4. $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx.$
5. $\int_a^b e^x\,dx.$
6. $\int_0^1 x^4(1+x)^3\,dx.$

7. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x \, dx.$

8. $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec^2 x \, dx.$

9. $\int_0^{2} \dfrac{x^4+1}{x^2+1} \, dx.$

10. $\int_0^{\frac{1}{3}\pi} \dfrac{2+3 \sin x}{\cos^2 x} \, dx.$

11. $\int_{-1}^{+1} \cosh x \, dx$

12. $\int_0^{1} \sqrt{(1+\cosh 2x)} \, dx.$

جوابات

1. 4.
2. 12.
3. $\pi/6$.
4. log 2.
5. $e^b - e^a$
6. $\dfrac{351}{280}$.
7. 1.
8. 1.
9. $2/3 + 2 \tan^{-1} 2$.
10. $2\sqrt{3}+3$
11. $(e^2-1)/e$.
12. 2 sinh 1.

1·7- معیّن تکملوں کی دو اہم خصوصیات

(i) $$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx,$$

(ii) $$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx,$$

جہاں c وقفہ $[a, b]$ میں یا اس کے باہر کا کوئی نقطہ ہے۔
ان کے ثبوت بہت آسان ہیں۔

مان لیجیے $F(x)$ تفاعل $f(x)$ کا کوئی تکملہ ہے، تو ہم پاتے ہیں

$$\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a).$$

(i) ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\int_b^a f(x)dx = \Big|F(x)\Big|_b^a = F(a) - F(b)$$
$$= -[F(b) - F(a)]$$
$$= -\int_a^b f(x)\, dx.$$

اِس طرح پہلا نتیجہ ثابت ہوگیا۔

(ii) اب

$$\left\{\begin{aligned} \int_a^c f(x)\,dx &= \Big|F(x)\Big|_a^c = F(c)-F(a). \\ \int_c^b f(x)\,dx &= \Big|F(x)\Big|_c^b = F(b)-F(c). \end{aligned}\right.$$

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx = [F(c)-F(a)]+[F(b)-F(c)] = F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

اِس طرح دوسرا نتیجہ ثابت ہوگیا

1.8 معیّن تکملہ کا جیومٹریائی مفہوم (Geometrical interpretation)

یہ ثابت کرنا کہ معیّن تکملہ

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

منحنی (curve) $y = f(x)$, x - محور (axis) اور دو عرضوں (ordinates) $x=a$ اور $x = b$ کے درمیان گھرے ہوئے رقبے کو ظاہر کرتا ہے۔

مان لیجیے $y = f(x)$ بلحاظ دو قائم محوروں (rectangular axes) کے ایک منحنی کی مساوات (equation) ہے اور مان لیجیے کہ A وہ رقبہ ہے جو منحنی x - محور ایک دیے ہوئے عرض AG $(OA = a)$ اور ایک متغیر عرض MP (variable ordinate) کے درمیان گھرا ہوا ہے۔

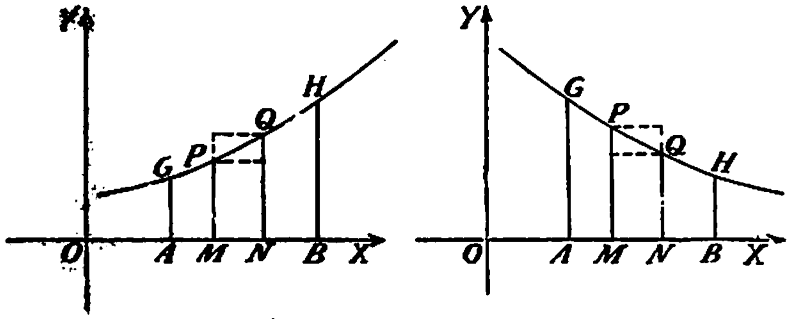
مان لیجیے $OM = x$ جس سے کہ

$$MP = y = f(x)$$

رقبہ A اس معیّن MP کے مقام (position) پر منحصر ہے۔ جس کا فصلہ

(abscissa) x ہے اور اِس لیے یہ رقبہ x کا تفاعل ہے۔

ہم منحنی پر ایک نقطہ $P, Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ کے اتنا قریب لیتے ہیں کہ اگر ایک نقطہ منحنی پر P سے Q کو چلے تو اُس کا عرض یا تو برابر بڑھے (تصویر 1) یا برابر گھٹے (تصویر 2)



تصویر 1   تصویر 2

ہم پاتے ہیں:

$$OA = x+\Delta x. \quad NQ = y+\Delta y. \quad MN = \Delta x$$

x میں Δx کا اضافہ (increment) ہونے پر A میں ΔA کا جو اضافہ ہوتا ہے وہ قطعہ (region) $MNQPM$ کے رقبے کے برابر ہے۔

قطعہ $MNQPM$ کا رقبہ ΔA دو مستطیلوں (rectangles) QM اور PN کے رقبوں $(y+\Delta y)\,\Delta x$ اور $y\Delta x$ کے درمیان ہوتا ہے۔

تصویر 1 کے لیے ہم پاتے ہیں

$$(y+\Delta y)\,\Delta x > \Delta A > y\Delta x$$

$$(i) \ldots\ldots\ldots \Rightarrow \quad (y+\Delta y) > \frac{\Delta A}{\Delta x} > y.$$

مان لیجیے $\Delta x \to 0$ تاکہ $\Delta y \to 0$ تب ہم (i) سے پاتے ہیں

$$\frac{dA}{dx} = y = f(x)$$

تصویر 2 کے لیے ہم پاتے ہیں

$$y\Delta x > \Delta A > (y+\Delta y)\Delta x$$

$$\Rightarrow \qquad y > \frac{\Delta A}{\Delta x} > (y+\Delta y),$$

اِس لیے اِس صورت میں بھی انتہا لینے پر ہم پاتے ہیں

$$\frac{dA}{dx} = y = f(x).$$

مان لیجیے $x = b$. پر عرض BH ہے۔ اب

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{dA}{dx}\,dx = \Big|A\Big|_a^b$$

$= (x = b$. پر A کی قیمت$) - (x = a$. پر A کی قیمت$)$
$=$ (قطعہ $GABHGA$ کا رقبہ) $- 0$
$=$ (قطعہ $GABHGA$ کا رقبہ)

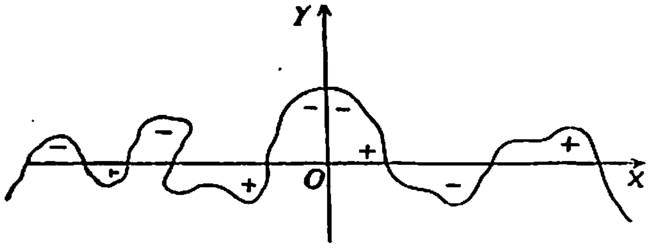
جوکہ منحنی $y = f(x)$، x-محور اور دو عرضوں $x = a$، $x = b$ کے درمیان گھرا ہوا رقبہ ہے۔

نوٹ : رقبہ تفاعل (area-function) کی جو تعریف (definition) اوپر دی گئی ہے وہ A کی مکمل تعریف کے لیے، تاکہ سبھی ممکن صورتیں (cases) شامل ہوسکیں، ہم A کو اُن سبھی حصّوں کے رقبوں کا جبری جوڑ سمجھتے ہیں جوکہ منحنی، x-محور اور دو عرضوں کے درمیان گھرے ہوئے ہیں۔ ہر حصّے کے ساتھ مثبت یا نفی علامت ذیل کے رواج (convention) کے مطابق لگاتے ہیں :-

(i) مثبت علامت والے وہ حصّے ہیں جوکہ ثابت عرض (fixed ordinate) GA کے داہنی طرف x-محور کے اوپر ہوتے ہیں یا پھر GA کے بائیں طرف x-محور کے نیچے ہوتے ہیں۔

(ii) منفی علامت والے وہ حصّے ہیں جوکہ ثابت عرض GA کے داہنی طرف

x -محور کے نیچے ہوتے ہیں یا پھر GA کے بائیں طرف x -محور کے اوپر ہوتے ہیں۔



تصویر 3

ان رواجوں (conventions) کو ذہن میں رکھ کر یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ رقبہ A کی اِس تکمل تعریف سے § 1·8 کا نتیجہ ہمیشہ صحیح رہے گا خواہ ثابت عرض GA کی نسبت متغیر عرض MP کا مقام (position) کچھ بھی ہو۔

مثالیں

1- تکمل کے ذریعے اُس مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے خطوط کی مساواتیں یہ ہیں :

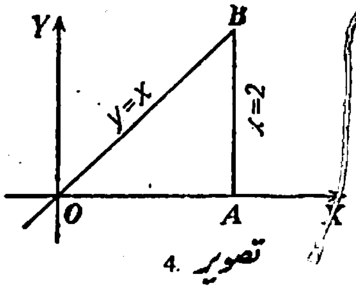
$$x = 2 \text{ اور } y = x, y = 0$$

ساتھ ہی ابتدائی جیومٹری سے اپنے نتیجے کی جانچ کیجیے۔

یہاں جو رقبہ درکار ہے وہ $y = x$, x -محور اور دو عرضوں $x = 0$ اور $x = 2$ کے درمیان گھرا ہوا ہے۔ اِس لیے درکار رقبہ

$$= \int_0^2 y\,dx = \int_0^2 x\,dx$$

$$= \left|\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 2.$$



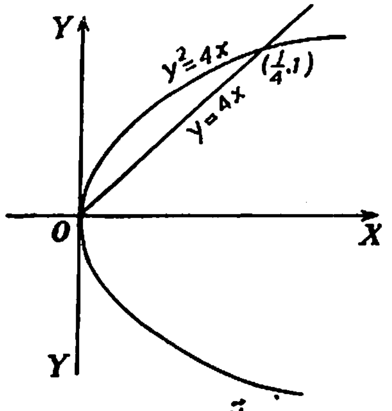
تصویر 4.

ابتدائی جیومٹری سے، مثلث کا رقبہ

$$= \frac{1}{2}\, OA.AB = \frac{1}{2}.2.2 = 2$$

اس طرح نتیجے کی جانچ ہوگئی۔

2 - مکافی (parabola) $y^2 = 4x$ اور اس کے وتر خاص (latus rectum) کے درمیان گھرا ہوا رقبہ معلوم کیجیے۔



تصویر 5

ہمیں رقبہ LOL'L معلوم کرنا ہے جو کہ تشاکل (symmetry) کی وجہ سے رقبہ LOSL کا دگنا ہے۔ قوس OL (Arc) کے کسی بھی نقطہ کے لیے

$$y = \sqrt{4a}\ \sqrt{x}$$

ساتھ ہی $OS = a$ اس لیے

$$\therefore \text{ رقبہ } LOSL = \int_0^a y\, dx = \sqrt{4a}\int_0^a x^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \sqrt{4a}\left|\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right|_0^a$$

$$= \sqrt{4a}\left\{\tfrac{2}{3}(a)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3}.\ 0\right\} = \tfrac{4}{3}a^2$$

$$\therefore \text{ درکار رقبہ } LOL'L = \tfrac{8}{3}a^2$$

مشقیں

1- x - محور اور $x = 0$ سے $x = \pi$ تک منحنی $y = \sin x$ کے درمیان گھرا رقبہ معلوم کیجیے۔

2- منحنی $y = \sec^2 x$ ، x - y محور اور عرض $x = \pi/4$ کے درمیان گھرا ہوا رقبہ معلوم کیجیے۔

3- منحنی $y = e^x$ ، x - y محور اور عرضوں $x = -1$ اور $x = 1$ کے درمیان گھرا ہوا رقبہ معلوم کیجیے۔

4- مکافی $y^2 = 4x$ کے اس حصے کا رقبہ معلوم کیجیے جو کہ خط $y = 4x$ سے کٹتا ہے۔

5- منحنیوں $y = \sin x$ اور $y = \cos x$ کی ترسیم (trace) کیجیے جب کہ x صفر سے $\pi/2$ تک بڑھے اور x - محور اور اِن کے درمیان گھرا ہوا رقبہ معلوم کیجیے۔

6- ثابت کیجیے کہ مکافی $xy = 1$ ، x - محور اور دو عرضوں $x = 1$ اور $x = 2$ کے درمیان گھرے ہوئے قطعہ کا رقبہ $\log 2$ ہے۔

جوابات

1. 2, **2.** 1. **3.** $(e^2-1)/e$. **4.** $1/24$ **5.** $2-\sqrt{2}$.

1.9- غیر واجب معین تکملے

معین تکملے

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

کی تعریف اور اس کے جیومٹریائی مفہوم میں یہ مان لیا جاتا ہے کہ

(i) a اور b دونوں حدیں متناہی (finite) ہیں۔

اور (ii) $f(x)$ وقفہ $[a, b]$. میں مسلسل (continuous) ہے۔

اب ہم تکملے کی اِس تعریف کو وسیع کرتے ہیں تاکہ نئی تعریف میں وہ معین تکملے بھی شامل ہوسکیں جن کے لیے یا تو

(i) a یا b یا دونوں لامتناہی (infinite) ہوں۔

یا (ii) وقفہ $[a, b]$ کے کسی نقطے پر $f(x)$ لامتناہی ہوجاتا ہو یعنی وقفہ $[a, b]$ میں کوئی نقطہ c. ایسا ہو کہ جب $x \to c$ تو $f(x) \to \infty$

اِن قسموں کے تکملے وسیع شدہ (Generalised) غیر واجب (Improper) یا لامتناہی تکملے کہلاتے ہیں۔

1.91- پہلی قسم کے غیر واجب معین تکملے

مان لیجیے کہ اوپری حد b لامتناہی ہے۔
ہم تکملہ

$$\int_a^\infty f(x)\, dx,$$

کی قیمت نکالنے کے لیے پہلے تکملہ

$$\int_a^t f(x)\, dx,$$

کی قیمت نکالتے ہیں جہاں t کوئی نمبر ہے جو a سے بڑا ہے۔ اس معین تکملہ کی قیمت 't' پر منحصر ہے۔ اب $t \to \infty$ کے لیے ہم اس متناہی تکملے کی انتہا لیتے ہیں۔ اگر اِس انتہا (limit) کا وجود ہو اور وہ متناہی ہو تو وہی انتہا تکملہ

$$\int_a^\infty f(x)\, dx.$$

کی قیمت کہلاتی ہے۔

اگر انتہا کا وجود نہ ہو یا وہ لامتناہی ہو تو

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx$$

بے معنی ہوتا ہے اور ہم کہتے ہیں کہ یہ لامتناہی تکملہ بے وجود ہے۔

مثالیں

1۔ تکملہ

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

حاصل کرنے کے لیے پہلے ہم تکملہ

$$\int_0^{t} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ ہم پاتے ہیں

$$\int_0^{t} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \Big| \tan^{-1} x \Big|_0^t = \tan^{-1} t - \tan^{-1} 0 = \tan^{-1} t$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to\infty} \tan^{-1} t = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

2۔ تکملہ

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx,$$

کی قیمت نکالنے کے لیے پہلے ہم تکملہ

$$\int_1^{t} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ ہم پاتے ہیں

$$\int_1^{t} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \Big| 2\sqrt{x} \Big|_1^t = 2\sqrt{t} - 2$$

جو کہ $t \to \infty$ پر خود ∞ کی طرف مائل ہوتا ہے۔
اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ لامتناہی تکملہ

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

بے وجود ہے۔

1·92 - اب مان لیجیے کہ زیریں حد $-\infty$ ہے۔ تکملہ

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx,$$

حاصل کرنے کے لیے پہلے ہم تکملہ

$$\int_t^b f(x)\, dx.$$

کی قیمت نکالتے ہیں، جہاں کہ t کوئی ایسا نمبر ہے جو b سے کم ہو۔ اگر $t \to -\infty$،
کے لیے اس تکملہ کی انتہا کا وجود ہو اور وہ متناہی ہو تو اُسے ہم تکملہ

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx.$$

کی قیمت کہتے ہیں۔

1·93 - لامتناہی تکملہ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx,$$

پر غور کرنے اور اگر ممکن ہو تو اُس کی قیمت نکالنے کے لیے ہم ذیل دو تکملوں

$$\int_a^\infty f(x)\, dx, \text{ اور } \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$$

پر غور کرتے ہیں۔ اگر ان دونوں تکملوں کا متناہی وجود ہو تو ہم لکھتے ہیں

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx.$$

مشق 1۔ ذیل کے غیر واجب تکملوں کی قیمت نکالیے

$$(i) \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx, \quad (ii) \int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[2]{x^3}}, \quad (iii) \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^4}, \quad (iv) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

جوابات : (i) 1, (ii) 1, (iii) ⅓, (iv) π.

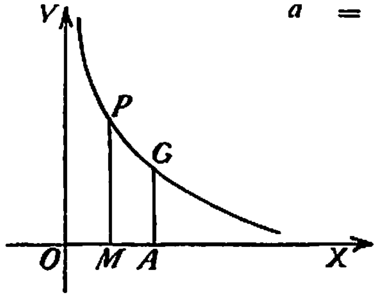
مشق 2۔ ثابت کیجیے کہ تکملے

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx \quad \text{اور} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

بے وجود ہیں۔

مشق 3۔ منحنی $y = 1/x^2$، x-محور اور عرض $1 = x$ کے درمیان گھرا ہوا رقبہ معلوم کیجیے۔ یہاں جس قطعہ کا رقبہ نکالنا ہے وہ ∞ تک پھیلا ہوا ہے لہٰذا معمولی طور پر ہم اُس کے رقبے کے بارے میں کچھ نہیں کہہ سکتے۔ لیکن انتہا لے کر اُسے ذیل طریقے پر معنی دیے جا سکتے ہیں۔

مان لیجیے $a = OA$



تصویر- 6

کوئی متغیر عرض (variable ordinate) MP لیجیے جب کہ $OM = t$ اور قطعہ

GAMPG کے رقبے پر غور کیجیے۔ اگر عرض MP کے ∞ کی طرف مائل ہونے پر یہ رقبہ ایک متناہی انتہا کی طرف مائل ہوتا ہو تو ہم اس حد کو زیر غور لامتناہی قطعہ کا رقبہ کہتے ہیں۔

اس طرح ہم پاتے ہیں

$$\text{GAMPG رقبہ} = \int_1^t y\,dx = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\left|\frac{1}{x}\right|_1^t = -\frac{1}{t}+1$$

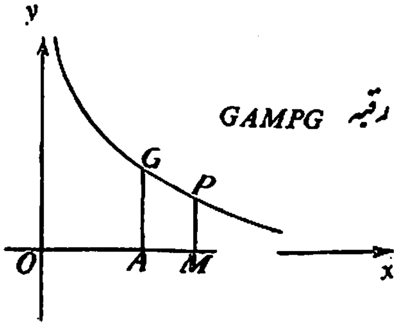
جو کہ $t \to \infty$ ہونے پر 1 کی طرف مائل ہوتا ہے۔

لہٰذا متناہی قطعہ کا رقبہ وجود رکھتا ہے اور وہ 1 کے برابر ہے۔ یہ کہنے میں کہ لامتناہی قطعہ کا رقبہ 1 ہے، ہمارا مقصد یہ ہے کہ MP کو کافی دور لے کر ہم قطعہ GAMPG کے رقبہ کو 1 کے جتنا قریب چاہیں لا سکتے ہیں۔

مشق 4۔ منحنی $y = 1/\sqrt{x}$، x-محور اور عرض $x = 1$ کے درمیان گھرا ہوا رقبہ نکالنے کے سوال پر غور کیجیے۔

مان لیجیے $OA = 1$ اور $OM = t$۔

$$\text{GAMPG رقبہ} = \int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left|2\sqrt{x}\right|_1^t = 2(\sqrt{t}-1)$$



تصویر 7

جو کہ $t \to \infty$ ہونے پر خود ∞ کی طرف مائل ہوتا ہے۔

اس لیے اس صورت میں لامتناہی قطعہ کا رقبہ بے وجود ہے۔

اس کا مطلب یہ ہے کہ MP کو کافی دور لے جا کر قطعہ GAMPG کے رقبے کو جتنا چاہیں اُتنا بڑا کر سکتے ہیں۔

نوٹ۔ مشق 3 میں لامتناہی قطعہ کے رقبے کا وجود ہے جب کہ مشق 4 میں لامتناہی قطعہ کا رقبہ لامتناہی (infinite) ہے۔ یہ بات وجدانی طور پر (intuitively)

یوں سمجھ میں آتی ہے کہ مشق 3 میں منحنی x-محور کی طرف زیادہ تیزی سے جاتا ہے بہ نسبت مشق 4 کے۔

مشق 5 ۔ دوسرے ربع (second quadrant) میں منحنی $y=e^x$ اور دونوں محاور (axes) کے درمیان گھرے قطعہ کا رقبہ نکالنے کے سوال پر غور کیجیے۔

1·94۔ دوسری قسم کے غیر واجب معین تکملے:

مان لیجیے کہ x کے a کی طرف مائل ہونے پر $f(x)$ خود ∞ کی طرف مائل ہوتا ہے لیکن کسی اور نقطہ پر $f(x)$ لامتناہی (infinity) نہیں ہوتا اور مان لیجیے کہ h کوئی مثبت نمبر ہے۔ ہم واجب تکملہ

$$\int_{a+h}^{b} f(x)\,dx$$

حاصل کرتے ہیں جس کی قیمت h کا تفاعل ہے۔ اگر $h\to 0$ ہونے پر h کا یہ تفاعل کسی متناہی انتہا کی طرف مائل ہو تو اُس متناہی انتہا کو غیر واجب تکملہ

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

کی قیمت کہتے ہیں۔ اگر ایسی انتہا کا متناہی وجود نہ ہو تو

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

بے معنی ہوتا ہے۔

اسی طرح اگر $f(x)$, $x\to b$ پر ∞ کی طرف مائل ہوتا ہو لیکن اور کسی نقطے پر $f(x)$ لامتناہی نہیں ہوتا تو ہم واجب تکملہ

$$\int_{a}^{b-h} f(x)\,dx.$$

کی انتہا $h\to 0$ ہونے پر لیتے ہیں۔ اگر اِس کی انتہا کا متناہی وجود ہو تو ہم اُسے

تکملہ

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

کی قیمت کہتے ہیں۔

اگر $f(x)$ وقفہ $[a, b]$ کے کسی نقطہ $x = c$ پر لامتناہی (infinity) کی طرف مائل ہوتا ہو تو ہم دو غیر واجب تکملوں

$$\int_c^b f(x)\, dx \quad \text{اور} \quad \int_a^c f(x)\, dx$$

پر غور کرتے ہیں اور اگر دونوں کا متناہی وجود ہو تو ہم لکھتے ہیں

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

مشق 1 - غیر واجب تکملہ

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\, dx.$$

کی جانچ کیجیے۔

تکاملیہ $1/\sqrt{(1-x^2)}$ اوپری حد 1 پر لامتناہی ہو جاتا ہے۔ اس تکملے کی جانچ کے لیے ہم تکملہ

$$\int_0^{1-h} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\, dx.$$

کی قیمت نکالتے ہیں۔ ہم پاتے ہیں

$$\int_0^{1-h} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\, dx = \Big| \sin^{-1} x \Big|_0^{1-h}$$

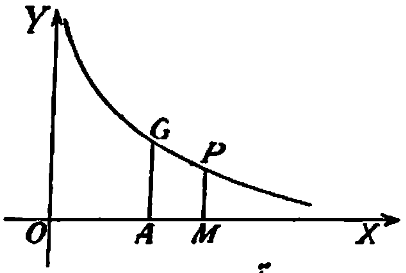
$$= \sin^{-1}(1-h) - \sin^{-1} 0$$

$$= \sin^{-1}(1-h).$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \int_0^{1-h} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\, dx = \lim_{h\to 0} \sin^{-1}(1-h) = \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

مشق 2۔ منحنی $y = 1/\sqrt{x}$ ، Y۔محور اور عرض $x = 1$ کے درمیان گھرے رقبے کی جانچ کیجیے۔ یہاں قطعہ لامتناہی تک پھیلتا ہے اور ہم § 1·93 کی مشق 3 کی طرح اس سوال کو حل کریں گے۔



تصویر-8

مان لیجیے $OA = 1$
ہم کوئی عرض MP لیتے ہیں جس کا فصلہ h ہے اور پھر قطعہ MPGAM کے رقبے کی انتہا کی جانچ کرتے ہیں جبکہ عرض MP ، Y۔محور کی طرف مائل ہو یعنی جب $h \to 0$ اس قطعہ کا رقبہ

$$MPGAM = \int_h^1 y\,dx = \int_h^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \Big|2\sqrt{x}\Big|_h^1 = 2-2\sqrt{h},$$

جوکہ $h \to 0$ ہونے پر 2 کی طرف مائل ہوتا ہے۔ لہذا اس صورت میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ لامتناہی قطعہ کا رقبہ 2 ہے۔

مشق 3۔ ذیل غیر واجب تکملوں کی جانچ کیجیے۔

$$(i)\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx, \qquad (ii)\ \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx.$$

جوابات: (i) $\frac{3}{2}$ (ii) بے وجود ہے

مشق 4۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $y = 1/x^4$، Y۔محور اور عرض $x = 2$ کے درمیان گھرا ہوا رقبہ متناہی نہیں ہے۔

2

تکمل کے طریقے

عوضی تکمل (Integration by Substitution)

اور حصہ سے تکمل (Integration by Parts.)

2·1 ۔ تکمل کے طریقے ۔ تکمل کے چار خاص طریقے یہ ہیں :۔

(I.) تکاملیہ کو ایسے تکاملیوں کے جوڑ کی شکل میں رکھنا جن کے تکملے معلوم ہوں۔

(II) عوضی تکمل

(III) حصہ سے تکمل

(IV) متواتر تحویل (*successive reduction*) سے تکمل۔

ان میں سے تکمل کا پہلا طریقہ جو کہ §1.5 کے دونوں مسئلوں پر منحصر ہے وہ پہلے باب میں بتایا جا چکا ہے۔ تیسرے باب میں ہم یہ دیکھیں گے کہ تکمل کا یہ طریقہ جبری ناطق تفاعلوں (algebraic rational functions) کے تکمل کے لیے کثرت سے استعمال ہوتا ہے۔

دوسرے طریقے اس باب میں بتائے جائیں گے۔ ہم دیکھیں گے کہ حصہ سے تکمل کا طریقہ دراصل متواتر تحویل کا ہی طریقہ ہے کیوں کہ اس کی مدد سے ہم دو تفاعلوں کے حاصل ضرب کے تکملے کو ایک ایسے تفاعل کے تکملے کی شکل میں رکھ سکتے جو زیادہ

آسانی سے حاصل ہو سکے۔ لہٰذا متواتر تحویل سے تکمل کا طریقہ حصہ سے تکمل کی ایک تدریجی (developed) شکل ہے۔

اس باب میں ہم خاص طور سے تکمل کے مختلف طریقوں پر زور دیں گے اور اگلے تین ابواب میں تفاعلوں کی مختلف قسموں (Classes) پر غور کریں گے اور ان میں سے ہر قسم کے تفاعلوں کے تکمل کے طریقے بتائیں گے۔

نوٹ: تکمل کا عمل اس قدر نظامی (systematic) نہیں ہے جتنا کہ تفرق (differentiation)۔ عام طور پر تجربہ ہی سکھاتا ہے کہ دیے ہوئے تفاعل کے تکمل کا سب سے سیدھا اور آسان طریقہ کیا ہے۔

2.2۔ عوضی سے تکمل

اس طریقے کے مطابق تکملہ

$$\int f(x)\,dx$$

کو جس میں x غیر تابع (independent) متغیر ہے، ایک ایسے تکملے کی صورت میں رکھتے ہیں جس میں کوئی دوسرا متغیر، مان لیجیے t غیر تابع متغیر ہو، جہاں x اور t میں کوئی مناسب رشتہ ہو۔

اس سے ذیل نتیجہ نکلتا ہے

$$\int f(x)\,dx = \int f[\phi(t)]\,\phi'(t)\,dt,$$

اسے اس طرح ثابت کر سکتے ہیں:۔

مان لیجیے

$$v = \int f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = f(x)$$

ہم پاتے ہیں

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\;\frac{dx}{dt} = f(x).\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad v = \int f(x)\,\frac{dx}{dt}\,dt = \int f[\phi(t)]\,\phi'(t)\,dt \qquad (x = \phi(t)$$ کیونکہ)

لہٰذا ہم نے ثابت کر دیا کہ
بلحاظ x کی تفاعل $f(x)$ کا تکملہ بلحاظ t، $f(x)\frac{dx}{dt}$ کے تکملے کے برابر ہوتا ہے۔

یہاں x کی جگہ پر $\phi(t)$ رکھنا ہوتا ہے۔
یہ طریقہ تبھی مفید ثابت ہوتا ہے جب کہ رشتہ $x = \phi(t)$ ایسا چنا جا سکے کہ نئے تکاملیہ $f(x)(dx/dt)$ کا تکملہ معلوم ہو جائے۔

ایک ضروری نوٹ ۔ یہ غور کرنے کی بات ہے کہ نتیجہ

$$\int f(x)\,dx = \int f[\phi(t)]\,\phi'(t)dt$$

میں dx کی جگہ پر $\phi'(t)dt$ رکھ دیا گیا ہے اور یہ مان لینے پر کہ dx اور dt مختلف چیزیں ہیں $dx/dt = \phi'(t)$ سے اوپر کا نتیجہ نکل آتا ہے۔ یہ مان لینے پر عوضی تکمل کا عمل بہت آسان ہو جاتا ہے۔ (آگے مثال 3 دیکھیے)
یہاں جو بھی مانا گیا ہے اُس کی منطقی توجیہہ (logical justification) کی ضرورت نہیں کیوں کہ یہاں یہ سرسری طور پر آسانی کے لیے بیان کیا گیا ہے۔

مثالیں

1. $e^x \cos e^x$ کا تکمل کیجیے
اگر $e^x = t$ رکھیں تو

$$e^x = t \Rightarrow e^x\frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{e^x}$$

اِس لیے

$$\int e^x \cos e^x\,dx = \int\left(e^x \cos e^x\right)\frac{dx}{dt}dt$$

$$= \int \left(e^x \cos e^x \right) \frac{1}{e^x}\, dt$$

$$= \int \cos t\, dt = \sin t$$

$$= \sin e^x.$$

2- $\sin^2 x \cos x$ کا تکمل کیجیے

اگر $\sin x = t$ رکھیں تو

$$\cos x \frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow \frac{ax}{dt} = \frac{1}{\cos x}$$

اس لیے

$$\int \sin^2 x \cos x\, dx = \int \sin^2 x \cos x \,.\, \frac{dx}{dt} dt$$

$$= \int \sin^2 x \cos x \,.\, \frac{1}{\cos x} dt$$

$$= \int t^2\, dt = \frac{t^3}{3} = \frac{\sin^3 x}{3}.$$

3- $\int \frac{4x^3}{1+x^8} dx.$ حاصل کیجیے۔

اگر $x^4 = t$ رکھیں تو

$$4x^3 \frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow 4x^3 dx = dt.$$ (22 کا نوٹ دیکھیے)

اس لیے $\int \frac{4x^3}{1+x^8} dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = \tan^{-1} t = \tan^{-1} x^4.$

مشقیں

ذیل فنکشنوں کے تکملے حاصل کیجیے:-

1. (i) $e^x \sin e^x$, (ii) $2x\, e^{x^2}$, (iii) $x^2 e^{x^3}$;
   (iii) $e^{\log x}/x$, (v) $e^{\tan t} \sec^2 t$, (vi) $\frac{e^{\sin^{-1} x}}{\sqrt{(1-x^2)}}$
   (vii) $\frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2}$, (viii) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{3\sqrt{x}}$, (ix) $\frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}$.
2. (i) $\cos^3 x \sin x$, (ii) $\sqrt[3]{\sin x} \cos x$, (iii) $3 \sin x \sec^4 x$.

3. (*i*) $\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$, (*ii*) $\frac{\tan^2 x \sec^2 x}{1+\tan^6 x}$,

(*iii*) $\frac{2}{x[1+(\log x)^2]}$, (*iv*) $\frac{3e^{2x}}{1+e^{4x}}$, (*v*) $\frac{2x}{1+x^4}$,

(*vi*) $\frac{x^5}{1+x^{12}}$, (*vii*) $\frac{2x^3}{1+x^8}$, (*viii*) $\frac{1}{e^x+e^{-x}}$.

4. (*i*) $\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$, (*ii*) $\frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)^3}$, (*iii*) $\frac{(1-\log x)^2}{x}$

5. (*i*) $4x^3 \operatorname{cosec}^2 (x^4)$, (*ii*) $x^4 \sec^2 (x^5)$, (*iii*) $x^3 \sin x^4$,

(*iv*) $(\cos \sqrt{x})/\sqrt{x}$, (*v*) $e^x \sec^2 (e^x)$.

6. (*i*) $\frac{\cos (\log x)}{x}$, (*ii*) $\frac{\sec^2 (\log x)}{x}$,

(*iii*) $\frac{\sin (2+3 \log x)}{x}$, (*iv*) $e^x \tan (e^x) \sec (e^x)$.

7. (*i*) $\frac{2x}{\sqrt{(1-x^4)}}$, (*ii*) $\frac{x^2}{\sqrt{(1-x^6)}}$,

(*iii*) $\frac{2}{\sqrt{[2-(2x+3)^2]}}$, (*iv*) $\frac{\sec^2 x}{\sqrt{(1-\tan^2 x)}}$

8. (*i*) $\frac{x^2 \tan^{-1} x^3}{1+x^6}$, (*ii*) $\frac{2x \sin^{-1} x^2}{\sqrt{(1-x^4)}}$,

(*iii*) $\frac{\tan \sqrt{x} \sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

جوابات

1. (*i*) $\cos e^x$ (*ii*) e^{x^2} (*iii*) $\frac{1}{3} e^{x^3}$

(*iv*) x (*v*) $e^{\tan t}$ (*vi*) $e^{\sin^{-1} x}$

(*vii*) $e^{\tan^{-1} x}$ (*viii*) $\frac{2}{3} e^{\sqrt{x}}$ (*ix*) $\tan (xe^x)$

2. (*i*) $\frac{1}{4}\cos^4 x$ (*ii*) $\frac{3}{4} \sin^{4/3} x$ (*iii*) $\sec^3 x$

3. (*i*) $\tan^{-1} (\sin x)$ (*ii*) $\frac{1}{3} \tan^{-1} (\tan^3 x)$

(*iii*) $2 \tan^{-1} (\log x)$ (*iv*) $\frac{3}{2} \tan^{-1} (e^{2x})$

(*v*) $\tan^{-1} x^2$ (*vi*) $\frac{1}{6} \tan^{-1} x^6$ (*vii*) $\frac{1}{4} \tan^{-1} x^4$

(*viii*) $\tan^{-1}(e^x)$

4. (*i*) $-1/(1+\sin x)$ (*ii*) $-\frac{1}{2}(1+\tan x)^2$

(*iii*) $-\frac{1}{3}(1-\log x)^3$

5. (i) $-\cot x^4$ (ii) $\frac{1}{5}\tan x^5$ (iii) $-\frac{1}{4}\cos x^4$
   (iv) $2\sin\sqrt{x}$ (v) $\tan e^x$
6. (i) $\sin(\log x)$ (ii) $\tan(\log x)$ (iii) $-\frac{1}{3}\cos(2+3\log x)$
   (iv) $\sec e^x$
7. (i) $\sin^{-1} x^3$ (ii) $\frac{1}{3}\sin^{-1} x^3$ (iii) $\sin^{-1}[(2x+3)/\sqrt{2}]$
   (iv) $\sin^{-1}(\tan x)$
8. (i) $\frac{1}{6}(\tan^{-1} x^3)^2$ (ii) $\frac{1}{6}(\sin^{-1} x^3)^2$ (iii) $(\tan\sqrt{x})^2$

2.3 - تین اہم قسم کے تکملے

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log f(x) \quad \text{- 2·31}$$

اگر ہم $t = f(x)$ رکھیں تو $f'(x)\,dx = dt$

اس لیے

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \log t = \log f(x)$$

لہذا ہم نے ثابت کر دیا کہ

اگر کوئی تفاعل ایک ایسی کسر (fraction) کی صورت میں ہو جس کا شمار کنندہ (numerator) اس کے نسب نما (denominator) کا تفرقی سر ہو تو اُس تفاعل کا تکملہ نسب نما کے لوگارتھم (logarithm) کے برابر ہوتا ہے۔

مثالیں

$$\int \frac{3x^2}{1+x^3}dx = \log(1+x^3) \quad (1)$$

کیونکہ شمار کنندہ $3x^2$ نسب نما $1+x^3$ کا تفرقی سر ہے۔

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \log(1+e^x). \quad (2)$$

2·311 - tan x ، cot x ، sec x اور cosec x. کے تکملے

اوپر دیے ہوئے نتیجے کی مدد سے ہم tan x ، cot x ، sec x اور cosec x کے تکملے اس طرح حاصل کر سکتے ہیں:-

I. $\int \tan x \ dx = \int \frac{\sec x \tan x}{\sec x} \ dx = \log \sec x.$

$\therefore \int \tan x \, dx = \log \sec x.$

II. $\int \cot x \ dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \ dx = \log \sin x.$

$\therefore \int \cot x \, dx = \log \sin x.$

III. $\int \sec x \ dx = \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \log (\sec x + \tan x),$

کیوں کہ شمار کنندہ $\sec^2 x + \sec x \tan x$, نسب نما $\sec x + \tan x$. کا تفرقی سر ہے۔

اس نتیجے کو دوسری شکل میں رکھنے کے لیے ہم لکھتے ہیں

$$\sec x + \tan x = \frac{1 + \sin x}{\cos x}.$$

پھر یہ نتایج استعمال کرتے ہوئے کہ

$$\sin x = \frac{2 \tan (x/2)}{1 + \tan^2 (x/2)}, \cos x = \frac{1 - \tan^2 (x/2)}{1 + \tan^2 (x/2)},$$

ہم پاتے ہیں

$$\sec x + \tan x = \frac{1 + \tan (x/2)}{1 - \tan (x/2)} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right).$$

اس طرح

$$\int \sec x \, dx = \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right).$$

IV. $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \int \frac{\operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec} x - \cot x)}{\operatorname{cosec} x - \cot x} \, dx$

$$= \log (\operatorname{cosec} x - \cot x)$$

اوپر III کی طرح ہم پاتے ہیں

$$\operatorname{cosec} x - \cot x = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1-\dfrac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}}{\dfrac{2\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}} = \tan\frac{x}{2}$$

لہٰذا

$$\int \operatorname{cosec} x \; dx = \log \tan \frac{x}{2}.$$

مشقیں

1 ۔ ذیل کے تکملے حاصل کیجیے

(*i*) $\frac{4x^3}{1+x^4}$, (*ii*) $\frac{x^2}{1+x^3}$ (*iii*) $\frac{x+1}{x^2+1}$

(*iv*) $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}\sin^{-1} x}$, (*v*) $\frac{1}{(1+x^2)\tan^{-1} x}$, (*vi*) $\tanh x$.

(*vii*) $\coth x$, (*viii*) $\frac{\cos x}{a+b\sin x}$, (*ix*) $\frac{\cot x}{\log \sin x}$

(*x*) $\frac{\sec^2 x}{1+\tan x}$, (*xi*) $\frac{\operatorname{cosec}^2 x}{1+\cot x}$, (*xii*) $\frac{1}{x\log x}$,

(*xiii*) $\frac{x^{e-1}+e^{x-1}}{x^e+e^x}$, (*xiv*) $\frac{ax^{n-1}}{bx^n+c}$, (*xv*) $\frac{1}{\sqrt{x}+x}$,

(*xvi*) $\frac{1}{x\log x\,[\log(\log x)]}$, (*xvii*) $\frac{\sin 2x}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}$,

(*xviii*) $\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$, (*xix*) $\frac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x)^2}$,

(*xx*) $\frac{\sec x \operatorname{cosec} x}{\log(\tan x)}$.

2 ۔ غیر تابع متغیر (independent variable) کو بدل کر مندرجہ ذیل تفاعلوں کے تکملے حاصل کیجیے۔

(*i*) $e^x \tan(e^x)$, (*ii*) $x^2 \tan x^3$, (*iii*) $\cos x \cot(\sin x)$,

(*iv*) $\frac{\cot(\log x)}{x}$, (*v*) $\frac{\tan(\sin^{-1} x)}{\sqrt{(1-x^2)}}$, (*vi*) $\frac{\cot\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$,

(*vii*) $\cot(2x+3)$, (*viii*) $\tan(3x+4)$, (*ix*) $e^x \cot(e^x)$.

3۔ تکمل کیجیے:

(*i*) $\sec(\tan x)\sec^2 x$. (*ii*) $x^{n-1}\operatorname{cosec} x^n$,

(*iii*) $\sec(ax+b)$, (*iv*) $\operatorname{cosec}(ax+b)$,

(*v*) $\operatorname{cosec}(\operatorname{cosec} x)\cot x \operatorname{cosec} x$, (*vi*) $\dfrac{\operatorname{cosec}(\tan^{-1} x)}{1+x^2}$.

4۔ حاصل کیجیے:

$$\int \frac{dx}{\sin(x-a)\sin(x-b)}.$$

اشارہ: ہم پاتے ہیں

$$\begin{aligned}\sin(b-a) &= \sin[(x-a)-(x-b)]\\ &= \sin(x-a)\cos(x-b)-\cos(x-a)\sin(x-b)\end{aligned}$$

اس لیے

$$\frac{\sin(b-a)}{\sin(x-a)\sin(x-b)} = [\cot(x-b)-\cot(x-a)].$$

جوابات

1. (*i*) $\log(1+x^4)$ (*ii*) $\frac{1}{2}\log(1+x^3)$

(*iii*) $\log(1+x^2) + \tan^{-1} x$ (*iv*) $\log \sin^{-1} x$

(*v*) $\log \tan^{-1} x$ (*vi*) $\log \cosh x$

(*vii*) $\log \sinh x$ (*viii*) $(1/b)\log(a+b\sin x)$

(*ix*) $\log\log(\sin x)$ (*x*) $\log(1+\tan x)$

(*xi*) $-\log(1+\cot x)$ (*xii*) $\log\log x$

(*xiii*) $(1/e)\log(x^e+e^x)$ (*xiv*) $(a/nb)\log(bx^n+c)$

(*xv*) $2\log(1+\sqrt{x})$ (*xvi*) $\log[\log(\log x)]$

(*xvii*) $[1/(b-a)]\log(a\cos^2 x+b\sin^2 x)$

(xviii) $\log(\sin x+\cos x)$ (xix) $\log(\sin x+\cos x)$

(xx) $\log[\log(\tan x)]$

2. (i) $\log(\sec e^{x})$ (ii) $\frac{1}{3}\log(\sec x^3)$ (iii) $\log[\sin(\sin x)]$

(iv) $\log[\sin(\log x)]$ (v) $\log\sec(\sin^{-1}x)$ (vi) $2\log(\sin\sqrt{x})$

(vii) $\frac{1}{2}\log[\sin(2x+3)]$ (viii) $\frac{1}{3}\log[\sec(3x+4)]$ (ix) $\frac{1}{2}\log(\sin e^{x})$

3. (i) $\log\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\tan x\right)\right]$ (ii) $\left(\frac{1}{n}\right)\log\left[\tan\left(\frac{1}{2}x^n\right)\right]$

(iii) $(1/a)\log\tan\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}(ax+b)\right)$ (iv) $(1/a)\log\left(\frac{ax+b}{2}\right)$

(v) $-\log\tan(\frac{1}{2}\operatorname{cosec}x)$ (vi) $\log\tan(\frac{1}{2}\tan^{-1}x)$

4. $\frac{1}{\sin(a-b)}\log\frac{\sin(x-a)}{\sin(x-b)}$

$$\int[f(x)]^n f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}, \quad \text{جبکہ } n\neq-1. \qquad 2{\cdot}32.$$

اگر $f(x)=t$ رکھیں تو $f'(x)\,dx=dt.$ اس لیے

$$\int[f(x)]^n f'(x)\,dx=\int t^n\,dt=\frac{t^{n+1}}{n+1}, \quad (n\neq-1 \text{ کے لیے})$$
$$=\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}.$$

یہ غور کرنے کی بات ہے کہ یہاں تکاملیہ $f(x)$ کی کسی قوت (power) اور تفرقی سر $f'(x)$ کا حاصل ضرب ہے۔ اس کا تکملہ تفاعل کی قوت میں ایک کا اضافہ کرکے حاصل شدہ کو بڑھی ہوئی قوت سے تقسیم کرنے پر ملتا ہے۔

$n=-1$ والی صورت § 2·31 جیسی ہی ہے۔

مثال۔ تکملہ

$$\int \sin^4 x\cos x\,dx$$

حاصل کرنے کے لیے ہم $f(x)=\sin x$ لیتے ہیں اور یہ دیکھتے ہیں کہ یہ تکملہ

$$\int [f(x)]^4 f'(x)\,dx$$

جیسی صورت کا ہے۔

مشقیں

1۔ ذیل کا تکمل کیجیے:۔

(i) $\sqrt{\sin x}\cos x$,
(ii) $\tan^4 x \sec^2 x$,
(iii) $\operatorname{cosec}^2 x \sqrt{\cot x}$,
(iv) $\frac{(\tan^{-1} x)^3}{1+x^2}$,
(v) $\frac{1}{(\tan^{-1} x)^2 (1+x^2)}$,
(vi) $\frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{(1-x^2)}}$,
(vii) $\frac{1}{\sqrt{(\sin^{-1} x)}\sqrt{(1-x^2)}}$,
(viii) $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$,
(ix) $\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+1)}}$,
(x) $x\sqrt{(x^2+1)}$,
(xi) $e^x\sqrt{(1+e^x)}$,
(xii) $\sin^3 x \cos x$,
(xiii) $\frac{2x+3}{\sqrt{(x^2+3x-4)}}$,
(xiv) $\frac{(x+1)(x+\log x)^1}{2x}$,
(xv) $\frac{1}{x(1+\log x)^3}$,
(xvi) $\frac{\log x}{x}$,
(xvii) $\sqrt{(2+\sec^2 x)} \sec^2 x \tan x$,
(xviii) $(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})$,
(xix) $\sec x \log(\sec x+\tan x)$.

جوابات

1. (i) $\frac{2}{3}(\sin x)^{3/2}$ (ii) $\frac{1}{5}\tan^5 x$ (iii) $-\frac{2}{3}\cot^{2/3} x$.
(iv) $\frac{1}{4}(\tan^{-1} x)^4$ (v) $-1/\tan^{-1} x$ (vi) $\frac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2$
(vii) $2\sqrt{(\sin^{-1} x)}$ (viii) $-\sqrt{(1-x^2)}$ (ix) $\frac{3}{4}(1+x^2)^{2/3}$
(x) $\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}$ (xi) $\frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2}$ (xii) $\frac{1}{4}\sin^4 x$
(xiii) $2\sqrt{(x^2+3x-4)}$ (xiv) $\frac{1}{3}(x+\log x)^3$ (xv) $-\frac{1}{2}(1+\log x)^2$
(xvi) $\frac{1}{2}(\log x)^2$ (xvii) $\frac{1}{3}(2+\sec^2 x)^{3/2}$ (xviii) $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})^2$
(xix) $\frac{1}{2}[\log(\sec x+\tan x)]^2$

$$\int f'(ax+b)\,dx = \frac{f(ax+b)}{a} \qquad -2\cdot33$$

اگر ہم $ax+b = t$ رکھیں تو

$$a\,dx = dt \Rightarrow dx \Rightarrow dt/a.$$

اس لیے

$$\int f'(ax+b)\,dx = \int f'(t)\,.\frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\int f'(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{a}.f(t) = \frac{1}{a}f(ax+b)$$

لہٰذا $ax+b$ کے کسی بھی تفاعل $f(ax+b)$ کا تکملہ x کے اُس تفاعل کے تکملے میں x کی جگہ $ax+b$ لکھ کر اور پھر حاصل شدہ $f(ax+b)$ کو a سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔ جہاں کہ 'a' x کا ضربیہ (coefficient) ہے۔

مثالیں

1.-(i) $\cos x$ کا تکملہ $\sin x$ ہوتا ہے اس لیے $\cos(ax+b)$ کا تکملہ $[\sin(ax+b)]/a$ ہوتا ہے۔

(ii) x^3 کا تکملہ $x^4/4$ ہوتا ہے، اس لیے $(2x+3)^3$ کا تکملہ $\frac{(2x+3)^4}{4\cdot 2}$ یعنی $\frac{(2x+3)^4}{8}$ ہوتا ہے۔

2.- ذیل کا تکمل کیجیے:-

$(i)\cos^2 x$, $(ii)\cos^3 x$, $(iii)\cos x\cos 2x$.

(i) ہم جانتے ہیں کہ

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\therefore \quad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\therefore \quad \int\cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\int 1\,dx + \int\cos 2x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(x \quad \frac{\sin 2x}{2} \right) \quad = \tfrac{1}{2}(x \quad \sin x \cos x)$$

(ii) ہم جانتے ہیں کہ

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$
$$\cos^3 x = \tfrac{1}{4}(3\cos x + \cos^3 x)$$
$$\int \cos^3 x\, dx = \tfrac{1}{4}\left[\int 3\cos x\, dx - \int \cos 3x\, dx\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[3 \sin x + \frac{\sin 3x}{3}\right]$$
$$= \frac{9 \sin x + \sin 3x}{12}$$

(iii) ہم جانتے ہیں کہ

$$\cos x \cos 2x = \tfrac{1}{2}[\cos 3x + \cos x]$$
$$\cdot \int \cos x \cos 2x\, dx = \tfrac{1}{2}\left[\int \cos 3x\, dx + \int \cos x\, dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 3x}{3} + \sin x\right]$$
$$= \frac{\sin 3x + 3\sin x}{6}$$

3 ۔ $\frac{1}{a \sin x + b \cos x}$ کا تکمل کیجیے۔

ہم دو نمبر r اور α ایسے معلوم کرتے ہیں کہ

$$a = r\cos\alpha, \; b = r\sin\alpha$$

اِن کے مربعوں (squares) کو جوڑنے پر ہم پاتے ہیں

$$r = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

اور ایک کو دوسرے سے تقسیم کرنے پر ملتا ہے

$$\alpha = \tan^{-1}(b/a) \quad \text{یا} \quad \tan\alpha = b/a$$

اِس لیے

$$a \sin x + b \cos x = r(\sin x \cos\alpha + \cos x \sin\alpha)$$
$$= r\sin(x + \alpha),$$

$$\therefore \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{r}\int \frac{dx}{\sin (x+\alpha)} = \frac{1}{r}\int \operatorname{cosec}(x+\alpha)dx$$
$$= \frac{1}{r} \log \tan \frac{x+\alpha}{2},$$

جہاں کہ $r = \sqrt{(a^2+b^2)}$ اور $\alpha = \tan^{-1}(b/a)$.

مشقیں

1. ذیل کا تکمل کیجیے:-

(i) $\cos^2 x$, (ii) $\cos^3 x$, (iii) $\sin 4x \cos 2x$,
(iv) $\sin 5x \sin 3x$, (v) $\cos x \cos 2x \cos 3x$.

2. ذیل کا تکمل کیجیے:-

(i) $\sin^4 x$, (ii) $\cos^4 x$.

3. ذیل کا تکمل کیجیے:-

(i) $1/(ax+b)$, (ii) $\sec^2 (2x+3)$, (iii) $\cot (4x+5)$,
(iv) $\cos \frac{x}{2}$, (v) $\sec^2 \frac{x}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2}$, (vi) $\frac{1}{1+\cos x}$.
(vii) $\sqrt{(1-\cos x)}$, (viii) $\sqrt{(1+\sin x)}$, (ix) $\sqrt{(1+\cos x)}$,
(x) $\sqrt{(1-\sin x)}$, (xi) $\sec (ax+b)$, (xii) $\operatorname{cosec} (ax+b)$.
(xiii) $\frac{1}{3 \sin x + 4 \cos x}$, (xiv) $\frac{1}{5 \cos x - 12 \sin x}$

جوابات

1. (i) $\frac{1}{2}(x+\sin x \cos x)$ (ii) $1/12\,(6\cos x + 3\cos 2x)$
(iii) $(-1/12)(\cos 6x + 3 \cos 2x)$ (iv) $(1/16)(4 \sin 2x - \sin 8x)$
(v) $(1/48)(12x + 6 \sin 2x + 3 \sin 4x + 2 \sin 6x)$
2. (i) $(1/32)(12x - 8 \sin 2x + \sin 4x)$ (ii) $(1/32)(12x + 8 \sin 2x + \sin 4x)$
3. (i) $\frac{\log (ax+b)}{a}$. (ii) $\frac{1}{2} \tan (2x+3)$.
(iii) $\frac{1}{4} \log \sin (4x+5)$ (iv) $2 \sin x/2$)

(*v*) $-\cot x$ (*vi*) $\tan \frac{1}{2} x$

(*vii*) $-2\sqrt{2} \cos x/2$ (*viii*) $2 (\sin x/_2 - \cos \frac{x}{2})$

(*ix*) $2\sqrt{2} \sin x/_2$ (*x*) $2 (\sin \frac{1}{2} x + \cos \frac{1}{2} x)$

(*xi*) $(1/a) \log \tan [\frac{1}{2} (ax+b)+\frac{1}{4}\pi]$ (*xii*) $(1/a) \log \tan \frac{ax+b}{2}$

(*xiii*) $(1/5) \log \tan [\frac{1}{2} (x+\tan^{-1} 4/3)]$

(*xiv*) $\frac{1}{13} \log \tan [\frac{1}{2} (x+\tan^{-1} 12/5) + \frac{1}{4}\pi]$

2·4. - چھ اہم تکملے

اب ہم ذیل کے تکملے حاصل کریں گے:-

(*i*) $\frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, (*ii*) $\frac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$, (*iii*) $\frac{1}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$,

(*iv*) $\sqrt{(a^2-x^2)}$, (*v*) $\sqrt{(a^2+x^2)}$ (*vi*) $\sqrt{(x^2-a^2)}$.

(*i*) تکملہ

$$\int \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}}\, dx.$$

حاصل کرنے کے لیے ہم رکھتے ہیں۔

$$x = a \sin \theta \Rightarrow dx = a \cos \theta \, d\theta.$$

ساتھ ہی

$$a^2-x^2 = a^2 (1-\sin^2 \theta) = a^2 \cos^2 \theta.$$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}}\, dx = \int \frac{1}{a \cos \theta} \cdot a \cos \theta \, d\theta$$

$$= \int 1 \, d\theta = \theta = \sin^{-1} \frac{x}{a}.$$

(*ii*) تکملہ

$$\int \frac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)}}\, dx$$

حاصل کرنے کے لیے ہم رکھتے ہیں۔

$$x = a \sinh \theta \Rightarrow dx = a \cosh \theta \, d\theta.$$

ساتھ ہی

$$a^2+x^2 = a^2(1+\sinh^2 \theta) = a^2 \cosh^2 \theta.$$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)}}\,dx = \int \frac{1}{a\cosh\theta} \cdot a\cosh\theta\, d\theta$$

$$= \int d\theta = \theta = \sinh^{-1}\frac{x}{a}$$

$$= \log\frac{x+\sqrt{(x^2+a^2)}}{a}.$$

تکملہ (iii)

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x^2-a^2)}}\,dx.$$

حاصل کرنے کے لیے ہم رکھتے ہیں

$$x = a\cosh\theta \Rightarrow dx = a\sinh\theta\, d\theta.$$

ساتھ ہی

$$x^2-a^2 = a^2(\cosh^2\theta-1) = a^2\sinh^2\theta.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x^2-a^2)}}\,dx = \int \frac{1}{a\sinh\theta} \cdot a\sinh\theta\, d\theta$$

$$= \int d\theta = \theta = \cosh^{-1}\frac{x}{a}$$

$$= \log\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$$

تکملہ (iv)

$$\int \sqrt{(a^2-x^2)}dx.$$

حاصل کرنے کے لیے ہم رکھتے ہیں، $x = a\sin\theta$ اور اس طرح ہم پاتے ہیں ۔

$$\int \sqrt{(a^2-x^2)}dx = a^2\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sin 2\theta}{2}+\theta\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\sin\theta\cos\theta+\theta\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\sin\theta\sqrt{(1-\sin^2\theta)}+\theta\right]$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{x}{a}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]$$

$$= \frac{x\sqrt{(a^2-x^2)}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}.$$

تکملہ (v)

$$\int\sqrt{(a^2+x^2)}\,dx.$$

حاصل کرنے کے لیے ہم رکھتے ہیں

$$x = a\sinh\theta \Rightarrow dx = a\cosh\theta\,d\theta.$$

اس لیے

$$\int\sqrt{(a^2+x^2)}dx = \int a^2\cosh^2\theta\,d\theta$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\begin{cases}\cosh 2\theta = \cosh^2\theta+\sinh^2\theta \\ \quad 1 = \cosh^2\theta-\sinh^2\theta.\end{cases}$$ اور

$$\frac{1+\cosh 2\theta}{2} = \cosh^2\theta$$

$$\int\sqrt{(a^2+x^2)}dx = \frac{a^2}{2}\int(\cosh 2\theta+1)d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sinh 2\theta}{2}+\theta\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\sinh\theta\cosh\theta+\theta\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\sinh\theta\sqrt{(1+\sinh^2\theta)}+\theta\right]$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{x}{2}\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}+\sinh^{-1}\frac{x}{a}\right]$$

$$= \frac{x\sqrt{(a^2+x^2)}}{2}+\frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{a}$$

$$= \frac{x\sqrt{(a^2+x^2)}}{2}+\frac{a^2}{2}\log\frac{x+\sqrt{(x^2+a^2)}}{a}$$

(vi) تکملہ

$$\int \sqrt{(x^2-a^2)}dx.$$

حاصل کرنے کے لیے ہم رکھتے ہیں

$$x = a\cosh\theta \Rightarrow dx = a\sinh\theta\, d\theta$$

اس لیے،

$$\int \sqrt{(x^2-a^2)}dx = \int a^2 \sinh^2\theta\, d\theta.$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\begin{cases}\cosh 2\theta = \cosh^2\theta+\sinh^2\theta\\ \quad 1 = \cosh^2\theta-\sinh^2\theta.\end{cases}$$

اور

$$\Rightarrow \quad \frac{\cosh 2\theta-1}{2} = \sinh^2\theta.$$

$$\therefore \quad \int \sqrt{(x^2-a^2)}dx = \frac{a^2}{2}\int(\cosh 2\theta-1)\,d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\sinh 2\theta}{2}-\theta\right]$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\sinh\theta\cosh\theta-\theta\right]$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\sqrt{(\cosh^2\theta-1)}\cosh\theta-\theta\right]$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}\frac{x}{a}-\cosh^{-1}\frac{x}{a}\right]$$

$$= \frac{x\sqrt{(x^2-a^2)}}{2}-\frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{a}$$

$$= \frac{x\sqrt{(x^2-a^2)}}{2}-\frac{a^2}{2}\log\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$$

لہذا ہمیں ذیل چھ نتائج ملے :-

$$\int \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}}dx = \sin^{-1}\frac{x}{a}.$$

$$\int \sqrt{(a^2-x^2)}\,dx = \frac{x\sqrt{(a^2-x^2)}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}}dx = \sinh^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \sqrt{(a^2+x^2)}\, dx = \frac{x\sqrt{(a^2+x^2)}}{2} + \frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x^2-a^2)}}\, dx = \cosh^{-1}\frac{x}{a}\,.$$

$$\int \sqrt{(x^2-a^2)}\, dx = \frac{x\sqrt{(x^2-a^2)}}{2} - \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{a}$$

آخری نتیجے میں علامت منفی خاص طور پر قابلِ غور ہے۔

مثالیں

1۔ ذیل کا تکمل کیجیے :-

$(i)\ \frac{1}{\sqrt{[a^2-(bx+c)^2]}},\quad (ii)\ \frac{1}{\sqrt{[a^2+(bx+c)^2]}},\quad (iii)\ \frac{1}{\sqrt{[(bx+c)^2-a^2]}}$

ہم پاتے ہیں (دیکھیے § 2·23)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{[a^2-(bx+c)^2]}} = \frac{1}{b}\sin^{-1}\frac{bx+c}{a}.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{[a^2+(bx+c)^2]}} = \frac{1}{b}\sinh^{-1}\frac{bx+c}{a}\,.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{[(bx+c)^2-a^2]}} = \frac{1}{b}\cosh^{-1}\frac{bx+c}{a}\,.$$

2۔ تکمل کیجیے :-

$(i)\ \frac{1}{\sqrt{(2x^2+3x+4)}},\quad (ii)\ \frac{1}{\sqrt{(3x^2+4x+1)}}\quad (iii)\ \frac{1}{\sqrt{(-2x^2+3x+4)}}$

(i) ہم پاتے ہیں

$$2x^2+3x+4 = 2[x^2+\tfrac{3}{2}x+2]$$
$$= 2[(x+\tfrac{3}{4})^2+\tfrac{23}{16}]$$
$$= 2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{23}}{4}\right)^2\right].$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{(2x^2+3x+4)}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{23}}{4}\right)^2\right]}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh^{-1} \frac{x+\frac{3}{4}}{\sqrt{23}/4}.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh^{-1} \frac{4x+3}{\sqrt{23}}.$$

(ii) ہم پاتے ہیں

$$3x^2+4x+1 = 3[x^2+\tfrac{4}{3}x+\tfrac{1}{3}] = 3[(x+\tfrac{2}{3})^2-(\tfrac{1}{3})^2]$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{(3x^2+4x+1)}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{[(x+\frac{2}{3})^2-(\frac{1}{3})^2]}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cosh^{-1} \frac{x+\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cosh^{-1} (3x+2).$$

(iii) ہم پاتے ہیں

$$-2x^2+3x+4 = -2[x^2-\tfrac{3}{2}x-2]$$

$$= -2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{41}}{4}\right)^2\right]$$

$$= 2\left[\left(\frac{\sqrt{41}}{4}\right)^2-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\right],$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{(-2x^2+3x+4)}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left[\left(\frac{\sqrt{41}}{4}\right)^2-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\right]}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1} \frac{x-\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{41}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1} \frac{4x-3}{\sqrt{41}}$$

مشقیں

1 تکمل کیجیے :-

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+2x+2)}}$, (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+4x+2)}}$, (iii) $\dfrac{2}{\sqrt{(x^2+x+1)}}$

2۔ تکمل کیجیے :۔

(i) $\sqrt{(1-x^2)}$. (ii) $\sqrt{(1+x^2)}$, (iii) $\sqrt{(x^2-1)}$.

3۔ تکمل کیجیے :۔

(i) $\sqrt{(2x^2+3x+4)}$, (ii) $\sqrt{(3x^2+4x+1)}$,

(iii) $\sqrt{(-2x^2+3x+4)}$

4۔ تکمل کیجیے :۔

(i) $\dfrac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)}}$, (ii) $\dfrac{2x^2}{\sqrt{(x^2-1)}}$, (iii) $\dfrac{2x+3}{\sqrt{(x^2+1)}}$,

(iv) $(x+2)\sqrt{(x^2+1)}$, (v) $(2x+4)\sqrt{(2x^2+3x+1)}$,

(vi) $\dfrac{2x+5}{\sqrt{(x^2-2x+2)}}$.

5۔ تکمل کیجیے :۔

(i) $\dfrac{x^2}{\sqrt{(x^6+2x^3+2)}}$, (ii) $\dfrac{x^3}{\sqrt{(x^8+1)}}$,

(iii) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{(2\sin^2 x+3\sin x+4)}}$.

جوابات

1. (i) $\sinh^{-1}(x+1)$. (ii) $\cosh^{-1}[(x+2)/\sqrt{2}]$.
   (iii) $\sinh^{-1}[(2x+1)/\sqrt{3}]$
2. (i) $\frac{1}{2}x\sqrt{(1-x^2)}+\frac{1}{2}\sin^{-1}x$ (ii) $\frac{1}{2}x\sqrt{(x^2+1)}+\frac{1}{2}\sinh^{-1}x$
   (iii) $\frac{1}{2}x\sqrt{(x^2-1)}-\frac{1}{2}\cosh^{-1}x$
3. (i) $\frac{1}{8}(4x+3)\sqrt{(2x^2+3x+4)}+\frac{23}{32}\sqrt{2}\sinh^{-1}[(4x+3)/\sqrt{23}]$
   (ii) $\frac{1}{6}(3x+2)\sqrt{(3x^2+4x+1)}-1/18\sqrt{3}\cosh^{-1}(3x+2)$
   (iii) $\frac{1}{8}(4x-3)\sqrt{(-2x^2+3x+4)}+41/32\sqrt{2}\sin^{-1}[(4x-3)/\sqrt{41}]$
4. (i) $\frac{1}{2}x\sqrt{(x^2+1)}-\frac{1}{2}\sinh^{-1}x$ (ii) $x\sqrt{(x^2-1)}+\cosh^{-1}x$
   (iii) $2\sqrt{(x^2+1)}+3\sinh^{-1}x$ (iv) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)}(x^2+3x+1)+\sinh^{-1}x$
   (v) $\frac{1}{48}\sqrt{(2x^2+3x+1)}(32x^2+108x+61)-\dfrac{5\sqrt{2}}{64}\cosh^{-1}(4x+3)$
   (vi) $2\sqrt{(x^2-2x+2)}+7\sinh^{-1}(x-1)$
5. (i) $\frac{1}{3}\sinh^{-1}(x^3+1)$ (ii) $\frac{1}{4}\sinh^{-1}x^4$
   (iii) $(1/\sqrt{2})\sinh^{-1}\dfrac{4\sin x+3}{\sqrt{23}}$

2.5۔ حصّہ سے تکمل

اگر u اور v ، x کے دو تفاعل ہوں، تو ہم پاتے ہیں

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

دونوں جانب تکمل کرنے پر ملتا ہے

$$uv = \int u\frac{dv}{dx}dx + \int v\frac{du}{dx}dx$$

$$(i) \ldots\ldots \Rightarrow \int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}dx.$$

مان لیجیے $u = f(x)$ اور $\frac{dv}{dx} = \phi(x).$

اِس لیے $\frac{du}{dx} = f'(x)$ اور $v = \int \phi(x)\,dx.$

اب (1) کو یوں لکھ سکتے ہیں

$$\int f(x)\,\phi(x)\,dx = f(x)\int \phi(x)\,dx - \int [\int \phi(x)\,dx].f'(x)\,dx.$$

الفاظ میں اِس فارمولے کو یوں لکھ سکتے ہیں :۔

دو تفاعلوں کے حاصل ضرب کا مسئلہ

=(پہلا تفاعل × دوسرے کا تکملہ)-(پہلے تفاعل کا تفرقی سر × دوسرے کا تکملہ)

مثالیں

1 تکملہ

$$\int xe^x\,dx.$$

حاصل کیجیے

مان لیجیے

$$x = f(x),\ e^x = \phi(x).$$

$$\therefore \quad \int xe^x\,dx = x\,.\,e^x - \int e^x\,.\,1\,dx = xe^x - e^x$$

نوٹ: اگر ہم

$f(x) = e^x,\ \phi(x) = x$ لیتے تو

$$\int x\,e^x\,dx = \tfrac{1}{2}\,x^2\,e^x - \tfrac{1}{2}\int x^2\,e^x\,dx,$$

اس طرح دیا ہوا تکملہ $\int x\,e^x dx$ نسبتاً زیادہ مشکل تکملہ $\int x^2\,e^x\,dx$ کی ارقام میں (interms of) تبدیل ہوجاتا ہے، زیادہ مشکل اس لیے کہ x کی قوت بڑھ گئی ہے۔

لہذا فیکٹروں (factors) کو صحیح ترتیب سے چُننا ضروری ہے۔

2۔ تکملہ

$$\int x^2 \sin x\,dx.$$

حاصل کیجیے

$f(x) = x^2$ اور $\phi(x) = \sin x.$ لینے پر ہم پاتے ہیں

$$\int x^2 \sin x\,dx = x^2(-\cos x) - \int(-\cos x)\,2x\,dx.$$

$$(i)\quad \cdots\cdots\cdots = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$$

اب تکملہ $\int x\cos x\,dx$ حاصل کرنے کے لیے ہمیں حصہ سے تکمل کا فارمولا پھر استعمال کرنا ہے۔ ہم پاتے ہیں

$$\int x\cos x\,dx = x\,.\,\sin x - \int \sin x\,.\,1\,dx$$

$$(2)\quad \cdots\cdots\cdots = x\sin x + \cos x.$$

(1) اور (2) سے ہم پاتے ہیں

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x).$$

اسس طرح ہم نے دیکھا کہ حصّہ سے تکمل کا فارمولا کئی بار لگانے کی ضرورت ہوسکتی ہے۔

3- تکملہ $\int \sin^{-1} x\, dx$ حاصل کیجیے

یہاں ہم 1 کو ایک فیکٹر لے لیتے ہیں۔ ہم پاتے ہیں

$$\int \sin^{-1} x\, dx = \int \sin^{-1} x \,.\, 1\, dx$$
$$= (\sin^{-1} x)\, x - \int \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}\, dx$$

اب

$$\int \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}\, dx = \int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$
$$= -\tfrac{1}{2} \int (-2x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx \quad (\S\ 2{\cdot}32$$
$$= -\tfrac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{(1-x^2)}.$$

$$\therefore \quad \int \sin^{-1} x\, dx = x \sin^{-1} x - \sqrt{(1-x^2)}$$

مشقیں

ذیل تفاعلوں کا تکمل کیجیے :-

1. (*i*) $x\, e^x$ (*ii*) $x^2 e^x$, (*iii*) $x^3 e^x$, (*iv*) $x \sinh x$.
2. (*i*) $\log x$, (*ii*) $x \log x$, (*iii*) $x^2 \log x$, (*iv*) $x^n \log x$.

3. (*i*) $x(\log x)^2$, (*ii*) $(x \log x)^2$ (*iii*) $\sqrt{x}\,(\log x)^2$.

4. (*i*) $\tan^{-1} x$, (*ii*) $x \tan^{-1} x$, (*iii*) $\cot^{-1} x$.
(*iv*) $x \cot^{-1} x$, (*v*) $x^3 \tan^{-1} x$.

5. (*i*) $\cos^{-1} x$, (*ii*) $x \sin^{-1} x$, (*iii*) $\sec^{-1} x$, (*iv*) $x \sec^{-1} x$.

6. (*i*) $x \cos x$, (*ii*) $x^2 \cos x$, (*iii*) $x^3 \cos x$, (*iv*) $x^2 \sin^2 x$,
(*v*) $x^2 \sin x \cos x$, (*vi*) $x \cos x \cos 2x$,
(*vii*) $x \sin x \sec^3 x$, (*viii*) $x \cos^3 x \sin x$.

7. (*i*) $\dfrac{x}{\sin^2 x}$, (*ii*) $\dfrac{x}{\cos^2 x}$, (*iii*) $x \log(1+x)$.

جوابات

1. (*i*) (*i*) $(x-1)e^x$. (*ii*) $(x^2-2x+2)e^x$.
(*iii*) $(x^3-3x^2+6x-6)e^x$. (*iv*) $x \cosh x - \sinh x$.

2. (*i*) $x \log(x/e)$. (*ii*) $\frac{1}{2} x^2 \log(x^2/e)$.
(*iii*) $\frac{1}{3} x^3 \log(x^3/e)$. (*iv*) $[x^{n+1}/(n+1)^2] \log(x^{n+1}/e)$.

3. (*i*) $\frac{x^2}{4}[2(\log x)^2 - 2\log x + 1]$.
(*ii*) $\frac{1}{128} x^4 [32(\log x)^3 - 24(\log x)^2 + 12\log x - 3]$.
(*iii*) $\frac{1}{27}[18(\log x)^2 - 24\log x + 16]x^{3/2}$.

4. (*i*) $x \tan^{-1} x - \log\sqrt{(x^2+1)}$. (*ii*) $\frac{1}{2}(x^2+1)\tan^{-1} x - \frac{1}{2}x$.
(*iii*) $x \cot^{-1} x + \log\sqrt{(x^2+1)}$, (*iv*) $\frac{1}{2}(x^2+1)\cot^{-1} x + \frac{x}{2}$.
(*v*) $\frac{1}{4}(x^4-1)\tan^{-1} x - 1/12(x^3-3x)$.

5. (*i*) $x \cos^{-1} x + \sqrt{(1-x^2)}$. (*ii*) $\frac{1}{4}(2x^2-1)\sin^{-1} x + \frac{1}{4}x\sqrt{(1-x^2)}$.
(*iii*) $x \sec^{-1} x - \cosh^{-1} x$. (*iv*) $\frac{1}{2}[x^2 \sec^{-1} x - \sqrt{(x^2-1)}]$.

6. (*i*) $x \sin x + \cos x$. (*ii*) $(x^2-2)\sin x + 2x \cos x$.
(*iii*) $(x^3-6x)\sin x + 3(x^2-2)\cos x$.
(*iv*) $\frac{x^3}{6} + \frac{1}{8}(1-2x^2)\sin 2x - \frac{1}{4}x \cos 2x$.
(*v*) $\frac{1}{8}(1-2x^2)\cos 2x + \frac{1}{4}x \sin 2x$.
(*vi*) $\frac{1}{36}(3x \sin 3x + \cos 3x + \frac{1}{2}x \sin x + \cos x)$.
(*vii*) $\frac{1}{2}(x \sec^2 x - \tan x)$.
(*viii*) $\frac{-x}{4} \cos^4 x + \frac{1}{128}(12x + 8\sin 2x + \sin 4x)$.

7. (*i*) $-x \cot x + \log \sin x$. (*ii*) $x \tan x - \log \sec x$.
(*iii*) $\frac{1}{2}(x^2-1)\log(1+x) - \frac{1}{4}(x^2-2x)$.

2·51 تکملہ

$\int e^x [f(x)+f'(x)]\, dx$. کی قیمت حاصل کرنا

حصے سے تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int e^x f(x)dx = e^x f(x) - \int e^x f'(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \qquad \int e^x[f(x)+f'(x)]\, dx = e^x f(x).$$

تکملہ کی یہ شکل خاصی اہم ہے۔

مثالیں

1۔ ذیل تکملے حاصل کیجیے

$$(i)\ \int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\, dx, \qquad (ii)\ \int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\, dx.$$

(i) ہم پاتے ہیں

$$(i) \qquad \int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\, dx = \int \frac{x+1-1}{(x+1)^2} e^x\, dx,$$

$$= \int \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right] e^x\, dx$$

اب $f(x) = \frac{1}{x+1}$ لینے پر $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$ اور ہم دیکھتے ہیں کہ تکاملیہ کی شکل

$$e^x[f(x)+f'(x)]$$

طرح کی ہے اور اسی لیے اس کا تکملہ

$$= e^x f(x) = \frac{e^x}{x+1}$$

لیکن ہم اسے دوسرے طریقے سے یوں حاصل کر سکتے ہیں

تکملہ $\int \frac{1}{x+1} e^x\, dx$ کا حصے سے تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int \frac{1}{x+1} \cdot e^x\, dx = \frac{1}{x+1} \cdot e^x - \int -\frac{1}{(x+1)^2} e^x\, dx.$$

$$\Rightarrow \qquad \int\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right]e^x\,dx=\frac{1}{x+1}\,e^x.$$

(ii) اب

$$e^x\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)=e^x\left\{\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right\}$$

$$=e^x\left\{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}+(\tan\frac{x}{2}\right\}$$

لہذا $f(x)=\tan\frac{x}{2}$ لینے پر ہم دیکھتے ہیں کہ تکاملیہ کی شکل $e^x\,[f(x)+f'(x)]$. کی طرح کی ہے۔

اب $e^x\tan\frac{x}{2}$ کا حصہ سے تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int e^x\tan\frac{x}{2}\,dx=e^x\tan\frac{x}{2}-\int\cdots\frac{1}{2}\,\sec^2 x\,dx$$

$$\int e^x\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\right)dx=e^x\tan\frac{x}{2}$$

مشقیں

1 ذیل تفاعلوں کا تکمل کیجیے:-

(i) $\frac{1+x}{(2+x)^2}\,e^x,$ (ii) $\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,e^x,$

(iii) $\frac{1+x\log x}{x}\,e^x,$ (iv) $\frac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}\,e^x,$

(v) $\frac{2-\sin 2x}{1-\cos 2x}\,e^x,$ (vi) $\frac{1+\sin 2x}{1+\cos 2x}\,e^{2x},$

(vii) $\frac{\sqrt{(1-\sin x)}}{1+\cos x}\,e^{-\frac{1}{2}x},$ (viii) $\frac{(x^2+1)}{(x+1)^2}\,e^x,$

(ix) $e^x\,(\tan x-\log\cos x).$

جوابات

1. (i) $e^x/(2+x)$. (ii) $e^x \tan \frac{x}{2}$. (iii) $e^x \log x$.
(iv) $e^x \tan x$. (v) $-e^x \cot x$. (vi) $\frac{1}{2}e^{2x} \tan x$.
(vii) $e^{-2x} \sec x/2$ (viii) $(x-1)\, e^x/(x+1)$. (ix) $e^x \log \sec x$.

2·52 - (i) $e^{ax}\cos(bx+c)$ اور (ii) $e^{ax}\sin(bx+c)$. کے تکملے

حصے سے تکمل کا اصول لگانے پر ہم پاتے ہیں

$$\int e^{ax}\cos(bx+c)\, ax$$
$$= \frac{e^{ax}}{a}\cos(bx+c) - \int -\frac{e^{ax}}{a}\, b \sin(bx+c)\, dx$$
$$(i) \quad \ldots\ldots = \frac{e^{ax}}{a}\cos(bx+c) + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin(bx+c)\, dx.$$

اسی طرح ہم پاتے ہیں

$$\int e^{ax}\sin(bx+c)\, dx$$
$$= \frac{e^{ax}}{a}\sin(bx+c) - \int \frac{e^{ax}}{a}.\, b\cos(bx+c)\, dx$$
$$(ii) \quad \ldots\ldots = \frac{e^{ax}}{a}\sin(bx+c) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx+c)\, dx.$$

اگر $\int e^{ax}\cos(bx+c)dx$

حاصل کرنا ہو تو (i) کے سب سے داہنی طرف کے رُکن term کی جگہ پر (ii) کی داہنی جانب رکھتے ہیں اور اگر

$\int e^{ax}\sin(bx+c)\, dx$

حاصل کرنا ہو تو (ii) کے سب سے داہنی طرف کے رُکن کی جگہ پر (i) کی داہنی جانب رکھتے ہیں۔

پہلی صورت میں ہم پاتے ہیں

$$\int e^{ax}\cos(bx+c)\,dx$$

$$= \frac{e^{ax}}{a}\cos(bx+c) + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin(bx+c) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos(bx+c)dx$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\int e^{ax}\cos(bx+c)\,dx$$

$$= e^{ax}\frac{a\cos(bx+c)+b\sin(bx+c)}{a^2},$$

$$\Rightarrow \int e^{ax}\cos(bx+c)\,dx = e^{ax}\frac{a\cos(bx+c)+b\sin(bx+c)}{a^2+b^2}$$

اسی طرح ہم پاتے ہیں

$$\int e^{ax}\sin(bx+c)\,dx = e^{ax}\frac{a\sin(bx+c)-b\cos(bx+c)}{a^2+b^2}$$

ان نتایج کو ایک دوسری صورت میں رکھنے کے لیے ہم دو نمبر r اور α ایسے معلوم کرتے ہیں کہ

$$a = r\cos\alpha \text{ اور } b = r\sin\alpha.$$

اس سے ملتا ہے

$$r = \sqrt{(a^2+b^2)},\ \alpha = \tan^{-1}(b/a).$$

$$\therefore \quad \int e^{ax}\cos(bx+c)\,dx = e^{ax}\frac{r\cos(bx+c-\alpha)}{a^2+b^2}$$

$$= e^{ax}\frac{\cos\left(bx+c-\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

اسی طرح

$$\int e^{ax}\sin(bx+c)\,dx = e^{ax}\frac{\sin\left(bx+c-\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

مثالیں

1۔ حاصل کیجیے:-

(i) $\int e^{3x} \sin 4x\, dx$, (ii) $\int e^{4x} \cos 2x \cos 4x\, dx$.
(iii) $\int xe^{2x} \cos x\, dx$.

(i) اوپر 2·52 § میں ثابت کیے گئے فارمولے سے ہم پاتے ہیں

$$\int e^{3x} \sin 4x\, dx = \frac{e^{3x}}{\sqrt{(3^2+4^2)}} \sin\left(4x - \tan^{-1}\frac{4}{3}\right)$$
$$= \frac{e^{3x}}{5} \sin\left(4x - \tan^{-1}\frac{4}{3}\right)$$

(ii) اب

$$\cos 2x \cos 4x = \tfrac{1}{2}[2 \cos 2x \cos 4x]$$
$$= \tfrac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)$$

$$\therefore \int e^{4x} \cos 2x \cos 4x\, dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\int e^{4x} \cos 6x\, dx + \tfrac{1}{2}\int e^{4x} \cos 2x\, dx$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{4x}}{\sqrt{(4^2+6^2)}} \cos\left(6x - \tan^{-1}\frac{6}{4}\right)$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{e^{4x}}{\sqrt{(4^2+2^2)}} \cos\left(2x - \tan^{-1}\frac{2}{4}\right)$$
$$= \frac{e^{4x}}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{52}} \cos\left(6x - \tan^{-1}\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{20}} \cos\left(2x - \tan^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$$

(iii) تکملہ

$$\int x e^{2x} \cos x\, ax$$

حاصل کرنے کے لیے ہم حصے سے تکمل کا اصول استعمال کرتے ہیں۔ x اور $e^{2x} \cos x$ کو فیکٹر لینے پر ہم پاتے ہیں

$$\int xe^{2x} \cos x\, dx = x.\frac{e^{2x}}{\sqrt{5}} \cos\left(x - \tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$$
$$-\int 1.\frac{e^{2x}}{\sqrt{5}} \cos\left(x - \tan^{-1}\frac{1}{2}\right) dx.$$

پھر

$$\int e^{2x}\cos\left(x-\tan^{-1}\tfrac{1}{2}\right)dx=\frac{e^{2x}}{\sqrt{5}}\cos\left(x-2\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\quad \int xe^{2x}\cos x\,dx=e^{2x}\left[\frac{x}{\sqrt{5}}\cos\left(x-\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{5}\cos\left(x-2\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$$

مشقیں

1 - ذیل تکملے حاصل کیجیے :-

(i) $\int e^{4x}\cos 5x\,dx$, (ii) $\int e^x\cos^2 x\,dx$.

(iii) $\int e^{2x}\cos^3 x\,dx$, (iv) $\int e^x\sin x\sin 2x\sin 3x\,dx$,

(v) $\int x^2e^x\sin x\,dx$, (vi) $\int\sinh 2x\sin 2x\,dx$.

2 - تکمل کیجیے :-

(i) $\cos(\log x)$, (ii) $x\sin(2\log x)$, (iii) $x^3\sin(a\log x)$.

جوابات

1. (i) $\frac{e^{4x}}{\sqrt{41}}\cos\left(5x-\tan^{-1}\frac{5}{4}\right)$.

(ii) $\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{10}\sqrt{5}\,e^x\cos\left(2x-\tan^{-1}2\right)$.

(iii) $\frac{1}{4}\cdot e^{2x}\left[\frac{3}{\sqrt{5}}\cos\left(x-\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{13}}\cos\left(3x-\tan^{-1}\frac{3}{2}\right)\right]$.

(iv) $\frac{1}{4}e^x\left[\sqrt{\frac{1}{5}}\sin\left(2x-\tan^{-1}2\right)-\sqrt{\frac{1}{37}}\sin\left(6x-\tan^{-1}6\right)+\sqrt{\frac{1}{17}}\sin\left(4x-\tan^{-1}4\right)\right]$.

(v) $\sqrt{\frac{1}{2}}e^x\left[x^2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)\right]+xe^x\cos x$.

(vi) $\frac{1}{4}\left(\cosh 2x\sin 2x-\sinh 2x\cos 2x\right)$.

2. (i) $\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot x\cos\left[\log x-\frac{\pi}{4}\right]$. (ii) $\sqrt{\frac{1}{8}}\,x^2\sin\left(2\log x-\frac{\pi}{4}\right)$.

(iii) $\frac{x^4}{\sqrt{(16+a^2)}}\sin\left[a\log x-\tan^{-1}\frac{a}{4}\right]$.

2.6۔ کبھی کبھی تکمل کے یہ دونوں طریقے ایک ہی سوال میں لگانے کی ضرورت پڑتی ہے۔ اس عمل کو دو مثالوں سے سمجھائیں گے۔

1۔ حاصل کیجیے :۔

$$\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{(1-x^2)}}\, dx.$$

ہم رکھتے ہیں

$$x = \sin\theta \Rightarrow dx = \cos\theta\, d\theta$$

$$\therefore \quad \int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{(1-x^2)}}\, dx = \int \frac{\sin\theta . \theta}{\cos\theta} \cos\theta\, d\theta = \int \theta \sin\theta\, d\theta.$$

اب $\int \theta \sin\theta\, d\theta$ حاصل کرنے کے لیے ہم حصے سے تکمل کا فارمولا استعمال کرتے ہیں اور ہمیں ملتا ہے

$$\int \theta \sin\theta\, d\theta = (-\theta\cos\theta) - \int -\cos\theta . 1\, d\theta.$$

$$= -\theta\cos\theta + \int \cos\theta\, d\theta = -\theta\cos\theta + \sin\theta.$$

$$\therefore \quad \int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{(1-x^2)}}\, dx = -\theta\cos\theta + \sin\theta$$

$$= -\sqrt{(1-x^2)}\, \sin^{-1} x + x.$$

2- $\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}$ کا تکمل کیجیے :۔

ہم رکھتے ہیں

$$x = \cos\theta \Rightarrow dx = -\sin\theta\, d\theta.$$

ساتھ ہی

$$\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)} = \tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)}$$

$$= \tan^{-1}\sqrt{\left[\frac{2\sin^2(\theta/2)}{2\cos^2(\theta/2)}\right]}$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \int \tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}\,dx = \int \frac{\theta}{2}\,(-\sin\theta)\,d\theta$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int \theta\sin\theta\,d\theta$$

$$= -\tfrac{1}{2}[-\theta\cos\theta+\sin\theta] \quad \text{(اوپر کی مثال کی طرح)}$$

$$= -\tfrac{1}{2}[-x\cos^{-1}x+\sqrt{(1-x^2)}].$$

مشقیں

1۔ ذیل کا تکمل کیجیے :-

1. $x^5\tan^{-1}x^3$
2. $x\tan^{-1}x/(1+x^2)^{3/2}$
3. $x^5\cos x^3.$
4. $\tan^{-1}[2x/(1-x^2)].$
5. $\dfrac{e^{m\tan^{-1}x}}{(1+x^2)^{3/2}}.$
6. $\dfrac{e^{m\tan^{-1}x}}{(1+x^2)^2}.$
7. $\dfrac{xe^{m\sin^{-1}x}}{\sqrt{(1-x^2)}}.$
8. $\dfrac{x^2e^{m\sin^{-1}x}}{\sqrt{(1-x^2)}}.$

جوابات

1. $\frac{1}{6}[(x^6+1)\tan^{-1}x^3-x^3].$
2. $(x-\tan^{-1}x)/\sqrt{(1+x^2)}.$
3. $\frac{1}{3}(x^4-2)\sin x^3+x^3\cos x^3.$
4. $2x\tan^{-1}x-\log(1+x^2).$
5. $\dfrac{e^{m\theta}}{\sqrt{(1+m^2)}}\cos(\theta-\cot^{-1}m),\quad \theta=\tan^{-1}x$ جہاں۔
6. $\dfrac{e^{m\theta}}{2}\left[\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{\sqrt{(1+m^2)}}\cos\left(2\theta-\tan^{-1}\dfrac{2}{m}\right)\right],\ \theta=\tan^{-1}$ جہاں۔
7. $\dfrac{e^{m\theta}}{\sqrt{(1+m^2)}}\sin(\theta-\cot^{-1}m),\quad \theta=\sin^{-1}x.$ جہاں۔
8. $\dfrac{e^{m\theta}}{2}\left[\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{\sqrt{(m^2+4)}}\cos\left(2\theta-\tan^{-1}\dfrac{2}{m}\right)\right],\ \theta=\sin^{-1}x.$ جہاں۔

2.7۔ معیّن تکملے

عوضی اور حصے سے تکمل کے طریقے استعمال کرکے متناہی تکملہ نکالنے کا طریقہ ہم مثالوں سے سمجھائیں گے۔ اس طریقے کی واجبیت صاف ظاہر ہوگی۔

جب کسی معین تکملہ

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

میں متغیر x تبدیل کرتے ہیں تو اُسی حساب حدیں (limits) بھی بدل دیتے ہیں نئی حدیں نئے متغیر کی وہ قیمتیں ہوتی ہیں جو کہ نئے متغیر میں x کی جگہ a اور b رکھنے پر ملتی ہیں۔

مثالیں

1۔ تکملہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx.$$

کی قیمت نکالیے

ہم رکھتے ہیں

$$(1) \; \cdots\cdots\cdots \quad \sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$$

(1) سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$x = 0 \Rightarrow t = 0$ اور $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

لہذا نئے متغیر t کی حدیں صفر اور 1 ہیں۔ ہم پاتے ہیں

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \left|\tan^{-1} t\right|_0^1 = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4}$$

2۔ تکملہ

$$\int_0^1 x^2 e^{2x}\,dx.$$

کی قیمت نکالیے

حصے سے تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int x^2 e^{2x}\,dx = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int \frac{2x}{2}\cdot e^{2x}\,dx = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int x e^{2x}\,dx.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2 e^{2x}\,dx = \left|\frac{x^2 e^{2x}}{2}\right|_0^1 - \int_0^1 x e^{2x}\,dx = \frac{e^2}{2} - \int_0^1 x e^{2x}\,dx.$$

پھر

$$\int x\, e^{2x}\, dx = \frac{x\, e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\, dx$$
$$= \frac{x\, e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}$$
$$\Rightarrow \quad \int_0^1 x\, e^{2x}\, dx = \left|\frac{x\, e^{2x}}{2}\right|_0^1 - \left|\frac{e^{2x}}{4}\right|_0^1$$
$$= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$
$$\therefore \quad \int_0^1 x^2\, e^{2x}\, dx = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2-1}{4}.$$

3۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{\sin^{-1} x\, dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \log 2.$$

ہم رکھتے ہیں

$x = \sin \theta \Rightarrow dx = \cos \theta\, d\theta.$ . . . . (1)

اب (1) سے ہم دیکھتے ہیں کہ $x = 0$ پر $\theta = 0$ اور $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ پر $\theta = \frac{\pi}{4}$
اس لیے دیا ہوا تکملہ

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta \sec^2 \theta\, d\theta.$$

حصے سے تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int \theta \sec^2 \theta\, d\theta = \theta \tan \theta - \int 1. \tan \theta\, d\theta$$
$$= \theta \tan \theta - \log \sec \theta$$
$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta \sec^2 \theta\, d\theta = \left|\theta \tan \theta - \log \sec \theta\right|_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{\pi}{4} \,.\, 1 - \log \sqrt{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2.$$

مشقیں

1 - ذیل تکملوں کی قیمت نکالیے

(i) $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$, (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$, (iii) $\int_0^1 \frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}\,dx$,

(iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos t\,dt$, (v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\,dt$, (vi) $\int_0^1 \frac{\sqrt{(\tan^{-1}x)}}{1+x^2}dx$,

(vii) $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$, (viii) $\int_0^{\pi} x\sin^{-1} x\,dx$,

(ix) $\int_0^1 x\tan^{-1}x\,dx^2$ (x) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(x-x^2)}}$.

2.- ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^1 x(\tan^{-1} x)^2\,dx = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{4}-1\right)+\frac{1}{2}\log 2$$

جوابات

1. (i) log 2. (ii) $\pi/4$. (iii) $\pi^3/192$. (iv) 1/4. (v) 2/3.
(vi) $\pi^{3/2}/12$. (vii) -2. (viii) $\pi/8$. (ix) $(\pi-2)/4$. (x) $\pi/6$.

2.71 - غیر واجب معین تکملے

غیر* واجب معین تکملے نکالتے وقت اکثر ذیل حدوں کی ضرورت ہوتی ہے

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$, (ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^n} = 0$,

(iii) $\lim_{x\to 0} (x^n \log x) = 0$,

* یہ نتایج مصنّف کی کتاب Differential Calculus. کے باب XIII میں ثابت کیے گئے ہیں۔

جہاں n کوئی مثبت کامل عدد ہے۔

مثالیں

1۔ تکملہ

$$\int_0^1 \log x\, dx$$

کی قیمت نکالیے

ہم جانتے ہیں کہ جب $x \to 0$ ہو تو $\log x \to -\infty$ لہذا $x = 0$ پر تکاملیہ لامتناہی ہو جاتا ہے۔

پہلے ہم تکملہ

$$\int_h^1 \log x\, dx$$

کی قیمت نکالتے ہیں۔

$$\int_h^1 \log x\, dx = \int_h^1 1.\log x\, dx$$

$$= \Big| x \log x \Big|_h^1 - \int_h^1 1 . dx$$

$$= \Big| x \log x \Big|_h^1 - \Big| x \Big|_h^1$$

$$= -h \log h - (1-h), \quad (\log 1 = 0 \text{ چونکہ})$$

جب $h \to 0$ تو $h \log h \to 0$ اور اس لیے داہنی جانب $\to -1$:

اس لیے تکملہ

$$\int_0^1 \log x\, dx$$

کا متناہی وجود ہے اور وہ 1- کے برابر ہے۔

2۔ ثابت کیجیے

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2} \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}, (a > 0)$$

ہم لکھتے ہیں

$$I = \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx,\ J = \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx.$$

مان لیجیے کہ x کوئی مثبت کامل عدد ہے۔
حصّہ سے تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$(1)\ldots\ldots \int_0^x e^{-ax} \cos bx\, dx = \left|\frac{e^{-ax} \sin bx}{b}\right|_0^x + \frac{a}{b}\int_0^x e^{-ax} \sin bx\, dx$$

اب

$$\left| e^{-ax} \frac{\sin bx}{b}\right|_0^x = \frac{\sin bx}{be^{ax}} - 0 = \frac{\sin bx}{be^{ax}},$$

جوکہ x کے ∞ کی طرف مائل ہونے پر خود صفر کی طرف مائل ہوتا ہے، کیوں کہ $(1/e^{ax}) \to 0$ اور $\sin bx$ تعدادی حیثیت (numerically) سے ایک سے کم ہے۔
اس طرح، (1) سے ہم پاتے ہیں کہ جب $x \to \infty$ تب

$$(2) \qquad \ldots\ldots\ldots\ I = \frac{a}{b}J.$$

پھر ہم پاتے ہیں

$$(3)\ldots \int_0^x e^{-ax} \sin bx\, dx = \left| -e^{-ax}\frac{\cos bx}{b}\right|_0^x - \frac{a}{b}\int_0^x e^{-ax} \cos bx\, dx$$

اب

$$\left| - e^{-ax} \frac{\cos bx}{b}\right|_0^x = -\frac{\cos bx}{be^{ax}} + \frac{1}{b}$$

جوکہ $x \to \infty$ ہونے پر خود $(1/b)$ کی طرف مائل ہوتا ہے۔
اس لیے (3) سے ہم پاتے ہیں کہ جب $x \to \infty$، تو

$$(4)\ldots\ldots\ldots\ldots\ J = \frac{1}{b} - \frac{a}{b}I.$$

اب (2) اور (4) کو حل کرنے پر

$$I = \frac{a}{a^2+b^2},\ J = \frac{b}{a^2+b^2}$$

مشقیں

ذیل کے غیر واجب تکملوں کی قیمت نکالیے:

(i) $\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{(1-x^2)}}\, dx$, (ii) $\int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx$, (iii) $\int_0^\infty x^3 e^{-x}\, dx$

(iv) $\int_0^1 x \log x\, dx$, (v) $\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2}\, dx$,

(vi) $\int_1^\infty \frac{\log x}{x^3}\, dx$. (vii) $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$,

(viii) $\int_0^a \sqrt{\left(\frac{a-x}{x}\right)}\, dx$, (ix) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$,

(x) $\int_0^\infty e^{-ax} \sin nx\, dx$, $(a > 0)$,

(xi) $\int_0^\infty e^{-2x} \sin x \sin 3x\, dx$, (xii) $\int_{-\infty}^0 e^x \sin x\, dx$.

جوابات

(i) $\pi^2/8$. (ii) 2. (iii) 6. (iv) $-\frac{1}{4}$.

(v) 1. (vi) 1/4. (vii) π. (viii) $a\pi/2$.

(ix) $\pi/2$. (x) $n/(a^2+n^2)$. (xi) 3/40. (xii) $-1/2$.

2·8 - تحویلی فارمولے (Reduction Formulae)

لفظی اعتبار سے کوئی بھی ایسا فارمولا جو کہ کسی تکملے کو ایک آسان تکملے کی ارقام (in terms of) میں بدل دے اُسے پہلے والے تکملے کا تحویلی فارمولا کہتے ہیں۔ لیکن عام طور پر "تحویلی فارمولا" اُسی فارمولے کو کہتے ہیں جس میں تکاملیہ تفاعلوں کی ایک دی ہوئی قسم کا ایک ممبر ہوتا ہے اور جس کی مدد سے اس قسم کے عام ممبر تفاعل کے تکملے کو اُسی قسم کے ایک یا دو تفاعلوں کے ارقام میں نکالا جا سکتا ہے۔

تحویلی فارمولے، عام طور پر حصے سے تکمل کا فارمولا استعمال کر کے حاصل کیے

جاتے ہیں۔

اگلے ابواب میں کافی تعداد میں تحویلی فارمولے نکالے جائیں گے۔ یہاں ہم کچھ اہم مثالوں پر ہی غور کریں گے۔

مثالیں

1- تکملہ

$$\int x^n e^{ax} dx$$

کے لیے ایک تحویلی فارمولا نکالیے اور اُس کا استعمال کر کے تکملہ

$$\int x^3 e^{ax} dx.$$

کی قیمت نکالیے۔

حصے سے تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int x^n e^{ax} dx = x^n \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx,$$

جو کہ درکار تحویلی فارمولا ہے۔

ترتیب وار n کی جگہ 3, 2, 1 رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$(i) \; \ldots\ldots \int x^3 e^{ax} dx = \frac{x^3 e^{ax}}{a} - \frac{3}{a} \int x^2 e^{ax} dx$$

$$(ii) \; \ldots\ldots \int x^2 e^{ax} dx = \frac{x^2 e^{ax}}{a} - \frac{2}{a} \int x e^{ax} dx$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{x e^{ax}}{a} - \frac{1}{a} \int e^{ax} dx$$

$$(iii) \; \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{x e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2}$$

اب (ii) اور (iii) سے ہم پاتے ہیں

$$(iv) \; \ldots\ldots \int x^2 e^{ax} dx = \frac{x^2 e^{ax}}{a} - \frac{2x e^{ax}}{a^2} + \frac{2e^{ax}}{a^3}$$

پھر (i) اور (iv) سے ہم پاتے ہیں

$$\int x^3 e^{ax}\, dx = \frac{x^3 e^{ax}}{a} - \frac{3x^2 e^{ax}}{a^2} + \frac{6x\, e^{ax}}{a^3} - \frac{6}{a^4} e^{ax}$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^4}\,(a^3x^3 - 3a^2x^2 + 6ax - 6).$$

2۔ تکملہ

$\int x^m \sin nx\, dx.$

کے لیے ایک تحویلی فارمولا حاصل کیجیے۔
حصے سے تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\text{(i)} \ldots\ldots \int x^m \sin nx\, dx = -\frac{x^m \cos nx}{n} + \frac{m}{n}\int x^{m-1} \cos nx\, dx$$

پھر

$$\text{(ii)} \ldots\ldots \int x^{m-1} \cos nx\, dx = \frac{x^{m-1} \sin nx}{n} - \frac{m-1}{n}\int x^{m-2} \sin nx\, dx$$

یہ قیمت (i) میں رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int x^m \sin nx\, dx = -\frac{x^m \cos nx}{n} + \frac{mx^{m-1} \sin nx}{n^2}$$

$$- \frac{m(m-1)}{n^2}\int x^{m-2} \sin nx\, dx.$$

جو کہ درکار تحویلی فارمولا ہے۔

3۔ تکملہ

$\int x^n e^{-x}\, dx$

کے لیے ایک تحویلی فارمولا حاصل کیجیے اور اُس کی مدد سے ثابت کیجیے کہ لامتناہی تکملہ

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx = n\,!.$$

جہاں کہ n کوئی مثبت کامل عدد ہے۔

حصے سے تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int_0^t x^n e^{-x}\, dx = -x^n e^{-x}\Big|_0^t + n\int_0^t x^{n-1} e^{-x}\, dx$$
$$= -t^n e^{-t} + n\int_0^t x^{n-1} e^{-x}\, dx$$

اب

$$\lim_{t\to\infty}(-t^n e^{-t}) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-t^n}{e^t}\right) = 0$$
$$\therefore \quad \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx$$

جس سے کہ

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$$

لکھنے پر ملتا ہے

$$I_n = nI_{n-1}.$$

اب n کی جگہ $n-1$ ، $n-2$ ،.......2 اور 1 لکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$I_{n-1} = (n-1)\, I_{n-2},$$
$$I_{n-2} = (n-2)\, I_{n-3},$$
$$I_{n-3} = (n-3)\, I_{n-4},$$
$$I_1 = 1.I_0 = I_0.$$

اِن سے ہم پاتے ہیں

$$I_n = n\,!\,.\, I_0.$$

اب

$$I_0 \quad \int_0^\infty e^{-x}\, dx = \lim_{t\to\infty}\left(\int_0^t e^{-x}\, dx\right)$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left|-e^{-t}+1\right| = 1$$

اِس لیے

$$I_n = n\,!.$$

4۔ تکملہ

$$\int x^m (\log x)^n\, dx$$

کے لیے ایک تحویلی فارمولا حاصل کیجیے اور اس کے استعمال سے تکملہ

$$\int_0^1 x^4 (\log x)^3\, dx.$$

حاصل کیجیے۔

حصے سے تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int x^m (\log x)^n\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\log x)^n - \frac{n}{m+1}\int x^{m+1} (\log x)^{n-1}.\frac{1}{x}\, dx$$
$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}(\log x)^n - \frac{n}{m+1}\int x^m (\log x)^{n-1}\, dx,$$

جوکہ درکار تحویلی فارمولا ہے۔

اس میں $m = 4$ رکھنے پر ملتا ہے۔

$$\int x^4 (\log x)^n\, dx = \frac{x^5}{5}(\log x)^n - \frac{n}{5}\int x^4 (\log x)^{n-1}\, dx.$$

اب ترتیب وار n کی جگہ $2, 3$ اور 1 رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int x^4 (\log x)^3\, dx = \frac{x^5}{5}(\log x)^3 - \frac{3}{5}\int x^4 (\log x)^2\, dx$$
$$\int x^4 (\log x)^2\, dx = \frac{x^5}{5}(\log x)^2 - \frac{2}{5}\int x^4 \log x\, dx$$
$$\int x^4 \log x\, dx = \frac{x^5}{5}\log x - \frac{1}{5}\int x^4\, dx = \frac{x^5}{5}\log x - \frac{x^5}{25}$$

ان سے ہم پاتے ہیں

$$\int x^4 (\log x)^3\, dx = \frac{x^5}{5}(\log x)^3 - \frac{3x^5}{25}(\log x)^2 + \frac{6x^5}{125}\log x - \frac{6}{625}x^5.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^4 (\log x)^3\, dx = \left| \frac{x^5}{5} (\log x)^3 - \frac{3x^5}{25} (\log x)^2 + \frac{6x^5}{125} \log x - \frac{6}{625} x^5 \right|_0^1$$

جب $x \to 0$ تو $x^5 (\log x)^3$ ، $x^5 (\log x)^2$ اور $x^5 \log x$ سبھی صفر کی طرف مائل ہوتے ہیں

$$\therefore \qquad \int_0^1 x^4 (\log x)^3\, dx = -\frac{6}{625}$$

مشقیں

1۔ تکملہ $\int x^m \cos nx dx$ کے لیے ایک تحویلی فارمولا حاصل کیجیے اور اُس کے استعمال سے تکملہ $\int x^3 \cos 3x\, dx.$ حاصل کیجیے۔

2۔ اگر

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} x^n \sin x\, dx \quad , \quad n > 1,$$

تو ثابت کیجیے کہ

$$u_n + n(n-1)u_{n-2} = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$$

3۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int x^m(1-x)^{n-1}\, dx = \frac{x^{m+1}(1-x)^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int x^m(1-x)^{n-2}\, dx.$$

اِس لیے یہ دکھائیے کہ

$$\int_0^1 x^m(1-x)^{n-1}\, dx = \frac{(n-1)!\, m!}{(m+n)!}$$

جہاں n, m مثبت کامل اعداد ہیں۔

4 ۔ اگر m, n مثبت کامل اعداد ہوں تو ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}\,dx$$
$$= \frac{1.2\ 3.\ldots(m-1)}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}.$$

جوابات

1. $\int x^m \cos nx\,dx = x^{m-1}\dfrac{nx \sin nx + m\cos nx}{n^2} - \dfrac{m(m-1)}{n^2}\int x^{m-2}\cos nx\,dx.$

$\int x^3 \cos 3x\,dx = \frac{1}{27}(9x^2-2)\cos 3x + \frac{1}{9}(3x^3-2x)\sin 3x.$

باب 2 پر مشقیں

1 ۔ ثابت کیجیے کہ اگر m اور n مختلف کامل اعداد ہوں تو

$$\int_0^\pi \sin mx \sin nx\,dx = 0,\ \int_0^\pi \sin^2 mx\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

2 ۔ حاصل کیجیے

$$\int e^x (x-2)(2x+3)\,dx.$$

3 ۔ حاصل کیجیے

$$\int x^3 \log(1+x^2)\,dx.$$

4 ۔ ثابت کیجیے کہ اگر n ایک سے بڑا کامل عدد ہو تو

$$\int_0^\infty \frac{dx}{[x+\sqrt{(1+x^2)}]^n} = \frac{n}{n^2-1}.$$

($x = \sinh\theta$ رکھیے)

5۔ حاصل کیجیے

$$\int \frac{\cos^{-1} x}{x^3}\, dx.$$

6۔ حاصل کیجیے

$$\int \frac{\sin (\log x)}{x^3}\, dx.$$

7۔ ثابت کیجیے کہ

(i) $\int \frac{x}{1+\cos x}\, dx = x \tan \frac{x}{2} + 2 \log \cos \frac{1}{2} x.$

(ii) $\int \frac{x}{1-\cos x}\, dx = - x \cot \frac{x}{2} + 2 \log \sin \frac{1}{2} x.$

(iii) $\int \frac{x}{1+\sin x}\, dx = -x \tan \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2 \log \cos \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

(iv) $\int \frac{x}{1-\sin x}\, dx = x \cot \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2 \log \sin \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

8۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_a^b \frac{\log x}{x}\, dx = \frac{1}{2} \log\left(\frac{b}{a}\right). \log (ab).$$

9۔ حاصل کیجیے

$$\int_\alpha^\beta \left[\log \log x + \frac{1}{(\log x)^2}\right] dx.$$

10۔ ذیل تکملے حاصل کیجیے

(i) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x} dx.$ (ii) $\int \frac{x - \sin x}{1 - \cos x} dx,$ (iii) $\int \sec^3 x\, dx.$

11۔ حاصل کیجیے

(i) $\int x^2 \tan^{-1} x\, dx.$ (ii) $\int x^8 \tan^{-1} x^3\, dx,$ (iii) $\int \frac{(1-x)e^x\, dx}{x^2},$

(iv) $\int (\sin x + \cos x) e^x\, dx,$ (v) $\int_0^1 \frac{x^3 \sin^{-1} x}{\sqrt{(1-x^2)}} dx,$

(vi) $\int_0^{\infty} \frac{x(\tan^{-1} x)^2}{(1+x^2)^{3/2}} dx$, (vii) $\int_0^{\pi} xe^{2x} \sin x \, dx$.

(viii) $\int_0^1 x^2 e^x \sin \pi x \, dx$.

(ix) $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \beta x \cos \lambda x \, dx, \ (a > 0)$.

12. تکمل کیجیے

(i) $\frac{1}{\sqrt{(x+a)}+\sqrt{(x+b)}}$, (ii) $\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{x}$,

(iii) $\log [x+\sqrt{(x^2+a^2)}]$, (iv) $x \log [x+\sqrt{(x^2+a^2)}]$.

13. تکمل کیجیے

(i) $\sqrt{\left(\frac{x}{a+x}\right)}$, (ii) $\frac{\sin x}{\sin (x-a)}$,

(iii) $\sqrt{\left(\frac{x+a}{x}\right)}$, (iv) $\tan^{-1} \frac{3x-x^3}{1-3x^2}$.

14. ثابت کیجیے کہ

(i) $\int e^{ax} \cos^n bx \, dx$

$$= \frac{a \cos bx + nb \sin bx}{a^2+n^2b^2} e^{ax} \cos^{n-1} bx + \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} bx \, dx,$$

(ii) $\int e^{ax} \sin^n bx \, dx$

$$= \frac{a \sin bx - nb \cos bx}{a^2+n^2b^2} e^{ax} \sin^{n-1} bx + \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} bx \, dx.$$

جوابات

2. $(2x^2-5x-1)e^x$.
3. $\frac{1}{4}(x^4-1) \log (1+x^2) - \frac{1}{8}(x^4-2x^2)$.
5. $[x\sqrt{(1-x^2)} - \cos^{-1} x]/2x^2$.
6. $-[2 \sin (\log x) + \cos (\log x)]/5x^2$.
9. $\beta \log (\log \beta) - \alpha \log (\log \alpha) - [\beta (\log \beta)^{-1} - \alpha (\log \alpha)^{-1}]$.
10. (i) $2 \sin x - \log \tan (\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\pi)$. (ii) $-x \cot (\frac{1}{2}x)$.
    (iii) $\frac{1}{2} \tan x \sec x + \frac{1}{2} \log \tan (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi)$.

11. (i) $\frac{1}{3}x^3\tan^{-1}x+\frac{1}{6}[\log(x^2+1)-x^2]$.

(ii) $\frac{1}{9}x^9\tan^{-1}x^3+\frac{1}{18}[\log(x^6+1)-x^6]$.

(iii) $-e^x/x$. (iv) $e^x\sin x$. (v) $\frac{7}{5}$ (vi) $(\pi-2)$.

(vii) $\frac{1}{25}(5\pi-4e^{2\pi}-\frac{4}{5})$. (viii) $\pi[e(\pi^4-4\pi^2+3)-2\pi^2+6]/(1+\pi^2)^3$

12. (i) $\frac{2}{3(a-b)}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}}-(x+b)^{\frac{3}{2}}\right]$.

(ii) $\sqrt{(a^2-x^2)}+a\log_e\frac{a-\sqrt{(a^2-x^2)}}{x}$.

(iii) $x\log[x+\sqrt{(a^2+x^2)}]-\sqrt{(a^2+x^2)}$.

(iv) $\frac{1}{2}x^2\log[x+\sqrt{(a^2+x^2)}]-\frac{1}{4}[x\sqrt{(a^2+x^2)}-a^2\sinh^{-1}(x/a)]$.

13 (i) $(a+x)\tan^{-1}\sqrt{(x/a)}-\sqrt{(ax)}$.

(ii) $\sin a\log\sin(x-a)+(x-a)\cos a$

(iii) $a\tan\theta\sec\theta+a\log\tan(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\pi)$, $x=a\tan^2\theta$ جہاں.

(iv) $3x\tan^{-1}x-\frac{3}{2}\log(1+x^2)$.

5

جبری ناطق تفاعلوں (Algebraic Rational Functions) کا تکمل

5.1۔ اس باب میں ہم ناطق تفاعلوں $f(x)/\varphi(x)$ کے تکمل کے بارے میں پڑھیں گے جہاں $f(x)$ اور $\varphi(x)$ کثیر رُکنی (polynomial) ہیں۔ مان لیجیے

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots\ldots + a_{m-1}x + a_m,$$
$$\varphi(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots\ldots + b_{n-1}x + b_n.$$

ہم یہ مان سکتے ہیں کہ شمار کنندہ (numerator) $f(x)$ کی ڈگری m، نسب نما $\varphi(x)$ کی ڈگری n سے کم ہے۔ کیوں کہ اگر ایسا نہ ہو تو ہم اُس وقت تک شمار کنندہ کو نسب نما سے تقسیم کر سکتے ہیں جب تک ہمیں باقی (remainder) ایسا تفاعل نہ مل جائے جس کی ڈگری نسب نما کی ڈگری سے کم ہو۔ اِس طرح ہمیں

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{\varphi(x)}$$

ملتا ہے جہاں $f(x)$ کو $\varphi(x)$ سے تقسیم کرنے پر $Q(x)$ خارج قسمت (quotient) اور $R(x)$ باقی ہے۔ $R(x)$ کی ڈگری $\varphi(x)$ کی ڈگری سے کم ہے۔

کثیر رکنی (polynomial) ہونے کی وجہ سے $Q(x)$ کا تکمل بہ آسانی رُکن بہ رُکن

ہو سکتا ہے۔ (term by term)

ہم اب دیکھیں گے کہ $R(x)/\varphi(x)$ کا تکمل کیسے کیا جاسکتا ہے، جب کہ $R(x)$ کی ڈگری $\varphi(x)$ کی ڈگری سے کم ہو۔

علم الجبرا سے ہم یہ جانتے ہیں کہ ہر کثیر رکنی (polynomial) $\varphi(x)$ کو پہلی اور دوسری ڈگری کے فیکٹروں کے حاصل ضرب کی شکل میں رکھا جا سکتا ہے؛ اس لیے ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$\varphi(x) = A\,(a_1x+b_1)^{p_1}\,(a_2x+b_2)^{p_2}\ldots\ldots$$
$$\times (A_1x^2+2B_1x+C_1)^{q_1}\,(A_2x^2+2B_2x+C_2)^{q_2}$$

یہاں p_1 , p_2 , ... ; q_1 , q_2 .... مثبت کامل اعداد ہیں اور یہ ظاہر کرتے ہیں کہ کوئی فیکٹر کتنی بار آیا ہے۔ ساتھ ہی، ان میں سے کچھ یا سب 1 کے برابر ہو سکتے ہیں۔ لہٰذا ہمیں نسب نما $\varphi(x)$ کے چار قسم کے فیکٹر حاصل ہوتے ہیں:۔

(i) ایک ہی بار آئے ہوئے خطی (Linear) فیکٹر

(ii) کئی بار آئے ہوئے خطی (Linear repeated) فیکٹر

(iii) ایک ہی بار آئے ہوئے دو درجی (Quadratic) فیکٹر

(iv) کئی بار آئے ہوئے دو درجی فیکٹر

جزوی کسروں (partial fractions) کے علم سے ہم جانتے ہیں کہ $R(x)/\varphi(x)$ کو کئی اس طرح کی جزوی کسروں کے جوڑ کی طرح رکھا جا سکتا ہے کہ:

(i) ایک ہی بار آئے ہوئے ہر خطی فیکٹر $(ax+b)$ سے مطابق (corresponding) ایک جزوی کسر

$\frac{L}{ax+b}$ کی طرح کی ہو۔

(ii) کئی بار آئے ہوئے ہر خطی فیکٹر $(ax+b)^p$ سے مطابق p کسروں کا جوڑ

$$\frac{L_1}{ax+b}+\frac{L_2}{(ax+b)^2}+\ldots\ldots+\frac{L_p}{(ax+b)^p}$$

کی طرح کا ہو۔

(iii) ایک ہی بار آئے ہوئے ہر دو درجی فیکٹر (جو کہ حقیقی (real) خطی فیکٹروں میں نہ توڑا جا سکے) $Ax^2+2Bx+C$ سے مطابق ایک جزوی کسر

$$\frac{Lx+M}{Ax^2+2Bx+C}$$

کی طرح کی ہو۔

(iv) کئی بار آئے ہوئے ہر دو درجی فیکٹر $(Ax^2+2Bx+C)^q$ سے مطابق q کسروں کا جوڑ

$$\frac{L_1x+M_1}{Ax^2+2Bx+C}+\frac{L_2x+M_2}{(Ax^2+2Bx+C)^2}+\dots+\frac{L_qx+M_q}{(Ax^2+2Bx+C)^q}$$

کی طرح کا ہو۔

اوپر آئے ہوئے مستقل L, M وغیرہ نکالنے کا طریقہ الجبرا کی ابتدائی کتابوں میں ملتا ہے جہاں جزوی کسروں کا ذکر کر دیا ہوتا ہے۔

لہٰذا کسی جبری ناطق تفاعل کے تکمل کے لیے ہمیں اِس طرح کی کسروں کا تفاعل سیکھنا ہے:

(i) $\dfrac{L}{ax+b}$, (ii) $\dfrac{L}{(ax+b)^r}$,

(iii) $\dfrac{Lx+M}{Ax^2+2Bx+C}$, (iv) $\dfrac{Lx+M}{(Ax^2+2Bx+C)^r}$

ہم اِن پر ایک ایک کر کے غور کریں گے۔

$$\int\frac{L}{ax+b}dx=\frac{L}{a}\log(ax+b). \qquad \text{(i)}$$

$$\int\frac{L}{(ax+b)^r}\,dx=\frac{L}{a(1-r)}\cdot\frac{1}{(ax+b)^{r-1}}, \qquad \text{(ii)}$$

جبکہ $r\neq1$.

(iii) اب $(Lx+M)/(Ax^2+2Bx+C)$, کے تکمل کے لیے ہم دو مستقل λ اور μ ایسے معلوم کرتے ہیں کہ

(f) . . . . $Lx+M \equiv \lambda\,(2Ax+2B)+\mu,$

جہاں کہ λ کو ضرب کرنے والا حصہ $2Ax+2B$ ، $Ax^2+2Bx+C$ کا تفرقی سر ہے۔
اب (I) سے ہم پاتے ہیں

$$L = 2A\lambda,\quad M = 2B\lambda+\mu.$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda = \frac{L}{2A},\qquad \mu=\frac{AM-BL}{A}.$$

$$\therefore\quad \int\frac{Lx+M}{Ax^2+2Bx+C}dx$$

$$= \lambda\int\frac{2Ax+2B}{Ax^2+2Bx+C}\,dx+\mu\int\frac{dx}{Ax^2+2Bx+C}$$

$$= \lambda\log(Ax^2+2Bx+C)+\mu\int\frac{dx}{Ax^2+2Bx+C}$$

پھر

$$\int\frac{dx}{Ax^2+2Bx+C}=\frac{1}{A}\int\frac{dx}{x^2+\frac{2B}{A}x+\frac{C}{A}}$$

$$=\frac{1}{A}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{B}{A}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{(AC-B^2)}}{A}\right)^2}$$

یہاں ($AC-B^2$) مثبت ہے ورنہ $Ax^2+2Bx+C=0$ کے دو حقیقی ریشے (real roots) ہو جائیں اور $Ax^2+2Bx+C$ خطی فیکٹروں کا حاصل ضرب ہوتا۔

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{Ax^2+2Bx+C}=\frac{1}{\sqrt{(AC-B^2)}}\tan^{-1}\frac{Ax+B}{\sqrt{(AC-B^2)}}$$

اس طرح ہم نے

$$\frac{(Lx+M)}{(Ax^2+2Bx+C)}$$

کا تکمل کر لیا۔

نوٹ:

$1/(x^2+a^2)$ کا تکملہ $(1/a)\tan^{-1}(x/a).$ ہوتا ہے۔

(iv) اب

$$\frac{Lx+M}{(Ax^2+2Bx+C)^r}$$

کی طرح کی کسروں کے تکمل کا طریقہ § 3·5 میں بتایا جائے گا۔

مشقیں

1۔ حاصل کیجیے

(i) $\int \frac{dx}{3x-4}$, (ii) $\int \frac{dx}{5-2x}$, (iii $\int \frac{2dx}{3-2x}$

2۔ حاصل کیجیے

(i) $\int \frac{dx}{(2x-3)^3}$, (ii) $\int \frac{dx}{(5+3x)^2}$, (iii) $\int \frac{dx}{(3-2x)^4}$

3۔ حاصل کیجیے

(i) $\int \frac{dx}{x^2+3x+4}$, (ii) $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+3}$, (iii) $\int \frac{(2x-3)dx}{3x^2+4x+5}$

4۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^1 \frac{(4x^2+3)\,dx}{8x^2+4x+5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\log\frac{17}{5} + \frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{6}{7}.$$

جوابات

1. (i) $\frac{1}{3}\log(3x-4)$. (ii) $-\frac{1}{2}\log(5-2x)$. (iii) $-\log(3-2x)$.
2. (i) $-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(2x-3)^2}$. (ii) $-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5+3x}$. (iii $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(3-2x)^3}$.
3. (i) $\frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}$

   (ii) $\frac{1}{2}\log(x^2+2x+3)+\sqrt{\frac{1}{2}}\tan^{-1}[(x+1)/\sqrt{2}]$.

   (iii) $\frac{1}{3}\log(3x^2+4x+5) - \frac{13}{3\sqrt{11}}\tan^{-1}\left(\frac{3x+2}{\sqrt{11}}\right)$

3.2 - جبکہ صرف نسب نما (denominator) میں ایک ہی بار آئے ہوئے خطی فیکٹر ہوں

مثال

حاصل کیجیے

$$\int \frac{x^2+5x+41}{(x+3)(x-1)(2x-1)}\,dx.$$

ہم پاتے ہیں

$$\frac{x^2+5x+41}{(x+3)(x-1)(2x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{2x-1}.$$

$$\Rightarrow \quad x^2+5x+41 = A(x-1)(2x-1)+B(x+3)(2x-1)$$
$$+C(x+3)(x-1).$$

اب x کی جگہ ترتیب وار -3، 1 اور $\frac{1}{2}$ رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$A = \tfrac{5}{4},\ B = \tfrac{47}{4},\ C = -25.$$

$$\therefore \quad \int \frac{x^2+5x+41}{(x+3)(x-1)(2x-1)}\,dx$$
$$= \frac{5}{4}\int \frac{dx}{x+3} + \frac{47}{4}\int \frac{dx}{x-1} - 25\int \frac{dx}{2x-1}$$
$$= \tfrac{5}{4}\log(x+3) + \tfrac{47}{4}\log(x-1) - \tfrac{25}{2}\log(2x-1).$$

مشقیں

1۔ حاصل کیجیے

(i) $\int \frac{dx}{x^2-1}$, (ii) $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$,

(iii) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, (iv) $\int \frac{(2x-3)\,dx}{(x^2-1)(2x+3)}$,

(v) $\int \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$. (vi) $\int \frac{x^2\,dx}{(x+1)(x-2)(x+3)}$,

(vii) $\int \frac{x^2\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, (viii) $\int \frac{x^3+3}{x^3-3x}\,dx,$

(ix) $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2-1)(x^2-4)}$, (x) $\int \frac{x^5\,dx}{x^3-2x^2-5x+6}$,

(xi) $\int_2^3 \frac{(x^2+1)}{(2x+1)(x^2-1)}\,dx,$ (xii) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x\cos\alpha+1}$,
$(0 \leqslant \alpha < \pi)$

جوابات

1. (i) $\frac{1}{2}\log[(x-1)/(x+1)]$. (ii) $x+\log[(x-1)/(x+1)]$.

(iii) $\frac{1}{2}\log[(x+1)(x+3)/(x+2)^2]$.

(iv) $\frac{5}{2}\log(x+1)-\frac{1}{10}\log(x-1)-\frac{12}{5}\log(2x+3)$

(v) $x+12\log[(x+2)^3/(x+1)(x+3)^5]$.

(vi) $\frac{9}{10}\log(x+3)+\frac{4}{15}\log(x-2)-\frac{1}{6}\log(1+x)$.

(vii) $\frac{1}{2}\log(x+1)-4\log(x+2)+\frac{9}{2}\log(x+3)$.

(viii) $x-\log x+\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\log(x-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})\log(x+\sqrt{3})$.

(ix) $\frac{5}{12}\log[(x-2)/(x+2)]-\frac{1}{3}\log[(x-1)/(x+1)]$.

(x) $\frac{1}{3}x^3+x^2+9x-\frac{1}{6}\log(x-1)-\frac{32}{15}\log(x+2)+\frac{243}{10}\log(x-3)$.

(xi) $-\log 3-\frac{5}{6}\log\frac{7}{5}+\frac{7}{8}\log 2$.

(xii) $\alpha/2\sin\alpha$, if $\alpha \neq 0$; $\frac{1}{2}$ if $\alpha = 0$.

3·3 - جبکہ صرف نسب نما میں ایک ہی بار یا کئی بار آئے ہوئے خطی فیکٹر ہوں

مثال

حاصل کیجیے :

$$\int \frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)}\,dx.$$

ہم مان لیتے ہیں کہ

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{(x-1)^2}+\frac{F}{x+1}.$$

$$\therefore \quad 1 \equiv Ax^2(x-1)^2(x+1)+Bx(x-1)^2(x+1)+C(x-1)^2(x+1)$$
$$(1) \quad \cdots\cdots \quad +Dx^3(x-1)(x+1)+Ex^3(x+1)+Fx^3(x-1)^2$$

اب x کی جگہ 0 اور 1- رکھنے پر ملتا ہے

$$C=1,\ E=\tfrac{1}{2},\ F=-\tfrac{1}{4}.$$

اب A ، B اور D پانے کے لیے ہم (i) کے دونوں جانب کے x^1, x^3 اور x^5 کے ضربیوں کی برابری کرنے پر پاتے ہیں

$$0=A+D+F,\quad 0=-A+B+E-2F,\quad 0=-A-B+C-D+E+F$$

ان مساوات کو حل کرکے ہم پاتے ہیں

$$A=2,\quad B=1,\quad D=-\tfrac{7}{4},$$

$$\therefore \int \frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)}\,dx = 2\log x-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{7}{4}\log(x-1)$$
$$-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{4}\log(x+1)$$

مشقیں

1 ۔ ذیل تفاعلوں کا تکمل کیجیے :-

(i) $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)}$, (ii) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2(x+2)^2}$,

(iii) $\dfrac{x^2+1}{(x+2)^3(x-1)}$, (iv) $\dfrac{x^3+2}{(x-1)(x-2)^3}$,

(v) $\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3+4x^2+5x+2}$, (vi) $\dfrac{(1+x)^3}{(1-x)^3}$,

(vii) $\dfrac{57x^3-25x^2+9x-1}{(x-1)^2(2x-1)(5x-1)}$.

2 ۔ ذیل معین تکملے حاصل کیجیے :-

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x^2)^2}$, (ii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^3(2+x)}$

جوابات

1. (i) $-\frac{1}{x+1}+\log\frac{(x+2)^3}{(x+1)^2}$.

(iii) $\frac{1}{27}\log\frac{x+2}{x-1}-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x+2}$.

(ii) $\frac{2}{27}\log\frac{x-1}{x+2}-\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{x+2}+\frac{5}{6}\frac{1}{(x+2)^2}$.

(iv) $4\log(x-2)-3\log(x-1)-\frac{2}{x-2}-\frac{5}{(x-2)^2}$.

(v) $x+12(x+1)^{-1}+28\log(x+1)-36\log(x+2)$.

(vi) $-x-12(1-x)^{-1}+4(1-x)^{-2}-6\log(1-x)$.

(vii) $-10(x-1)^{-1}+35/6\log(2x-1)-2/15\log(5x-1)$.

2. (i) $1/12\log(27e^4)$. (ii) $\frac{1}{2}\log(4/e)$.

3.4 ۔ جبکہ صرف نسب نما میں خطی فیکٹر یا ایک ہی بار آئے ہوئے دو درجی فیکٹر ہوں

مثال

حاصل کیجیے

$$\int\frac{dx}{(x-1)^2(x^2+4)}$$

ہم مان لیتے ہیں کہ

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+4)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

$$(i)\ldots\Rightarrow 1\equiv A(x-1)(x^2+4)+B(x^2+4)+(Cx+D)(x-1)^2$$

اب $x=1$ رکھنے پر ملتا ہے

$$B=\frac{1}{5}$$

اب A ، C اور D معلوم کرنے کے لیے ہم x^3, x^2 اور x کے ضربیوں کی

برابری کرنے پر پاتے ہیں

$$0 = A + C\ ,\ 0 = -A + B + D - 2C\ ,\ 0 = 4A + C - 2D.$$

ان مساواتوں کو حل کرنے پر ملتا ہے۔

$$C = \frac{2}{25},\ A = -\frac{2}{25},\ D = -\frac{3}{25}.$$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+4)}\,dx$$

$$= -\frac{2}{25}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{25}\int \frac{2x-3}{x^2+4}\,dx$$

$$= -\frac{2}{25}\log(x-1) - \frac{1}{5(x-1)} + \frac{1}{25}\log(x^2+4) - \frac{3}{50}\tan^{-1}\frac{x}{2}.$$

نوٹ: یہ نوٹ کیجیے کہ نسب نما کے دو درجی فیکٹر x^2+4 کے ریشے $2i$. اور $-2i$. ہیں۔ اب (1) میں $x = 2i$ رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$\begin{aligned} 1 &= (2iC + D)(2i-1)^2 \\ &= (2iC + D)(-3-4i) \\ &= (8C - 3D) + i(-6C - 4D) \end{aligned}$$

دونوں طرف حقیقی (real) اور خیالی(imaginary) حصوں کی برابری کرنے پر ملتا ہے

$$8C - 3D = 1,\quad -6C - 4D = 0$$

جس سے کہ

$$C = \frac{2}{25},\ D = -\frac{3}{25}$$

x کی جگہ دو درجی فیکٹروں کے خیالی ریشے (roots) رکھنے کا یہ طریقہ بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔

مشقیں

1۔ حاصل کیجیے

(i) $\int \frac{x^3}{x^2+1}dx$, (ii) $\int \frac{x^4}{(x^2-1)(x^2+4)}dx$,

(iii) $\int \frac{x}{1+x^3}dx$, (iv) $\int \frac{x^6}{(x^2+1)(x-4)}dx$,

(v) $\int \frac{x^2+1}{x^3+1}dx$, (vi) $\int \frac{x^2+6x-25}{(x^2+4x)^2-25}dx$,

(vii) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$, (viii) $\int \frac{dx}{1-x^6}$,

(ix) $\int \frac{(x+a)dx}{x^2(x-a)(x^2+a^2)}$, (x) $\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$,

(xi) $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+4)}$, (xii) $\int \frac{x\,dx}{x^3+x^2+x+1}$,

(xiii) $\int \frac{x^3\,dx}{x^4+3x^2+2}$.

2۔ ذیل معین تکملے حاصل کیجیے

(i) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$, (ii) $\int_0^2 \frac{4-x}{x(x^2-2x+2)}dx$.

جوابات

1. (i) $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\log(x^2+1)$.

(ii) $x+\frac{1}{10}\log[(x-1)/(x+1)]-\frac{8}{5}\tan^{-1}(x/2)$.

(iii) $\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)-\frac{1}{3}\log(x+1)+\sqrt{\tfrac{1}{3}}\tan^{-1}[(2x-1)/\sqrt{3}]$.

(iv) $\frac{1}{3}x^3+2x^2+15x+\frac{1024}{17}\log(x-4)+\frac{1}{34}\log(x^2+1)+\frac{4}{17}\tan^{-1}x$.

(v) $\frac{2}{3}\log(x+1)+\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)+\sqrt{\tfrac{1}{3}}\tan^{-1}[(2x-1)/\sqrt{3}]$.

(vi) $\frac{1}{2}\log(x+5)-\frac{9}{10}\log(x-1)-\frac{1}{10}\log(x^2+4x+5)+\frac{17}{5}\tan^{-1}(x+2)$.

(vii) $\frac{1}{2}\log(x+1)-\frac{1}{4}\log(x^2+1)-\frac{1}{2}(x+1)^2$.

(viii) $\frac{1}{6}\log\frac{x+1}{1-x}+\frac{1}{12}\log\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

(ix) $\frac{1}{a^3} \log \frac{(x-a)\sqrt{(x^2+a^2)}}{x^2} + \frac{1}{a^2 x}$.

(x) $\frac{1}{4} \log (x+1) - \frac{1}{8} \log (x^2+1) + \frac{1}{4} \tan^{-1} x + \frac{1}{4} (x+1)^{-2}$

(xi) $\frac{1}{5} (x-1)^{-1} + \frac{1}{8} \log (x-2) - \frac{3}{25} \log (x-1) - \frac{1}{400} \log (x^2+4) + \frac{7}{200} \tan^{-1} (\frac{1}{2}x)$.

(xii) $\frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{(x^2+1)}}{x+1} + \frac{1}{2} \tan^{-1} x$.

(xiii) $\log (x^2+2) - \frac{1}{2} \log (x^2+1)$.

2. (i) $\frac{1}{2}$. (ii) $\frac{1}{4}\pi + \log 2$.

3.41 - جبکہ تکاملیہ میں x کی صرف جفت قوتیں (even powers) ہوں

مثال

تکمل کیجیے

$$\frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}$$

ہم نوٹ کرتے ہیں کہ دی ہوئی کسر x^2 کا تفاعل ہے۔ اس وجہ سے اس کی جزوی کسریں $x^2=y$ رکھ کر زیادہ آسانی سے نکل سکتی ہیں۔ ہم پاتے ہیں

$$\frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)} = \frac{(y+1)(y+2)}{(y+3)(y+4)}$$

$$= 1 + \frac{(y+1)(y+2)}{(y+3)(y+4)} - 1$$

$$= 1 + \frac{(y+1)(y+2) - (y+3)(y+4)}{(y+3)(y+4)}$$

مان لیجیے کہ

$$\frac{(y+1)(y+2)-(y+3)(y+4)}{(y+3)(y+4)} = \frac{A}{y+3} + \frac{B}{y+4}.$$

$$\Rightarrow \quad (y+1)(y+2) - (y+3)(y+4) = A(y+4) + B(y+3).$$

دونوں جانب $y=-3$ اور $y=-4$ رکھنے پر ملتا ہے

$$A = 2, B = -6.$$

$$\therefore \quad \frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)} = 1 + \frac{2}{y+3} - \frac{6}{y+4}$$

$$= 1 + \frac{2}{x^2+3} - \frac{6}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)} dx = x + \frac{x}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}} - 3 \tan^{-1} \frac{x}{2}.$$

مشقیں

1 - ذیل تکملے حاصل کیجیے

(i) $\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx,$ (ii) $\int \frac{x^2}{x^4+x^2-2} dx.$

2 - حاصل کیجیے

$$\int \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + 4 \sin^2\theta} d\theta$$

جوابات

1. (i) $\frac{1}{(a^2-b^2)}\left[a \tan^{-1} \frac{x}{a} - b \tan^{-1} \frac{x}{b} \right]$

(ii) $1/6 \log [(x-1)/(x+1)] + (\sqrt{2}/3) \tan^{-1} (x/\sqrt{2})$.

2. $-\frac{1}{3} \tan^{-1} (\tan \theta) - 2/3 \tan^{-1} (2 \tan \theta)$.

3·5 - تفاعل

$$\frac{Lx+M}{(Ax^2+2Bx+C)^n},$$

کا تکمل کرنا جبکہ n ایک سے بڑا کوئی مثبت کامل عدد ہو۔

تکملہ

$$\int \frac{(Lx+M)\, dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n},$$

حاصل کرنے کے لیے ہم دو مستقل λ اور μ ایسے معلوم کرتے ہیں کہ

$$Lx+M = \lambda(2Ax+2B)+\mu, \qquad \text{[دیکھیے § 3·1]}$$

جہاں کہ λ کا ضریبہ $2Ax+2Bx$ دو درجی $Ax^2+2Bx+C.$ کا تفرقی سر ہے۔
اِس طرح ہم پاتے ہیں

$$\int\frac{Lx+M}{(Ax^2+2Bx+C)^n}dx$$
$$=\lambda\int\frac{2Ax+2B}{(Ax^2+2Bx+C)^n}dx+\mu\int\frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n}$$
$$=\frac{\lambda}{(1-n)}\,\frac{1}{(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}}+\mu\int\frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n}.$$

اب تکملہ

$$\int\frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n}$$

حاصل کرنے کے لیے ہم ایک تحویلی فارمولا حاصل کرتے ہیں۔ ہم لکھتے ہیں

$$Ax^2+2Bx+C=A\left[\left(x+\frac{B}{A}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{(AC-B^2)}}{A}\right)^2\right]$$
$$=A\left[\left(x+\frac{B}{A}\right)^2+k^2\right],$$

جہاں آسانی کے لیے ہم نے

$$k = \sqrt{(AC-B^2)}/A$$

لکھ دیا ہے۔
ساتھ ہی $y = x+(B/A)$ رکھنے پر ملتا ہے

$$\int\frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n}=\frac{1}{A^n}\int\frac{dy}{(y^2+k^2)^n}$$

اب تکملہ

$$\int\frac{dy}{(y^2+k^2)^n}$$

ایک تحویلی فارمولے کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے جسے کہ اگلے باب (section) میں حاصل کریں گے۔

3·51 ـ تکملہ

$$\int \frac{1}{(y^2+k^2)^n} dy.$$

کے لیے تحویلی فارمولا

درکار تحویلی فارمولا حاصل کرنے کے لیے ہم لکھتے ہیں

$$\int \frac{dy}{(y^2+k^2)^n} = \int 1 \cdot \frac{1}{(y^2+k^2)^n}\, dy,$$

اور حصے سے تکمل کا اصول استعمال کرتے ہیں۔ اس طرح ہم پاتے ہیں

$$\int \frac{dy}{(y^2+k^2)^n} = \frac{y}{(y^2+k^2)^n} - \int y.\,(-n)(y^2+k^2)^{-n-1}.\, 2y\, dy$$

$$= \frac{y}{(y^2+k^2)^n} + 2n \int \frac{y}{(y^2+k^2)^{n+1}}\, dy$$

$$= \frac{y}{(y^2+k^2)^n} + 2n \int \frac{y^2+k^2-k^2}{(y^2+k^2)^{n+1}}\, dy$$

$$= \frac{y}{(y^2+k^2)^n} + 2n \int \frac{dy}{(y^2+k^2)^n} - 2nk^2 \int \frac{dy}{(y^2+k^2)^{n+1}}$$

$$\therefore\ 2nk^2 \int \frac{dy}{(y^2+k^2)^{n+1}} = \frac{y}{(y^2+k^2)^n} + (2n-1) \int \frac{dy}{(y^2+k^2)^n}.$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{(y^2+k^2)^{n+1}} = \frac{y}{2nk^2\,(y^2+k^2)^n} + \frac{2n-1}{2nk^2} \int \frac{dy}{(y^2+k^2)^n},$$

اب n کی جگہ ($n-1$) رکھنے پر ملتا ہے

$$\int \frac{dy}{(y^2+k^2)^n} = \frac{y}{2(n-1)k^2(y^2+k^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)k^2} \int \frac{dy}{(y^2+k^2)^{n-1}}$$

جو کہ درکار تحویلی فارمولا ہے۔ اس کی مدد سے، متواتر تحویل سے، ہم دیا ہوا تکملہ حاصل کر سکتے ہیں۔

مثالیں

1- حاصل کیجیے

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$$

اوپر کے تحویلی فارمولے میں k کی جگہ 1 اور y کی جگہ x لکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2\ (n-1)} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$$

اب n کی جگہ ترتیب وار 4 , 3 اور 2 لکھنے پر ملتا ہے

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^4} = \frac{x}{6(x^2+1)^3} + \frac{5}{6} \int \frac{dx}{(x^2+1)^3},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \tan^{-1} x.$$

ان سے ہم پاتے ہیں

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^4} = \frac{x}{6(x^2+1)^3} + \frac{5x}{24(x^2+1)^2} + \frac{5x}{16(x^2+1)} + \frac{5}{16} \tan^{-1} x.$$

2- حاصل کیجیے

$$\int \frac{x(2x^2-x+5)}{(x^2+2x+2)^2}\, dx.$$

یہاں نسب نما میں ایک دو درجی فیکٹر دو بار آیا ہے۔

مان لیجیے

$$\frac{x(2x^2-x+5)}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2}.$$

$$\Rightarrow \quad x(2x^2-x+5) = (Ax+B)(x^2+2x+2)+Cx+D.$$

دونوں جانب کے x^3 x^2 اور x کے ضربیوں اور مستقل جزوں کی برابری کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$2 = A,\ -1 = 2A+B,\ 5 = 2A+2B+C,\ 0 = 2B+D.$$

ان مساواتوں کو حل کرنے پر ملتا ہے

$$A = 2, B = -5, C = 11, D = 10.$$

$$\therefore \qquad \frac{x(2x^2-x+5)}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{2x-5}{x^2+2x+2} + \frac{11x+10}{(x^2+2x+2)^2}.$$

اب

$$\frac{2x-5}{x^2+2x+2} = \frac{2x+2-7}{x^2+2x+2} = \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{7}{(x+1)^2+1}$$

$$\therefore \quad \int \frac{2x-5}{x^2+2x+2}\,dx = \log(x^2+2x+2) - 7\tan^{-1}(x+1).$$

اب دوسرے حصے $(11x+18)/(x^2+2x+2)^2$ کے تکمل کے لیے ہم لکھتے ہیں

$$11x+10 = \tfrac{11}{2}(2x+2) - 1$$

اور پاتے ہیں

$$\int \frac{11x+10}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = \frac{11}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}dx - \int \frac{dx}{[(x+1)^2+1]^2}.$$

$$= -\frac{11}{2}\,\frac{1}{(x^2+2x+2)} - \int \frac{dx}{[(x+1)^2+1]^2}.$$

$$y = x+1. \qquad \int \frac{dx}{[(x+1)^2+1]^2} = \int \frac{dy}{(y^2+1)^2},$$

اس کے بعد § 3·51 کے تحویلی فارمولے میں n کی جگہ پر 2 اور k کی جگہ 1 رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int \frac{dy}{(y^2+1)^2} = \frac{y}{2(y^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{dy}{2(y^2+1)} + \frac{1}{2}\tan^{-1} y$$

$$= \frac{x+1}{2(x^2+2x+2)} + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x+1).$$

$$\therefore \quad \int \frac{x\,(2x^2-x+5)}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = \log\,(x^2+2x+2) - \frac{15}{2}\tan^{-1}(x+1) - \frac{11}{2(x^2+2x+2)} - \frac{x+1}{2(x^2+2x+2)}.$$

نوٹ : تکملہ

$$\int \frac{dy}{(y^2+1)^2}$$

کو عوضی تکمل کے طریقے سے $y = \tan\theta$ رکھ کر بھی حاصل کر سکتے ہیں اُس وقت تحویلی فارمولے کی ضرورت نہیں پڑتی۔ ہم پاتے ہیں

$$\int \frac{dy}{(y^2+1)^2} = \int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^4\theta} = \int \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\int (1+\text{cas}\,2\theta)\,d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta),$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\tan^{-1}y + \frac{y}{y^2+1}\right]$$

جو کہ وہی نتیجہ ہے جو تحویلی فارمولے کی مدد سے حاصل کیا گیا تھا

مشقیں

1- ذیل تکملے حاصل کیجیے

(i) $\int \frac{2x-3}{(x^2+x+1)^2}dx,$ (ii) $\int \frac{x+2}{(x+1)(x^2+1)^2}\,dx,$

(iii) $\int \frac{x^3-x^2-1}{(x^2+1)^2(x^2-1)}dx,$ (iv) $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2+2)^2}\,dx$

(v) $\int \frac{x(2x^2-x+5)}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$

(vi) $\int \frac{x^2-21}{(x^2-2x+6)^3}\,dx,$ (vii) $\int \frac{x^2-2}{(x^2+2)^3}\,dx.$

viii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2)^2}\,dx.$

2- حاصل کیجیے

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{2n-3}{2n-2}\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} \cdot$$

ثابت کیجیے

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot$$

جوابات

(i) $-\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{16}{3\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{3} \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1} \cdot$

(ii) $\frac{1+3x}{4(1+x^2)} + \tan^{-1} x + \frac{1}{8} \log \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \cdot$

(iii) $-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + \frac{1}{8} \log \frac{(x+1)^3}{(x^2+1)(x-1)} \cdot$

(iv) $\frac{1}{12} \cdot \frac{x}{2+x^2} - \frac{5\sqrt{2}}{72} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{9} \log \frac{x-1}{x+1} \cdot$

(v) $-\frac{11x-11}{40(x^2-2x+6)} - \frac{5(x-1)+2}{4(x^2-2x+6)^2} - \frac{11\sqrt{5}}{200} \tan^{-1} \frac{x-1}{\sqrt{5}} \cdot$

(vi) $-\frac{x}{8(x^2+2)} - \frac{x}{2(x^2+2)^2} - \frac{\sqrt{2}}{16} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}.$

(vii) $(10-7\sqrt{2})\pi/4.$

3.6. عوضی تکمل کے طریقے سے جبری ناطق تفاعلوں کا تکمل

متغیر بدل کر مناسب نئے متغیر کے ذریعے عوضی تکمل سے بھی اکثر جبری ناطق تفاعلوں کا تکمل آسانی سے ہو جاتا ہے۔

مثالیں

1- حاصل کیجیے

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^3} \cdot$$

یہاں نسب نما میں کئی بار آیا ہوا دو درجی فیکٹر ہے۔

$y = x^2+1$ رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^3} = \int \frac{dy}{2y^3(y-1)}$$

اِس نئے تکاملیہ میں نسب نما میں خطی فیکٹر ہیں۔
مان لیجیے

$$\frac{1}{y^3(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{C}{y^3} + \frac{D}{y-1}.$$

$$\Rightarrow \quad 1 = Ay^2(y-1)+By(y-1)+C(y-1)+Dy^3.$$

اب $y = 0$ اور $y = 1$ رکھنے پر ملتا ہے

$$C = -1, \; D = 1.$$

پھر y^3 اور y^2 کے ضریبوں کی برابری پر ملتا ہے

$$0 = A+D$$
$$0 = -A+B,$$
$$\Rightarrow \quad A = -1, \; B = -1.$$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{y^3(y-1)}\,dy = -\log y + \frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2} + \log(y-1),$$

جہاں $y = x^2+1.$

بقیہ عمل بہ آسانی پورا ہو سکتا ہے۔

نوٹ۔ یہ بہ آسانی دیکھا جا سکتا ہے کہ متغیر تبدیل کرنے پر ملے ہوئے تکاملیہ کو جزوی کسروں میں توڑنا کہیں آسان ہے بہ نسبت اصل تکاملیہ کو جزوی کسروں میں توڑنے کے۔

2۔ حاصل کیجیے

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$x = \tan\theta$ رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \cos^2\theta\, d\theta$$

$$\tfrac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\theta + \sin\theta\cos\theta\right)$$

جب x صفر سے ∞ تک جاتا ہے تو θ صفر سے $\pi/2$. تک جاتا ہے اس لیے θ کی انتہائیں 0 اور $\pi/2$. ہیں۔

$$\therefore \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \tfrac{1}{2}\left|\theta + \sin\theta\cos\theta\right|_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

3۔ حاصل کیجیے

$$\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\, dx.$$

ہم لکھتے ہیں

$$\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1/x^2+1}{1/x^2+x^2} = \frac{1+1/x^2}{(x-1/x)^2+2}$$

اب $y = x - \frac{1}{x}$

$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx = dy$$

$$\therefore \int \frac{1+x^2}{1+x^4}\, dx = \int \frac{dy}{y^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{y}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x-1/x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}.$$

4۔ حاصل کیجیے

$$\int \frac{x^2-1}{1+x^4}\, dx.$$

اب

$$\int \frac{x^2-1}{1+x^4}\, dx = \int \frac{1-1/x^2}{1/x^2+x^2}\, dx$$

$$= \int \frac{(1-1/x^2)}{(x+1/x)^2-2}\, dx.$$

اب $y = x + \frac{1}{x}$ رکھنے پر $\left(1-\frac{1}{x^2}\right) dx = dy$

اس لیے تکملہ

$$= \int \frac{dy}{y^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{y-\sqrt{2}} - \frac{1}{y+\sqrt{2}}\right)dy$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{y-\sqrt{2}}{y+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

مشقیں

1۔ ذیل تفاعلوں کے تکملے نکالیے:

(i) $\frac{x}{x^4+x^2+1}$; (ii) $\frac{2}{(x^2+1)(x^2+3)}$,

(iii) $\frac{x^3}{(x^2+1)^4}$, (iv) $\frac{1}{x(x^2+1)(x^2+2)^2}$,

(v) $\frac{1}{x(x^5+1)}$, (vi) $\frac{1}{x(x^4-1)^2}$.

(vii) $\frac{1}{x(1+x^n)}$.

2۔ حاصل کیجیے

(i) $\int\frac{dx}{x^4+1}$; (ii) $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}dx$,

(iii) $\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx$, (iv) $\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$,

(v) $\int\frac{x^2+3x+1}{x^4-x^2+1}\,dx$, (vi) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{(\tan x)}\,dx$,

(vii) $\int\sqrt{(\cot x)}\,dx$.

3۔ تکملہ

$$\int\frac{x^3}{(x^2+1)^3}\,dx,$$

نکالیے پہلے (a) $x = \tan\theta$ لے کر اور پھر (b) $u = x^2+1$ رکھتے ہوئے اور یہ دکھائیے کہ دونوں طریقوں سے ایک ہی نتیجہ نکلتا ہے۔

جوابات

1. (i) $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{1}{2}\log\frac{x^2+1}{x^2+3}$.

(iii) $\frac{3x^2+1}{12(x^2+1)^3}$ (iv) $\frac{1}{8}\log\frac{x^2(x^2+2)^3}{(x^2+1)^4}-\frac{1}{4(x^2+2)}$.

(v) $\frac{1}{5}\log\frac{x^5}{x^5+1}$ (vi) $\frac{1}{4}\log\frac{x^4}{x^4-1}-\frac{1}{4(x^4-1)}$.

(vii) $\frac{1}{n}\log\frac{x^n}{1+x^n}$

2. (i) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}$.

(ii) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. (iii) $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}$.

(iv) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}-\frac{1}{4}\log\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

(v) $\tan^{-1}\frac{x^2-1}{x}+\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}$.

(vi) $\frac{1}{2}\sqrt{2}\log(\sqrt{2}-1)+\frac{1}{4}\sqrt{2}\pi$.

(vii) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t}$ جہاں $t=\sqrt{(\cot x)}$.

3.7۔ e^x کے جبری ناطق تفاعلوں کا تکمل

متغیر کی تبدیلی $t = e^x$ کردینے پر e^x کے کسی جبری ناطق تفاعل کا تکملہ بہ آسانی t کے جبری ناطق تفاعل کے تکملے میں بدل جاتا ہے۔ جیسا کہ ذیل کی مثالوں سے سمجھایا گیا ہے۔

مثالیں

1۔ حاصل کیجیے

$$\int\frac{4e^x+6e^{-x}}{9e^x-4e^{-x}}dx.$$

یہاں $t = e^x$ رکھنے پر

$$e^x\,dx = dt.$$

$$\therefore \quad \int \frac{4e^x+6e^{-x}}{9e^x-4e^{-x}}\,dx = \int \frac{4t+6/t}{9t-4/t}\cdot\frac{dt}{t}$$
$$= \int \frac{4t^2+6}{t(9t^2-4)}\,dt$$
$$= -\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t}+\frac{35}{12}\int\frac{dt}{3t-2}+\frac{35}{12}\int\frac{dt}{3t+2}$$
$$= -\frac{3}{2}\log t+\frac{35}{36}\log(3t-2)+\frac{35}{36}\log(3t+2)$$
$$= -\frac{3}{2}\log t+\frac{35}{36}\log(9t^2-4)$$
$$= -\frac{3}{2}x+\frac{35}{36}\log(9e^{2x}-4).$$

2- حاصل کیجیے

$$\int_0^\infty \operatorname{sech} x\,dx.$$

اب

$$\int \operatorname{sech} x\,dx = \int \frac{2}{e^x+e^{-x}}\,dx$$
$$= \int \frac{2e^x}{1+e^{2x}}\,dx.$$

یہاں $y = e^x$ رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int \operatorname{sech} x\,dx = \int \frac{2dy}{1+y^2} = 2\tan^{-1} y = 2\tan^{-1} e^x$$

$$\therefore \quad \int_0^\infty \operatorname{sech} x\,dx = \Big| 2\tan^{-1}(e^x)\Big|_0^\infty = 2\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{2}$$

کیوں کہ $\lim_{x\to\infty}(\tan^{-1} e^x) = \frac{\pi}{2}$

مشقیں

1- حاصل کیجیے

(i) $\int \frac{dx}{e^x+e^{2x}}$, (ii) $\int \frac{dx}{(e^x-1)^2}$,

(iii) $\int \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$, (iv) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(e^x-1)^3}\,dx$,

(v) $\int_1^\infty \operatorname{cosech} x\,dx$, (vi) $\int \frac{dx}{1+\cosh x}$.

جوابات

1. (i) $\log(1+e^{-x}) - e^{-x}$. (ii) $(1-e^{x})^{-1} - \log(1-e^{-x})$.
(iii) $-\frac{1}{1+e^{x}}$. (iv) $2\log\frac{e-1}{e} + \frac{2e-1}{e^2-e}$.
(v) $\log[(e+1)/(e-1)]$. (vi) $\tanh\frac{1}{2}x$.

باب 3 پر مشقیں

ذیل تفاعلوں کا تکمل کیجیے

1 - (i) $\frac{2x^3+7x^2+4x+2}{2x+3}$, (ii) $\frac{3x^3-4x^2+5x-6}{x^2+x-6}$,
(iii) $\frac{x^2-3x+3}{x^3-4x^2-7x+10}$, (iv) $\frac{17x^2-x-26}{(x^2-1)(x^2-4)}$.

2 - (i) $\frac{3x^2-5x+4}{x^3-2x^2+3x+6}$, (ii) $\frac{1}{(2+x^2)(1-x^2)}$,
(iii) $\frac{x^2-3x}{x^3-1}$, (iv) $\frac{2x^2-x+3}{x^3+1}$.

3 - (i) $\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$, (ii) $\frac{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)}{(x^2+4)(x^2+5)(x^2+6)}$
(iii) $\frac{1}{x^6+1}$, (iv) $\frac{3x^2+x-2}{(x+1)^3(x^2+1)}$.

4 - (i) $\frac{x^6}{x^3-1}$, (ii) $\frac{1}{x(x^2+a^2)^2}$,
(iii) $\frac{1}{x^{12}(x^6-1)}$, (iv) $\frac{1}{(x-1)^3(x^3+1)}$

5 - (i) $\frac{1}{x(x-1)^2(x^2+1)}$, (ii) $\frac{x^2+2}{(x^2+1)^2}$,
(iii) $\frac{2x+1}{(x^2+1)^3}$, (iv) $\frac{2x}{(1+x)(1+x^2)^2}$
(v) $\frac{1}{(x^2-a^2)(x^2+a^2)^2}$, (vi) $\frac{3x+4}{(2x^2-x+2)^2}$.

6 - حاصل کیجیے

$$\int_0^1 \frac{24t^3}{(1+t^2)^4}\,dt.$$

7 - ثابت کیجیے کہ

$$\int_1^{\infty} \frac{(x^2+3)\,dx}{x^6(x^2+1)} = \frac{1}{30}(58-15\pi)$$

8۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)} = \frac{\pi}{2(a+b)(b+c)(c+a)}$$

9۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\log 3.$$

10۔ تکمل کیجیے

(i) $\frac{\log(x^2+a^2)}{x^2}$ (ii) $x\log(x^2+1)$ (iii) $\frac{\log(1+x^2+x^4)}{x^2}$

(iv) $\frac{\log(1+x+x^2)}{(1+x)^2}$ (v) $e^x\log(e^{2x}+5e^x+6)$ (vi) $\frac{\tan^{-1}x}{(1+x)^2}$

جوابات

1 (i) $\frac{1}{3}(x^3+3x^2-3x)+\frac{6}{8}\log(2x+3)$.

(ii) $\frac{1}{2}(3x^2-14x)+\frac{128}{5}\log(x+3)+\frac{12}{5}\log(x-2)$.

(iii) $\frac{4}{21}\log(x+2)+\frac{25}{28}\log(x-5)-\frac{1}{12}\log(x-1)$.

(iv) $\frac{1}{3}\log[(x-1)^5(x-2)^{10}/(x+1)^4(x+2)^{11}]$.

2. (i) $\frac{6}{5}\log(x+1)+\frac{9}{10}\log(x^2-3x+6)-(1/\sqrt{15})\tan^{-1}[(2x-3)/\sqrt{15}]$.

(ii) $(1/3\sqrt{2})\tan^{-1}(x/\sqrt{2})+\frac{1}{6}[\log(1+x)-\log(1-x)]$.

(iii) $\frac{1}{2}\tan^{-1}x+\frac{3}{4}\log(x^2+1)-\frac{1}{2}\log(x-1)-\log(x+1)$.

(iv) $2\log(x+1)+(2/\sqrt{3})\tan^{-1}[(2x-1)/\sqrt{3}]$.

3. (i) $\log(x-1)^2-\log x-x/(x-1)^2$.

(ii) $x-\frac{3}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}+\frac{24}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}}\ \frac{30}{\sqrt{6}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{6}}$.

(iii) $\frac{1}{3}\tan^{-1}x-\frac{1}{4\sqrt{3}}\log\frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{x^2+\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{x^2-1}{x}$.

(iv) $\frac{1}{2}\log\frac{x^2+1}{(x+1)^2}+\frac{3}{2}\tan^{-1}x+\frac{5}{2(x+1)}$.

4. (i) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}\log(x^3-1)$.

(ii) $\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{1}{2a^4}\log\frac{x^2+a^2}{x^2}$.

(iii) $\frac{1}{6}\{\log[(x^6-1)/x^6]+x^{-6}+\frac{1}{2}x^{-12}\}$.

(iv) $\frac{8}{9}\log(x-1)-\frac{1}{24}\log(x+1)-\frac{1}{8}\log(x^2-x+1)$

$+(\sqrt{3}/3)\tan^{-1}[(2x-1)/\sqrt{3}]+\frac{1}{2}(3x-4)/(x-1)^2$.

5. (i) $\log[x/(x-1)]+\frac{1}{2}\tan^{-1}x-\frac{1}{2}(x-1)^{-1}$.

(ii) $\frac{3}{2}\tan^{-1}x+\frac{1}{2}x/(1+x^2)$.

(iii) $\frac{x-2}{4(x^2+1)^2}+\frac{3x}{8(x^2+1)}+\frac{3}{8}\tan^{-1}x$.

(iv) $\frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{1}{4}\log\frac{x^2+1}{(x+1)^2}$.

(v) $\frac{1}{8a^5}\log\frac{x-a}{x+a}-\frac{1}{2a^5}\tan^{-1}\frac{x}{a}-\frac{1}{4a^4}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}$

(vi) $\frac{19x-16}{15(2x^2-x+2)}+\frac{38\sqrt{15}}{225}\tan^{-1}\frac{4x-1}{\sqrt{15}}$

6. 1.

10. (i) $\frac{2}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}-\frac{1}{x}\log(x^2+a^2)$.

(ii) $\frac{1}{3}x^3\log(x^3+1)-\frac{1}{3}\log(x+1)+\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)$
$+\sqrt{(3/2)}\tan^{-1}[(2x-1)/\sqrt{3}]-\frac{1}{3}x^3$.

(iii) $e^x\log(e^{2x}+5e^x+6)+2\log(e^x+2)+3\log(e^x+3)-2e^x$

(iv) $\frac{(x-1)\tan^{-1}x}{2(x+1)}+\log\sqrt{\left[\frac{1+x}{\sqrt{(1+x^2)}}\right]}$

4

مثلثاتی (Trigonometric) تفاعلوں کا تکمل

4.1 - $\sin^n x$ کا تکمل، جبکہ n مثبت کامل عدد ہو

اگر n مثبت کامل عدد ہو، طاق یا جفت، تو ایک تحویلی فارمولے کی مدد سے $\sin^n x$ کا تکملہ نکالا جاسکتا ہے۔ لیکن اگر n طاق کامل ہو تو $\sin^n x$ کا تکملہ اور بھی آسانی سے متغیر کی تبدیلی $\cos x = t$ کرکے نکل آتا ہے۔ اس لیے تحویلی فارمولا تبھی استعمال کرنا چاہیے جبکہ n جفت کامل عدد ہو۔

مان لیجیے کہ n طاق کامل عدد ہو۔ یعنی $n = 2k+1$ جہاں k کوئی مثبت عدد ہے۔ $t = \cos x$ رکھنے پر $-\sin x\, dx = dt.$

$$\begin{aligned}\therefore \int \sin^n x\, dx &= \int \sin^{2k+1} x\, dx\\ &= \int \sin^{2k} x \sin x\, dx\\ &= -\int (1-\cos^2 x)^k (-\sin x)\, dx\\ &= -\int (1-t^2)^k\, dt.\end{aligned}$$

چونکہ k مثبت کامل عدد ہے، اس لیے تکاملیہ $(1-t^2)^k$ کو دو رکنی فارمولے (*Binomial Formule*) سے $(k+1)$ ارکان کے جوڑ کی شکل میں رکھا جاسکتا ہے اور پھر بہ آسانی ہر رکن کی تکمیل کی جاسکتی ہے۔

$\int \sin^n x\, dx.$ کے لیے تحویلی فارمولا

ہم لکھتے ہیں

$$\int \sin^n x\, dx = \int \sin x . \sin^{n-1} x\, dx.$$

حصے سے تکمل سے ہم پاتے ہیں

$$\begin{aligned}
\int \sin^n x\, dx &= -\cos x \sin^{n-1} x - \int (-\cos x)(n-1) \sin^{n-2} x \cos x\, dx \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x\, (1-\sin^2 x)\, dx \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x\, dx - (n-1) \int \sin^n x\, dx.
\end{aligned}$$

اب $(n-1)\int \sin^n x\, dx$ کو بائیں جانب لے جانے پر ہم پاتے ہیں۔

$$n \int \sin^n x\, dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\, dx,$$

$$\text{(A)} \qquad \Rightarrow \int \sin^n x\, dx = \frac{-\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx$$

جو کہ درکار تحویلی فارمولا ہے۔
یہ فارمولا تکملوں

$\int \sin^n x\, dx$ اور $\int \sin^{n-2} x\, dx$

میں رابطہ قائم کرتا ہے۔ اس کے متواتر استعمال سے $\sin x$, کی طاق یا جفت کسی بھی قوت کا تکمل مل سکتا ہے لیکن یہ فارمولا تبھی استعمال کرنا چاہیے جبکہ n جفت ہو۔

مثالیں

تکمل کیجیے

(i) $\sin^5 x$ (ii) $\sin^6 x$

(i) چونکہ $n = 5$ جو کہ طاق ہے اس لیے ہم عیوضی تکمل کرتے ہیں۔ $\cos x = t$ رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\begin{aligned}
\int \sin^5 x\, dx &= -\int (1-t^2)^2\, dt \\
&= -\int (1-2t^2+t^4)\, dt \\
&= -[t - \tfrac{2}{3}t^3 + \tfrac{1}{5}t^5] = -[\cos x - \tfrac{2}{3}\cos^3 x + \tfrac{1}{5}\cos^5 x].
\end{aligned}$$

(ii) چونکہ $n = 6$، جو کہ جفت ہے اِس لیے ہم تحویلی فارمولا استعمال کرتے ہیں

$\sin^n x$ کے تکمیل کے لیے اوپر کے تحویلی فارمولے میں n کی جگہ ترتیب وار 6، 4 اور 2 رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$(i) \ldots\ldots \int \sin^6 x\, dx = -\frac{\cos x \sin^5 x}{6} + \frac{5}{6}\int \sin^4 x\, dx$$

$$(ii) \ldots\ldots \int \sin^4 x\, dx = -\frac{\cos x \sin^3 x}{4} + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\, dx,$$

$$\int \sin^2 x\, dx = -\frac{\cos x \sin x}{2} + \frac{1}{2}\int \sin^0 x\, dx$$

$$(iii) \ldots\ldots = -\frac{\cos x \sin x}{2} + \tfrac{1}{2} x$$

اب (ii) اور (iii) سے ہم پاتے ہیں

$$(iv) \ldots\ldots \int \sin^4 x = -\frac{\cos x \sin^3 x}{4} - \frac{3}{8}\cos x \sin x + \frac{3}{8} x.$$

آخر میں (i) اور (iv) سے ہم پاتے ہیں

$$\int \sin^6 x\, dx = -\frac{\cos x \sin^5 x}{6} - \frac{5\cos x \sin^3 x}{24} - \frac{5\cos x \sin x}{16} + \frac{5}{16}x$$

مشقیں

حاصل کیجیے

1. (i) $\int \sin^2 x\, dx.$ (ii) $\int \sin^3 x\, dx.$ (iii) $\int \sin^4 x\, dx.$

2. (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\, dx.$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x\, dx.$ (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x\, dx.$

جوابات

1. (i) $\tfrac{1}{2}(x - \sin x \cos x).$ (ii) $-[\cos x - \tfrac{1}{3}\cos^3 x$
(iii) $-\tfrac{1}{4}\cos x \sin^3 x - \frac{3}{8}\cos x \sin x + \frac{3}{8} x$

2. (i) 16/35. (ii) $35\pi/256$. (iii) 128/315.

4·11 - معین تکملہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx,$$

حاصل کرنا، جبکہ n کوئی مثبت کامل عدد ہو۔

پہلے ہم تحویلی فارمولا (A) حاصل کرتے ہیں، یعنی

$$\int \sin^n x\, dx = -\frac{\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx.$$

اس سے ملتا ہے

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x\, dx = \left|-\frac{\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n}\right|_0^{\frac{1}{2}\pi} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-2} x\, dx$$

$$= 0 + \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-2} x\, dx.$$

اب

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx,$$

لکھنے پر ہم رابطی فارمولا

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

پاتے ہیں۔ اس کی مدد سے ہم متواتر I_{n-2} کا I_{n-4} سے، I_{n-4} کا I_{n-6} سے، اور آخر میں n طاق ہو تو I_3 کا I_1 سے یا n جفت ہو تو I_1 کا I_0 سے رابطہ قائم کر سکتے ہیں۔ اس طرح ہم پاتے ہیں

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2},$$

$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4},$$

$$I_{n-4} = \frac{n-5}{n-4} I_{n-6},$$

$$\begin{cases} I_3 = \frac{2}{3} I_1, & (\text{اگر } n \text{ طاق ہو}) \\ I_2 = \frac{1}{2} I_0, & (\text{اگر } n \text{ جفت ہو}) \end{cases}$$

اِن سے ہم پاتے ہیں

$$I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots\cdots \frac{2}{3} I_1, & (\text{جب } n \text{ طاق ہو}) \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots\cdots \frac{1}{2} I_0, & (\text{جب } n \text{ جفت ہو}) \end{cases}$$

اب

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \; dx = \Big|-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, . \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots\cdots \frac{2}{3}, & (\text{جبکہ } n \text{ طاق ہو}) \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & (\text{جبکہ } n \text{ جفت ہو}) \end{cases}$$

مثال

حاصل کیجیے

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \, dx,$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x \, dx.$

ہم پاتے ہیں

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \; dx = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{35},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x \; dx = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{35\pi}{256}$$

مشقیں

1. حاصل کیجیے

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \, dx,$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \, dx,$ (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x \, dx$

2۔ حاصل کیجیے

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 2x\, dx$, (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^6 3x\, dx$, (iii) $\int_0^{\pi} \sin^5 (\frac{1}{2}x)\, dx$.

3۔ حاصل کیجیے

(i) $\int_0^{\pi} \frac{\sin^4 \theta\, d\theta}{(1+\cos\theta)^2}$ (ii) $\int_0^{\pi} \sin^2 \theta \frac{\sqrt{(1-\cos\theta)}}{1+\cos\theta}\, d\theta$.

جوابات

1. (i) 8/15. (ii) $5\pi/32$. (iii) $63\pi/512$.
2. (i) $3\pi/32$. (ii) $5\pi/96$. (iii) 16/15.
3. (i) $3\pi/2$. (ii) $8\sqrt{2}/3$.

4·2۔ $\cos^n x$ کا تکمل، جبکہ n مثبت کامل عدد ہو

اگر n کوئی مثبت کامل عدد ہو تو $\cos^n x$ کا تکمل ایک تحویلی فارمولے کی مدد سے کیا جا سکتا ہے لیکن اگر n طاق کامل عدد ہو تو $\cos^n x$ کا تکمل کہیں زیادہ آسانی سے متغیر کی تبدیلی $\sin x = t$ سے کیا جا سکتا ہے۔

مان لیجیے n طاق ہے یعنی $n = 2k+1$ جہاں k کوئی مثبت کامل عدد $\sin x =$ رکھنے پر $\cos x\, dx = dt$۔

ہم پاتے ہیں

$$\int \cos^n x\, dx = \int \cos^{2k+1} x\, dx$$
$$= \int \cos^{2k} x \,.\, \cos x\, dx$$
$$= \int (1-\sin^2 x)^k \,.\, \cos x\, dx$$
$$= \int (1-t^2)^k\, dt,$$

چونکہ $(1-t^2)^k$ کو دو رکنی فارمولے سے کھول کر بہ آسانی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$\int \cos^n x\, dx$ کے لیے تحویلی فارمولا

ہم لکھتے ہیں

$$\int \cos^n x\, dx = \int \cos x \,.\, \cos^{n-1} x\, dx$$

جس سے کہ حصہ سے تکمل پر ملتا ہے

$$\begin{aligned}\int \cos^n x\, dx &= \sin x \,.\, \cos^{n-1} x - \int \sin x.\, (n-1) \cos^{n-2} x.\, (-\sin x) dx \\ &= \sin x \,.\, \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x\, (1-\cos^2 x)\, dx \\ &= \sin x \,.\, \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x\, dx - (n-1) \int \cos^n x\, dx \\ \Rightarrow\quad n \int \cos^n x\, dx &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x\, dx,\end{aligned}$$

$$(B) \cdots\cdots \Rightarrow \int \cos^n x\, dx = \frac{\sin x \,.\, \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx$$

جو کہ درکار تحویلی فارمولا ہے۔

4.21 ۔ معین تکمل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$ کی قیمت نکالنا

جیسے کہ §4.11 میں دکھایا گیا ہے، ہم دکھا سکتے ہیں کہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \dfrac{n-5}{n-4} \cdots \dfrac{2}{3}, & (\text{جبکہ } n \text{ طاق ہو}) \\ \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \dfrac{n-5}{n-4} \cdots \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (\text{جبکہ } n \text{ جفت ہو}) \end{cases}$$

اب تکملوں

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx \quad \text{اور} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx,$$

کی قیمتوں کا مقابلہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ n کی قیمت کے لیے

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx,$$

اس نتیجے کو متغیر $x - \frac{\pi}{2} = y$ رکھنے پر براہ راست ثابت کر سکتے ہیں۔

مشقیں

ذیل کے تکملوں کی قیمت لکھیے

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x\, dx$, (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x\, dx$, (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^6 2t\, dt$.

جوابات.

(i) 16/35. (ii) $35\pi/256$, (iii) $5\pi/64$.

ضمنی نتیجہ (Corollary): معین تکملوں

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$ اور $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$

کی قیمتوں کی مدد سے ہم براہ راست ذیل معین تکملوں کی قیمت لکھ سکتے ہیں:-

(i) $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{(1-x^2)}}\, dx$, (ii) $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx$, (iii) $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$,

جہاں n کوئی مثبت کامل عدد ہے۔

(i) ہم $x = \sin\theta$ رکھتے ہیں اور یہ نوٹ کرتے ہوئے کہ جب $x = 0$ تو $\theta = 0$ اور جب $x = 1$ تو $\theta = \pi/2$ یہ دیکھتے ہیں کہ θ کی حدیں 0 اور $\pi/2$ ہیں۔ اس متغیر کی تبدیلی سے ہم پاتے ہیں

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{(1-x^2)}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n\theta \cos\theta d\theta}{\cos\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\, d\theta.$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{2}{3}, & (\text{جبکہ } n \text{ طاق ہو}) \\ \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & (\text{جبکہ } n \text{ جفت ہو}) \end{cases}$$

(ii) ہم $x = \tan\theta$ رکھتے ہیں اور نوٹ کرتے ہیں کہ جب $x = 0$ تو $\theta = 0$ اور جب $x \to \infty$ تو $\theta \to \pi/2$ جس سے کہ نئے متغیر θ کی حدیں 0 اور $\pi/2$ ہیں اس متغیری تبدیلی سے ہم پاتے ہیں۔

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^{2n}\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}\theta\, d\theta$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2n-3}{2n-2} \cdot \dfrac{2n-5}{2n-4} \cdot \dfrac{2n-7}{2n-6} \cdots \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (\text{اگر } n>1 \text{ ہو}) \\ \dfrac{\pi}{2} & (\text{اگر } n=1 \text{ ہو}) \end{cases}$$

(iii) ہم $x = \tan\theta$ رکھنے پر پاتے ہیں

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^{2n+1}\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdots\cdots \frac{2}{3}$$

مشقیں

ذیل معین تکملے حاصل کیجیے

1. $\int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{(1-x^2)}}\, dx.$ 2. $\int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{(1-x^2)}}\, dx.$

3. $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^5}\,dx.$

4. $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{7}{2}}}\,dx.$

5. $\int_0^1 \frac{x^2(2-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)}}\,dx.$

6. $\int_0^1 x^2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx.$

7. $\int_0^a x^2(a^2-x^2)^{\frac{9}{2}}\,dx.$

8. $\int_0^a x^4\sqrt{(a^2-x^2)}\,dx,$

9. $\int_0^a \frac{x^4}{\sqrt{(a^2-x^2)}}\,dx.$

10. $\int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt{(1-x^4)}}\,dx.$

11. $\int_0^1 x^5\sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)}dx.$

12. $\int_0^\infty \frac{x^3}{\sqrt{(1+x^6)^7}}\,dx.$

13. $\int_0^1 x^5 \sin^{-1} x\,dx.$

14. $\int_0^1 x^6 \sin^{-1} x\,dx.$

جوابات

1. $\frac{8}{15}$.
2. $\frac{5\pi}{32}$.
3. $\frac{35\pi}{256}$.
4. $\frac{8}{15}$.
5. $\frac{5\pi}{16}$.
6. $\frac{\pi}{32}$.
7. $\frac{21\pi}{2048}a^{12}$.
8. $\frac{\pi}{32}a^6$.
9. $\frac{3\pi}{16}a^4$.
10. $\frac{1}{3}$
11. $\frac{3\pi+8}{24}$.
12. $\frac{8}{45}$.
13. $\frac{11\pi}{192}$.
14. $\frac{\pi}{14}-\frac{16}{245}$.

4·3 $\sin^p x \cos^q x$ کا تکمل جبکہ p اور q مثبت کامل عدد ہوں

اس کا تکمل p کے طاق ہونے پر $t = \cos x$ اور q کے طاق ہونے پر $t = \sin x$ رکھ کر کیا جا سکتا ہے۔ اگر p اور q دونوں جفت ہوں تو تکمل ایک تحویلی فارمولے کی مدد سے کیا جا سکتا ہے۔

مان لیجیے p طاق ہے، یعنی $p = 2k+1$۔ اب $t = \cos x$ رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^q x\,dx = -\int (1-t^2)^k t^q\,dt;$$

جس کی قیمت $(1-t^2)^k$ کو دورکنی فارمولے سے کھولنے پر کی جا سکتی ہے۔
اسی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ اگر q طاق ہو تو $\sin x = t$ رکھ کر اس تفاعل کا تکمل ہو سکتا ہے۔
اگر p اور q دونوں ہی طاق ہوں تو دو میں سے کسی طریقے سے تکمیل کر سکتے ہیں۔
$\int \sin^p x \cos^q x \, dx$ کے لیے تحویلی فارمولا
ہم لکھتے ہیں

$$\int \sin^p x \cos^q x \, dx = \int \sin^{p-1} x (\sin x \cos^q x) \, dx$$

اور حصہ سے تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\begin{aligned}
&\int \sin^p x \cos^q x \, dx \\
&= -\frac{\cos^{q+1} x}{q+1} \sin^{p-1} x + \int \frac{\cos^{q+1} x}{q+1} \cdot (p-1) \sin^{p-2} x \cos x \, dx \\
&= -\frac{\cos^{q+1} x \sin^{p-1} x}{q+1} + \frac{p-1}{q+1} \int \sin^{p-2} x \cos^q x (1-\sin^2 x) \, dx. \\
&= -\frac{\cos^{q+1} x \sin^{p-1} x}{q+1} + \frac{p-1}{q+1} \int \sin^{p-2} x \cos^q x \, dx \\
&\qquad -\frac{p-1}{q+1} \int \sin^p x \cos^q x \, dx
\end{aligned}$$

اب

$$\frac{p-1}{q+1} \int \sin^p x \cos^q x \, dx,$$

کو بائیں جانب منتقل کرنے اور $1+(p-1)/(q+1)$ یعنی $(p+q)/(q+1)$ سے تقسیم کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$(C) \; \ldots\ldots \int \sin^p x \cos^q x \, dx = -\frac{\cos^{q+1} x \sin^{p-1} x}{p+q} + \frac{p-1}{p+q} \int \sin^{p-2} x \cos^q x \, dx,$$

جو کہ درکار تحویلی فارمولا ہے۔

اسی طرح یہ بھی ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\int \sin^p x \cos^q x \, dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+q} + \frac{q-1}{p+q} \int \sin^p x \cos^{q-2} x \, dx.$$

نوٹ : اگر p طاق ہو تو متغیر کی تبدیلی $t = \cos x$ فائدہ مند ہوتی ہے خواہ q کامل عدد نہ بھی ہو۔

مشقیں

1۔ تکمل کیجیے

(i) $\sin^3 x \cos^4 x$, (ii) $\sin^4 x \cos^9 x$, (iii) $\tan^3 x \sec^3 x$.

2۔ حاصل کیجیے

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{3/2} x \cos^3 x \, dx.$$

3۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin \theta} \cos^5 \theta \, d\theta = \frac{64}{231}.$$

4۔ ثابت کیجیے کہ

(i) $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x.$

(ii) $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sin x} dx = \frac{\sin^4 x}{4} - \sin^2 x + \log \sin x.$

5۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int \frac{\sin^6 x}{\cos x} dx = -\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^3 x}{3} - \sin x + \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

6۔ ذیل تکملے حاصل کیجیے

(i) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$, (ii) $\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx$

(iii) $\int \sin^4 x \cos^4 x \, dx$, (iv) $\int \sin^2 x \cos^6 x \, dx$.

جوابات

1. (i) $\frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{1}{5}\sin^5 x$. (ii) $\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x$. (iii) $\frac{1}{5}\sec^5 x-\frac{1}{3}\sec^3 x$.

2. $\frac{8}{45}$

6. (i) $-\frac{1}{4}\sin x\cos^3 x+\frac{3}{8}(x+\sin x\cos x)$.

(ii) $\frac{1}{6}\cos^3 x\sin^3 x+\frac{1}{8}\sin^3 x\cos x+\frac{1}{16}(x-\sin x\cos x)$

(iii) $-\frac{1}{8}\cos^5 x\sin^3 x-\frac{1}{16}\cos^5 x\sin x+\frac{1}{64}\sin x\cos^3 x$
$+\frac{3}{128}(x+\sin x\cos x)$.

(iv) $\frac{1}{8}\sin^3 x\cos^5 x+\frac{5}{48}\sin^3 x\cos^3 x+\frac{5}{64}\sin^3 x\cos x$
$+\frac{5}{128}(x-\sin x\cos x)$.

4·31۔ معین تکملہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x \, dx,$$

کی قیمت حاصل کرنا، جبکہ p اور q مثبت کامل عدد ہوں

ہم لکھتے ہیں

$$I_{p,q}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x \, dx.$$

اب § 4·3 کے تحویلی فارمولے (C) سے ہم پاتے ہیں

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x \, dx=-\left|\frac{\cos^{q+1} x \sin^{p-1} x}{p+q}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{p-1}{p+q}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-2} x \cos^q x \, dx$$

$$=\frac{p-1}{p+q}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-2} x \cos^q x \, dx.$$

اپنی علامتوں (notation) میں ہم پاتے ہیں

$$I_{p,q}=\frac{p-1}{p+q}\cdot I_{p-2,q}$$

اس سے p کی جگہ $p-2$ رکھنے پر

$$I_{p-2,\,q}=\frac{p-3}{p+q-2}\cdot I_{p-4,\,q},$$
$$I_{p-4,\,q}=\frac{p-5}{p+q-4}\cdot I_{p-6,\,q},$$

....

....

آخر میں

$$\left.\begin{array}{ll} I_{3,\,q}=\dfrac{2}{3+q}\cdot I_{1,\,q}, & \text{جب } p \text{ طاق ہو} \\ I_{2,\,q}=\dfrac{1}{2+q}\cdot I_{0,\,q}, & \text{جب } p \text{ جفت ہو}\end{array}\right\}$$

اس طرح

$$I_{p,\,q}=\begin{cases}\dfrac{p-1}{p+q}\cdot\dfrac{p-3}{p+q-2}\cdots\cdots\dfrac{2}{3+q}\cdot I_{1,\,q}, & (\text{جب } p \text{ طاق ہو})\\ \dfrac{p-1}{p+q}\cdot\dfrac{p-3}{p+q-2}\cdots\cdots\dfrac{1}{2+q}\cdot I_{0,\,q}, & (\text{جب } p \text{ جفت ہو})\end{cases}$$

اب

$$I_{1,\,q}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^q x\,dx=-\left|\frac{\cos^{q+1}x}{q+1}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{q+1}$$
$$I_{0,\,q}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0 x\cos^q x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^q x\,dx,$$

جو کہ 4·21 § میں حاصل کیا جا چکا ہے۔

اس طرح اگر p طاق ہو تو ہم پاتے ہیں

$$I_{p,\,q}=\frac{p-1}{p+q}\cdot\frac{p-3}{p+q-2}\cdots\cdots\frac{2}{3+q}\cdot\frac{1}{q+1},$$

جہاں q طاق یا جفت ہو سکتا ہے۔

اگر p جفت اور q طاق ہو تو

$$I_{p,\,q}=\frac{p-1}{p+q}\cdot\frac{p-3}{p+q-2}\cdot\frac{p-5}{p+q-4}\cdots\cdots\frac{1}{2+q}\times\frac{q-1}{q}\cdot\frac{q-3}{q-2}\cdots\cdots\frac{2}{3}$$

اگر p جفت ہو اور q بھی جفت ہو تو

$$I_{p,q} = \frac{p-1}{p+q} \cdot \frac{p-3}{p+q-2} \cdot \frac{p-5}{p+q-4} \cdots\cdots \frac{1}{2+q}$$
$$\times \frac{q-1}{q} \cdot \frac{p-3}{q-2} \cdots\cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

اوپر دیے ہوئے تکملے کی قیمت لکھنے کے لیے ہم کو یہ اصول ملتا ہے

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x \, dx = \frac{(p-1)(p-3)\ldots(q-1)(q-3)\ldots}{(p+q)(p+q-2)\ldots\ldots}$$

اور داہنی طرف آخر میں فیکٹر $\frac{\pi}{2}$ ملتا ہے جبکہ p اور q دونوں جفت ہوں، اس میں فیکٹروں کی تین قسمیں ہیں جو $p-1$ ، $q-1$ اور $p+q$ سے شروع ہوکر دو دو کرکے گھٹتی ہیں اور یا 1 پر ختم ہوتی ہیں یا 2 پر، یہ اس پر منحصر ہے کہ اُس قسم کا پہلا فیکٹر طاق تھا یا جفت۔

مثالیں

ذیل تکملوں کی قیمت لکھیے

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^6 x \, dx$, (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^8 x \, dx$.

ہم پاتے ہیں

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^6 x \, dx = \frac{4.2.5.3.1}{11.9.7.5.3.1} = \frac{8}{693}$,

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^8 x \, dx = \frac{5.3.1.7.5.3.1}{14.12.10.8.6.4.2} \quad \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4096}$.

مشقیں

حاصل کیجیے

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos^4 \theta \, d\theta$, (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin^4 x \, dx$

(*iii*) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin 3x \, dx,$ (*iv*) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 2x \sin^4 4x \, dx$

جوابات

(*i*) 2/35. (*ii*) 8/315. (*iii*) 13/35. (*iv*) 128/1155.

ضمنی نتیجہ:

معین تکملہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x \, dx$$

کی قیمت کی مدد سے ہم ذیل تکملوں کی قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔

(*i*) $\int_0^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)^m} \, dx,$ (*ii*) $\int_0^{\infty} \frac{x^n \, dx}{(1+x^2)^{(m+\frac{1}{2})}}$

(*iii*) $\int_0^{2a} x^m \sqrt{(2ax-x^2)} \, dx,$

جہاں n, m مثبت کامل عدد ہیں۔

(*i*) $x = \tan\theta$ رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)^m} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n\theta \cos^{2m}\theta}{\cos^n\theta} . \sec^2\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta \cos^{2m-(n+2)}\theta \, d\theta$$

جس کی کہ قیمت معلوم ہے۔

(*ii*) $x = \tan\theta$ رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)^{(m+\frac{1}{2})}} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta \cos^{2m-(n+1)}\theta \, d\theta,$$

جس کی کہ قیمت معلوم ہے۔

(*iii*) ہم لکھتے ہیں

$$\int_0^{2a} x^m \sqrt{(2ax-x^2)} \, dx = \int_0^{2a} x^m \sqrt{[a^2-(a-x)^2]} \, dx.$$

اب ہم رکھتے ہیں

$$a-x = a\cos\theta$$
$$\therefore \quad dx = a\sin\theta\, d\theta.$$

پھر

$$x = a(1-\cos\theta) = 2a\sin^2(\theta/2).$$

اب x کے 0 اور $2a$ ہونے پر θ ترتیب وار 0 اور π ہوتا ہے۔

اس لیے دیا ہوا تکملہ

$$= \int_0^\pi 2^m a^m \sin^{2m}\frac{\theta}{2}\cdot a\sin\theta\cdot a\sin\theta\, d\theta$$

$$= (2a)^{m+2}\int_0^\pi \sin^{2m+2}\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

اب ہم $\phi = (\theta/2)$ رکھتے ہیں اور تب تکملہ

$$(2a)^{m+2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+2}\phi\cos^2\phi\, d\phi$$

$$= (2a)^{m+2}\cdot 2\,\frac{(2m+1)(2m-1)\ldots\ldots 1}{(2m+4)(2m+2)\ldots\ldots 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \pi(2a)^{m+2}\cdot\frac{(2m+1)(2m-1)\ldots\ldots 1}{(2m+4)(2m+2)\ldots\ldots 2}$$

$$= \pi\,\frac{a^{m+2}}{2^m}\cdot\frac{(2m+1)!}{(m+2)!\,(m)!}$$

مشقیں

ذیل میں تکملے حاصل کیجیے

1. $\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^4}\,dx.$
2. $\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^3}\,dx.$
3. $\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^{7/2}}\,dx.$
4. $\int_0^\infty \frac{x^3}{(1+x^2)^{9/2}}\,dx.$
5. $\int_0^\infty \frac{t^4\,dt}{(1+t^2)^4}$
6. $\int_0^{2a} x^2\sqrt{(2ax-x^2)}\,dx.$
7. $\int_0^2 x^3\sqrt{(2x-x^2)}\,dx.$
8. $\int_0^2 x^{5/2}\sqrt{(2-x)}\,dx.$
9. $\int_0^{2a} x^{9/2}(2a-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$

10. $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{(4+x^2)^2}$ 11. $\int_0^1 x^{3/2} (1-x)^{3/2}\, dx.$

جوابات

1. $\frac{\pi}{32}$. 2. $\frac{1}{4}$. 3. $\frac{2}{15}$. 4. $\frac{2}{35}$. 5. $\frac{\pi}{32}$.

6. $\frac{5\pi}{8}a^4$. 7. $\frac{7\pi}{8}$. 8. $\frac{5\pi}{8}$. 9. $\frac{63\pi}{8}a^5$. 10. $\frac{1}{3}$.

11. $\frac{3\pi}{128}$.

4·4 - $\tan^n x$ اور $\cot^n x$ کا تکمل، جبکہ n کوئی مثبت کامل عدد ہو

اب ہم ایسے تحویلی فارمولے نکالیں گے جن کی مدد سے $\tan x$ اور $\cot x$ کی مثبت کامل اعداد قوتوں کا تکمل کیا جا سکتا ہے۔

4·41 - $\int \tan^n x\, dx$ کے لیے تحویلی فارمولا

ہم پاتے ہیں

$$\begin{aligned}\int \tan^n x\, dx &= \int \tan^{n-2} x \tan^2 x\, dx\\ &= \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1)\, dx\\ &= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x\, dx - \int \tan^{n-2} x\, dx\\ (D) \quad \ldots\ldots\ldots &= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\, dx\end{aligned}$$

جو کہ درکار تحویلی فارمولا ہے۔

4·42 - $\int \cot^n x\, dx$ کے لیے تحویلی فارمولا

ہم پاتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int \cot^n x\, dx &= \int \cot^{n-2} x \,.\, \cot^2 x\, dx\\ &= \int \cot^{n-2} x \,.\, (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\, dx\\ &= \int \cot^{n-2} x \operatorname{cosec}^2 x\, dx - \int \cot^{n-2} x\, dx\\ (E) \quad \ldots\ldots\ldots &= -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x\, dx,\end{aligned}$$

جوکہ درکار تحویلی فارمولا ہے۔

مثالیں

حاصل کیجیے

1. $\int \tan^6 x \, dx.$ 2. $\int \cot^5 x \, dx$

1۔ فارمولا (D) میں ترتیب وار $n = 6$، 4 اور 2 رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$(i) \quad \cdots\cdots \int \tan^6 x \, dx = \frac{\tan^5 x}{5} - \int \tan^4 x \, dx.$$

$$(ii) \quad \cdots\cdots \int \tan^4 x \, dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \int \tan^2 x \, dx.$$

$$(iii) \quad \cdots\cdots \int \tan^2 x \, dx = \frac{\tan x}{1} - \int \tan^0 x \, dx = \tan x - x.$$

اب (ii) اور (iii) سے ہم پاتے ہیں

$$(iv) \quad \cdots\cdots \int \tan^4 x \, dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x$$

پھر (i) اور (iv) سے ہم پاتے ہیں

$$\int \tan^6 x \, dx = -\frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x.$$

2۔ فارمولا (E) میں ترتیب وار $n = 5$ اور 3 رکھنے پر ملتا ہے۔

$$\int \cot^5 x \, dx = -\frac{\cot^4 x}{4} - \int \cot^3 x \, dx \, ;$$

$$\int \cot^3 x \, dx = -\frac{\cot^2 x}{2} - \int \cot x \, dx \, ;$$

$$= -\frac{\cot^2 x}{2} - \log \sin x.$$

$$\int \cot^5 x \, dx = -\frac{\cot^4 x}{4} + \frac{\cot^2 x}{2} + \log \sin x.$$

مشقیں

حاصل کیجیے

(i) $\int \tan^2 x \, dx$, (ii) $\int \cot^6 x \, dx$, (iii) $\int_0^{\pi/4} \tan^4 x \, dx$, (iv) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^4 x \, dx$.

جوابات

(i) $\frac{1}{2}\tan^2 x - \log \sec x$. (ii) $-\frac{1}{5}\cot^5 x + \frac{1}{3}\cot^3 x - \cot x - x$.

(iii) $(3\pi - 8)/12$. (iv) $(3\pi - 8)/12$.

4.5 – $\sec^n x$ کا تکمل کرنا، جبکہ n مثبت کامل عدد ہو

اگر n مثبت کامل عدد ہو تو ایک تحویلی فارمولے کے ذریعے $\sec^n x$ کا تکمل کر سکتے ہیں۔ لیکن اگر n جفت مثبت کامل عدد ہو تو $\sec^n x$ کا تکمل اور بھی آسانی سے متغیر کی تبدیلی $t = \tan x$ سے کر سکتے ہیں اور یہ تحویلی فارمولے سے بہتر طریقہ ہے۔

مان لیجیے n جفت ہے، یعنی $n = 2k$ جہاں k مثبت کامل عدد ہے۔

$t = \tan x$ رکھنے پر ہم پاتے ہیں $\sec^2 x\, dx = dt$.

ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\int \sec^n x\, dx = \int \sec^{2k} x\, dx$$
$$= \int \sec^{2k-2} x \sec^2 x\, dx$$
$$= \int (1+t^2)^{k-1}\, dt,$$

جس کا تکمل $(1+t^2)^{k-1}$ کو دو رکنی فارمولے سے کھولنے پر ہو سکتا ہے۔

$\int \sec^n x\, dx$ کے لیے تحویلی فارمولا

ہم لکھتے ہیں

$$\int \sec^n x\, dx = \int \sec^{n-2} x \,.\, \sec^2 x\, dx.$$

حصے سے تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int \sec^n x\, dx = \tan x \,.\, \sec^{n-2} x - \int \tan x \,.\, (n-2) \sec^{n-2} x \,.\, \tan x\, dx$$
$$= \tan x \,.\, \sec^{n-2} x - (n-2) \int \sec^{n-2} x\, (\sec^2 x - 1)\, dx$$
$$= \tan x \,.\, \sec^{n-2} x - (n-2)\left[\int \sec^n x\, dx - \int \sec^{n-2} x\, dx\right]$$

اب $\int \sec^n x\, dx$ $(n-2)$ کو بائیں طرف منتقل کرنے اور $(n-2)+1$ یعنی $(n-1)$ سے تقسیم کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$(F) \ldots\ldots \int \sec^n x\, dx = \frac{\tan x \,.\, \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\, dx$$

جو کہ $\sec^n x$ اور $\sec^{n-2} x.$ کے تکملوں کے درمیان رابطہ قائم کرنے والا فارمولا ہے۔

4·52 — $\text{cosec}^n x$ کا تکمل کرنا جبکہ n مثبت کامل عدد ہو

ہم آسانی سے دکھا سکتے ہیں کہ اگر n جفت ہو تو $\text{cosec}^n x$ کا تکمل متغیر کی تبدیلی $\cot x = t$ کے ذریعے کیا جا سکتا ہے اور اگر n طاق ہو تو ایک تحویلی فارمولے کی ضرورت ہوتی ہے جو کہ § 4·51. کی طرح سے نکالا جا سکتا ہے۔

$\int \text{cosec}^n x\, dx$ کے لیے تحویلی فارمولا یہ ہے

$$(G) \quad \int \text{cosec}^n x\, dx = -\frac{\cot x\, \text{cosec}^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \text{cosec}^{n-2} x\, dx.$$

مشقیں

1- حاصل کیجیے

(i) $\int \sec^3 x\, dx,$ (ii) $\int \sec^4 x\, dx,$
(iii) $\int \sec^5 x\, dx,$ (iv) $\int \sec^6 x\, dx.$

2- حاصل کیجیے

(i) $\int \text{cosec}^3 x\, dx,$ (ii) $\int \text{cosec}^4 x\, dx,$
(iii) $\int \text{cosec}^5 x\, dx.$

جوابات

(i) $\frac{1}{2}\tan x \sec x+\frac{1}{2}\log(\sec x+\tan x)$.
(ii) $\frac{1}{3}\tan x \sec^2 x+\frac{2}{3}\tan x$.
(iii) $1/4 \tan x \sec^3 x+3/8 \tan x \sec x+3/8 \log(\sec x+\tan x)$.
(iv) $1/5 \tan x \sec^4 x+4/15 \tan x \sec^2 x+8/15 \tan x$.

2. (i) $-\frac{1}{2}\cot x \operatorname{cosec} x+\frac{1}{2}\log\tan(\frac{1}{2}x)$.
(ii) $-\frac{1}{3}\cot x \operatorname{cosec}^2 x-2/3 \cot x$.
(iii) $-\frac{1}{4}\cot x \operatorname{cosec}^3 x-3/8 \cot x \operatorname{cosec} x+3/8 \log\tan(\frac{1}{2}x)$.

نوٹ : چونکہ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ اور $\operatorname{cosec} x$ کی کامل عدد منفی قوتیں (integral negative powers) ترتیب وار $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$, $\cot x$, $\tan x$, $\cos x$ اور $\sin x$ کی کامل عدد مثبت قوتیں (integral positive powers) ہیں اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ § 4·1 سے § 4·5 تک کی مدد سے $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ اور $\operatorname{cosec} x$ کے منفی کامل عدد قوتوں کے تکملے بھی نکل سکتے ہیں۔

ان تفاعلوں کی کسری قوتوں (fractional powers) جیسے کہ

$$\sin^{1/2}x,\quad \tan^{1/5}x$$

کے تکملے عام طور پر ان ابتدائی فارمولوں سے نہیں حاصل ہو سکتے۔ لیکن ایک خاص صورت میں p اور q کے کسری ہونے پر بھی $\sin^p x \cos^q x$ کا تکملہ نکل سکتا ہے۔ ہم اب اسی خاص صورت پر غور کریں گے۔

4·6 - $\sin^p x \cos^q x$ کا تکمل کرنا، جبکہ $p+q$ منفی جفت کامل عدد ہے۔

مان لیجیے $p+q=-2n$, جہاں n مثبت کامل عدد ہے۔ اس صورت میں متغیر کی تبدیلی $t=\tan x$ کرنے پر

$$\sec^2 x\, dx = dt \Rightarrow dx = dt/(1+t^2)$$

ساتھ ہی

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{(1+t^2)}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)}}.$$

$$\therefore \quad \int \sin^p x \cos^q x\, dx = \int \frac{t^p}{(1+t^2)^{p/2}} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^{q/2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \int t^p \cdot \frac{1}{(1+t^2)^{(p+q+2)/2}}\, dt$$

$$= \int t^p (1+t^2)^{n-1}\, dt$$

جس کا تکمل $(1+t^2)^{n-1}$ کو دو رکنی فارمولے سے کھولنے پر ہو سکتا ہے۔

مثال

حاصل کیجیے

$$\int \sqrt{\cot x}\,.\,\sec^4 x\, dx.$$

ہم پاتے ہیں

$$\sqrt{\cot x}\,.\,\sec^4 x = \sin^{-\frac{1}{2}} x \cos^{-\frac{7}{2}} x,$$

اس طرح سے $p+q=-4,$ نفی جفت کامل عدد ہے۔

اب $t = \tan x$ رکھنے پر $dx = dt/(1+t^2),$ اور ہمیں ملتا ہے

$$\int \sqrt{\cot x}\,.\,\sec^4 dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot (1+t^2)^2 . \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{1+t^2}{\sqrt{t}}\, dt$$

$$= 2\sqrt{t} + \tfrac{2}{5} t^{\frac{5}{2}}$$

$$= 2\sqrt{\tan x} + \tfrac{2}{5}\sqrt{\tan^5 x}.$$

مشقیں

1 - ثابت کیجیے کہ

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = -\frac{1}{2\tan^2 x} + \log \tan x.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \frac{\sin x\,(1+2\cos^2 x)}{3\cos^3 x} - 2\cot 2x.$$

2۔ حاصل کیجیے ۔

(i) $\int \frac{dx}{\sin^{3/2} x \cos^{5/2} x}$, (ii) $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x} dx$,

(iii) $\int \frac{(1-\cos x)^{3/5}}{(1+\cos x)^{8/5}} dx$, (iv) $\int \sec^{4/7} x \operatorname{cosec}^{10/7} x \, dx$.

3۔ حاصل کیجیے

(i) $\int \frac{(1-\cos x)^{2/7}}{(1+\cos x)^{9/7}} dx$, (ii) $\int \frac{1}{\sin \theta \cos^3 \theta} d\theta$,

(iii) $\int \sec^{8/9} x \operatorname{cosec}^{10/9} x \, dx$, (iv) $\int \sec^{2/3} x \operatorname{cosec}^{4/3} x \, dx$.

جوابات

2. (i) $2/3 \sqrt{\tan^3 x} - 2\sqrt{\cot x}$. (ii) $2\sqrt{\tan x}$.
   (iii) $5/15 (\tan \frac{1}{2} x)^{11/5}$. (iv) $-7/3 (\cot x)^{3/7}$.
3. (i) $7/11 (\tan \frac{1}{2} x)^{11/7}$. (ii) $\log \tan \theta + \frac{1}{2} \tan^2 \theta$.
   (iii) $-9 (\cot x)^{1/9}$. (iv) $-3 (\cot x)^{1/3}$.

4·61 ۔ تکملہ

$$\int \sin^p x \cos^q x \, dx,$$

حاصل کرنا جبکہ p یا q یا دونوں منفی کامل عدد ہوں۔

اب ہم تکملہ $\int \sin^p x \cos^q x \, dx$. کے لیے تحویلی فارمولوں کا ایک نظام (system) حاصل کریں گے۔

اس طرح والے کسی بھی تحویلی فارمولے کا کارآمد ہونا اس پر منحصر ہے کہ اس میں p, q کس طرح کے ہیں مثبت یا منفی۔ ان تحویلی فارمولوں کی مدد سے $\int \sin^p x \cos^q x \, dx$ اسی صورت میں نکالا جا سکتا ہے جب p اور q کامل عدد ہوں۔ ان میں سے دو تحویلی فارمولے § 4·3 میں پہلے ہی نکالے جا چکے ہیں اور وہ تب کارآمد ہیں جب p اور q دونوں مثبت

کامل اعداد ہوں۔

حصے سے تکمل کے علاوہ تحویلی فارمولے نکالنے کا ہم دوسرا طریقہ بھی بتائیں گے۔

I ۔ جیسے 4·3 § میں کیا تھا اسی طرح سے ہم پاتے ہیں

$$\int \sin^p x \cos^q x \, dx$$

$$= -\int \sin^{p-1} x . (\sin x \cos^q x)\, dx$$

$$= -\frac{\cos^{q+1} x}{q+1} \sin^{p-1} x + \int \frac{\cos^{q+1} x}{q+1} (p-1) \sin^{p-2} x \cos x \, dx$$

$$(A) \cdots = -\frac{\cos^{q+1} x \sin^{p-1} x}{q+1} + \frac{p-1}{q+1} \int \sin^{p-2} x \cos^{q+2} x \, dx$$

یہ تحویلی فارمولا تب کارآمد ہوتا ہے جب q منفی اور p مثبت ہو۔

II ۔ اگر ہم لکھیں

$$\int \sin^p x \cos^q x \, dx = \int \cos^{q-1} x (\cos x \sin^p x) \, dx,$$

اور اوپر کی طرح سے حصے سے تکمل کا فارمولا لگائیں تو یہ تحویلی فارمولا ملے گا:-

$$\int \sin^p x \cos^q x \, dx$$

$$(B) \cdots\cdots = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{1+p} + \frac{q-1}{1+p} \int \sin^{p+2} x \cos^{q-2} x \, dx$$

III ۔ اگر اوپر کے فارمولا (A) میں ہم $\cos^{q+2} x$ کو $\cos^q x\ (1-\sin^2 x)$, لکھ دیں تو 4·3§ کی طرح سے ہم ثابت کرتے ہیں کہ

$$\int \sin^p x \cos^q x \, dx$$

$$= -\frac{\cos^{q+1} x \sin^{p-1} x}{p+q} + \frac{p-1}{p+q} \int \sin^{p-2} x \cos^q x \, dx$$

اب p کی جگہ $p+2$ رکھنے پر اور $\frac{p+1}{p+q+2} \int \sin^p x \cos^q x \, dx$ کو بائیں طرف منتقل کر کے $(p+1)\ (p+q+2)$ سے تقسیم کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int \sin^p x \cos^q x\, dx = \frac{\cos^{q+1} x \sin^{p+1} x}{p+1} + \frac{p-2+q}{p+1} \int \sin^{p+2} x \cos^q x\, dx$$

جوکہ p کے منفی ہونے پر فائدہ مند ثابت ہوتا ہے۔

IV - اسی طرح سے ہم ایک اور فارمولا پا سکتے ہیں جوکہ

$\int \sin^p x \cos^q x\, dx$ اور $\int \sin^p x \cos^{q+2} x\, dx$

میں رابطہ قائم کرتا ہے اور تب کارآمد ہے جب q منفی ہو۔

نوٹ: اوپر جو کہا گیا ہے اُس سے ظاہر ہوتا ہے کہ تکملہ

$\int \sin^p x \cos^q x\, dx$

کا رابطہ ذیل چھ میں سے کسی بھی تکملے سے قائم ہو سکتا ہے:-

$\int \sin^{p-2} x \cos^q x\, dx$; $\int \sin^p x \cos^{q-2} x\, dx$;

$\int \sin^{p-2} x \cos^{q+2} x\, dx$; $\int \sin^{p+2} x \cos^{q-2} x\, dx$;

$\int \sin^{p+2} x \cos^q x\, dx$; $\int \sin^p x \cos^{q+2} x\, dx$.

دوسرا طریقہ: بجائے اس کے کہ حصّے سے تکمل کے ذریعے تحویلی فارمولے حاصل کریں (جیسا کہ اوپر کیا گیا) ہم ذیل میں بیان کیے گئے طریقے سے بھی تحویلی فارمولے پا سکتے ہیں:-

(i) پہلے لکھیے

$$P = \sin^{\lambda+1} x \cos^{\mu+1} x,$$

یہاں جن دو تکاملیوں کے تکملوں میں تعلق چاہیے اُن میں λ اور μ ترتیب وار $\sin x$ اور $\cos x$ کی کمتر قوتیں (lesser indices) ہیں۔

(ii) اب (dP/dx) نکالیے اور اُسے اُن دو تکاملیوں کے خطی مرکب (linear combination) کی شکل میں لکھیے جن کے تکملوں میں رابطہ چاہیے ہے۔

(iii) آخر میں تکمل کرکے تحویلی فارمولا حاصل کر لیجیے۔

مثال

تکملوں

$$\int \sin^{p-2} x \cos^q x\, dx \quad \text{اور} \quad \int \sin^p x \cos^q x\, dx$$

میں رابطہ قائم کیجیے۔

یہاں $\lambda = p-2$ اور $\mu = q$. اس لیے ہم لکھتے ہیں

$$P = \sin^{p-1} x \cos^{q+1} x.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dP}{dx} = (p-1) \sin^{p-2} x \cos^{q+2} x - (q+1) \sin^p x \cos^q x.$$

اب $\cos^{q+2} x$ کو $\cos^q x\,(1-\sin^2 x)$ لکھ کر ہم پاتے ہیں

$$\frac{dP}{dx} = (p-1) \sin^{p-2} x \cos^q x\,(1-\sin^2 x) - (q+1) \sin^p x \cos^q x.$$

$$= (p-1) \sin^{p-2} x \cos^q x - (p+q) \sin^p x \cos^q x$$

تکمل کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$P = (p-1) \int \sin^{p-2} x \cos^q x\, dx - (p+q) \int \sin^p x \cos^q x\, dx.$$

$$\Rightarrow \int \sin^p x \cos^q x\, dx$$

$$= -\frac{\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x}{p+q} + \frac{p-1}{p+q} \int \sin^{p-2} x \cos^q x\, dx.$$

اسی طرح سے باقی تحویلی فارمولے بھی حاصل ہو سکتے ہیں۔

مشقیں

ثابت کیجیے کہ

(i) $\displaystyle \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\, dx = \frac{\sin^2 x}{3 \cos^3 x} - \frac{2}{3} \sec x.$

(ii) $\displaystyle \int \frac{\sin^4 x}{\cos^5 x}\, dx = \frac{\sin^3 x}{3 \cos^4 x} - \frac{3 \sin x}{8 \cos^2 x} + \frac{3}{8} \log \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$

$$(iii)\quad \int \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x}\,dx = -\frac{\cos^4 x}{3\sin^3 x} + \frac{4\cos^2 x}{3\sin x} + \frac{8\sin x}{3}$$

4·7 - $R(\cos x, \sin x)$ کا تکمل، جہاں $R(\cos x, \sin x)$؛ $\sin x$ اور $\cos x$ کا کوئی ناطق تفاعل ہے۔

مثلاً

$$\frac{1}{4+5\cos x},\ \frac{1}{3+4\cos x+5\sin x},\ \frac{2\sin x+3\cos x}{4+5\cos^2 x+6\sin x}.$$

متغیر کی تبدیلی $t = \tan(x/2)$ کی مدد سے $\sin x$ اور $\cos x$ کے ناطق تفاعل $R(\cos x, \sin x)$ کا تکملہ t کے ناطق تفاعل کے تکملے میں بدل جاتا ہے جسے باب 3 میں بتائے گئے طریقوں سے حاصل کر سکتے ہیں۔

دراصل $t = \tan(x/2)$ رکھنے پر

$$dt = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx \Rightarrow dx = \frac{2t}{1+t^2},$$

ساتھ ہی

$$\sin x = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\therefore\quad R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left[\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right]\frac{2dt}{1+t^2}$$

اب تکاملیہ t کا ناطق تفاعل ہے۔

مثالیں

1 - حاصل کیجیے

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x}.$$

$t = \tan x/2$ رکھنے پر ملتا ہے

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left[a+b\,\frac{1-t^2}{1+t^2}\right]}$$

$$= \int \frac{2dt}{(a+b)+(a-b)t^2}$$

$$= \frac{2}{a-b}\int \frac{dt}{t^2+(a+b)/(a-b)}\,,\quad (a \neq b \text{ اگر})$$

اب $(a+b)/(a-b)$ کو $(a+b)^2/(a^2-b^2)$ لکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ $(a+b)/(a-b)$ مثبت ہوگا۔ اگر $a^2 > b^2$ ہو اور $(a+b)/(a-b)$ منفی ہوگا اگر $a^2 < b^2$ ہو۔

پہلی صورت۔ مان لیجیے

$$a^2 > b^2 \Rightarrow \left[(a+b)/(a-b)\right] > 0$$

ہم پاتے ہیں

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{a-b}\int \frac{dt}{t^2+\left[\sqrt{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)}\right]^2}$$

$$= \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan^{-1}\left[t\sqrt{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)}\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\tan^{-1}\left[\sqrt{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)}\tan\frac{x}{2}\right]$$

دوسری صورت۔ مان لیجیے

$$a^2 < b^2 \Rightarrow \left[(a+b)/(a-b)\right] < 0$$

ہم پاتے ہیں

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{a-b}\int \frac{dt}{t^2-(b+a)/(b-a)}$$

$$= \frac{2}{a-b}\int \frac{dt}{t^2-\left[\sqrt{\left(\frac{b+a}{b-a}\right)}\right]^2} = \frac{2}{a-b}\int \frac{dt}{t^2-\alpha^2},$$

جہاں کہ $\alpha = \sqrt{\{(b+a)/(b-a)\}}$ ۔ اب

$$\int \frac{dt}{t^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha}\int\left(\frac{1}{t-\alpha}-\frac{1}{t+\alpha}\right)dt = \frac{1}{2\alpha}\log\frac{t-\alpha}{t+\alpha}$$

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{a-b}\cdot\frac{1}{2\alpha}\log\frac{t-\alpha}{t+\alpha}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\log\frac{\tan\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{(b+a)}{(b-a)}}}{\tan\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{(b+a)}{(b-a)}}}$$

تیسری صورت۔ مان لیجیے

$a^2 = b^2 \Rightarrow b = a$ یا $b = -a$

اگر $b = a$ ہو تو ہم پاتے ہیں

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{1+\cos x}$$

$$= \frac{1}{2a}\int \sec^2\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{a}\tan\frac{x}{2}$$

اگر $b = -a$ ہو تو ہم پاتے ہیں

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{1-\cos x}$$

$$= \frac{1}{2a}\int \operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}\,dx = -\frac{1}{a}\cot\frac{x}{2}$$

2۔ حاصل کیجیے

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{dx}{5+7\cos x+\sin x}$$

$t = \tan(x/2)$ پر رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int \frac{dx}{5+7\cos x+\sin x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left[5+7\,\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right]}$$

$$= \int \frac{dt}{-t^2+t+6}$$

$$= \int \frac{dt}{(3-t)(t+2)}$$

$$= \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{3-t}+\frac{1}{2+t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{5}\Big[-\log(3-t)+\log(2+t)\Big]$$

اب $x = \pi/2$ پر $t = 1$ ہے اور $x = -\pi/2$ پر $t = -1$ ہے۔ اس لیے

$$\therefore \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+7\cos x+\sin x} = \frac{1}{5}\left|\log\frac{(2+t)}{(3-t)}\right|_{-1}^{1}$$

$$= \tfrac{1}{5}(\log 3/2-\log 1/4) = 1/5 \log 6.$$

مشقیں

1- ذیل تکملے حاصل کیجیے

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+4\cos x}$ (ii) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$ (iii) $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{5+3\cos\theta}$

2- حاصل کیجیے

(i) $\int \frac{dx}{a+b\sin x}$, (ii) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{4+5\sin x}$, (iii) $\int \frac{\operatorname{cosec} x\,dx}{2+\operatorname{cosec} x}$

3- ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+2\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}\log(2+\sqrt{3}).$$

4. ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\sin x+\cos x} = \frac{\pi}{4}$$

5. ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+2\sin x+\cos x} = \frac{1}{2}\log 3$$

6. ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{(a^2-b^2)}}, \quad (a^2 > b^2 \text{ اگر})$$

7. ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\cos\alpha+\cos\theta} = \operatorname{cosec}\alpha \log\sec\alpha.$$

8. ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2-2a\cos x+1} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{1-a^2} & (a < 1 \text{ اگر}) \\ \dfrac{\pi}{a^2-1} & (a > 1 \text{ اگر}) \end{cases}$$

9. ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

جوابات

1. (i) $2/3 \tan^{-1} \frac{1}{3}$. (ii) $\pi/\sqrt{3}$. (iii) $\frac{\pi}{4}$

2. (i) $\frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)}} \tan^{-1} \frac{a\tan(x/2)+b}{\sqrt{(a^2-b^2)}}$ $(a^2 > b^2 \text{ اگر})$

$\frac{2}{\sqrt{(b^2-a^2)}} \log \frac{a\tan(x/2)+b-\sqrt{(b^2-o^2)}}{a\tan(x/2)+b+\sqrt{(b^2-a^2)}}$ $(a^2 < b^2 \text{ اگر})$

$-\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$ $(b = a \text{ اگر})$ $\frac{1}{a}\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$ $(b = -a \text{ اگر})$

(ii) $\frac{1}{3}\log 2$. (iii) $\frac{1}{\sqrt{3}}\log\frac{\sin\frac{1}{2}x+(2-\sqrt{3})\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x+(2+\sqrt{3})\cos\frac{1}{2}x}$

4·71-دوسرے اہم متغیر کے استحالے (transformations)

اصولاً تو استحالہ $t = \tan(x/2)$ کی مدد سے $\sin x$ اور $\cos x$. کے کسی بھی ناطق تفاعل R کا تکمل ممکن ہے لیکن یہ استحالہ ہمیشہ آسانی نہیں پیدا کرتا کیونکہ حاصل شدہ t کے ناطق تفاعل کے نسب نما کی ڈگری عموماً بڑی ہوتی ہے۔ کبھی کبھی دوسرے استحالے جیسے $t = \sin x$ ، $t = \cos x$ ، $t = \tan x$ زیادہ کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔ اب ہم کچھ مثالیں حل کر کے دکھائیں گے کہ عموماً کس طرح کے تفاعلوں سے سابقہ رہتا ہے۔

مثالیں

1-حاصل کیجیے

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}$$

$t = \sin x$ رکھنے پر $\cos x\,dx = dt$ ۔ ساتھ ہی $x = 0$ پر $t = 0$ اور $x = \pi/2$ پر $t = 1$ ہے۔

اس لیے تکملہ

$$= \int_0^1\frac{dt}{(1+t)(2+t)}$$

$$= \int_0^1\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{2+t}\right)dt$$

$$= \left|\log\frac{1+t}{2+t}\right|_0^1 = \log\frac{2}{3}-\log\frac{1}{2} = \log\frac{4}{3}$$

2-حاصل کیجیے

$$\int\frac{dx}{\sin x\,(a+b\cos x)}$$

$t = \cos x$ رکھنے پر $-\sin x\,dx = dt$۔ اس طرح

$$\int \frac{dx}{\sin x(a+b\cos x)}$$

$$= -\int \frac{dt}{\sin^2 x\,(a+b\cos x)}$$

$$= -\int \frac{dt}{(1-t)(1+t)(a+bt)}$$

$$= -\int\left(\frac{1}{2(a+b)}\cdot\frac{1}{1-t}+\frac{1}{2(a-b)}\cdot\frac{1}{1+t}+\frac{b^2}{b^2-a^2}\cdot\frac{1}{a+bt}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2(a+b)}\log(1-t)-\frac{1}{2(a-b)}\log(1+t)+\frac{b}{a^2-b^2}\log(a+bt)$$

$$= \frac{1}{2(a+b)}\log(1-\cos x)-\frac{1}{2(a-b)}\log(1+\cos x)$$
$$+\frac{b}{a^2-b^2}\log(a+b\cos x)$$

$$= \frac{1}{a+b}\log\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{(a-b)}\log\cos\frac{x}{2}$$
$$+\frac{b}{a^2-b^2}\log(a+b\cos x)+C$$

جہاں کہ مستقل C کی قیمت $-b\log 2/(a^2-b^2)$ ہے جسے عموماً نہیں لکھتے (مستقل ہونے کی وجہ سے)

3. حاصل کیجیے

$$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$$

ہم لکھتے ہیں

$$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\int\frac{\sec^2 x\,dx}{b^2+a^2\tan^2 x}.$$

اب $t = \tan x$ رکھنے پر دیا ہوا تکملہ

$$= \int\frac{dt}{b^2+a^2t^2} = \frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{(t^2+b^2/a^2)}$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot\frac{a}{b}\tan^{-1}\left(\frac{at}{b}\right)=\frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{a\tan x}{b}\right)$$

4۔ حاصل کیجیے

$$\int \frac{\sin x \cos x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}\, dx.$$

شمار کنندہ اور نسب نما کو $\cos^2 x$ سے تقسیم کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int \frac{\sin x \cos x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}\, dx = \int \frac{\tan x\, dx}{a^2 + b^2 \tan^2 x}.$$

اب $t = \tan^2 x$ رکھنے پر تکمل

$$= \int \frac{dt}{2(1+t)(a^2+b^2 t)}$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{1+t} + \frac{b^2}{b^2-a^2} + \frac{1}{a^2+b^2 t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a^2-b^2}\log(1+t) + \frac{b^2}{b^2-a^2}\cdot\frac{1}{b^2}\log(a^2+b^2 t)\right]$$

$$= \frac{1}{2(a^2-b^2)}\log\frac{\sec^2 x}{a^2+b^2\tan^2 x}$$

$$= \frac{1}{2(a_2-b_2)}\log(a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x).$$

نوٹ: یہ تکملہ حاصل کرنے کے لیے $t = \sin^2 x$ $t = \cos^2 x$ بھی رکھ سکتے تھے۔

مشقیں

ذیل تکملے حاصل کیجیے :-

-1

(i) $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\, dx$, (ii) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{1+e^2 \sin^2 \theta}\, d\theta$,

(iii) $\int \frac{dx}{\sin x + \sin 2x}$, (iv) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + 3\cos x + 2}\, dx$.

-2

(i) $\int \frac{2-\sin x}{\sin x(1-\cos x)}\, dx$, (ii) $\int \frac{\sec x}{1+\operatorname{cosec} x}\, dx$,

(iii) $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$, (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin^2 x}$ (v) $\int \frac{d\theta}{5+4\cos 2\theta}$,

-3

(i) $\int \frac{dx}{1-\cos^4 x}$, (ii) $\int \frac{dx}{(2\sin x+\cos x)^2}$,

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+4\sin^2 x}$, (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx$,

(v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2-b^2\cos^2 x}$, $(a^2 > b^2)$,

(vi) $\int \frac{dx}{3\sin x+\sin^3 x}$.

4- ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\theta+\cos\theta}{9+16\sin 2\theta}d\theta=\frac{1}{20}\log 3.$$

جوابات

1. (i) $\tan^{-1}(\sin x)$. (ii) $(e-\tan^{-1} e)/e^3$.
(iii) $\frac{1}{3}\log[\sin x(1+\cos x)/(1+2\cos x)^2]$. (iv) $\log(9/8)$.

2. (i) $\log\tan\frac{1}{2}x+\cot\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}x$.
(ii) $\frac{1}{4}\log[(1+\sin x)/(1-\sin x)]+\frac{1}{2}(1+\sin x)$.
(iii) $\sqrt{\frac{1}{2}}\tan^{-1}(\tan x/\sqrt{2})$. (iv) $\sqrt{6}\pi/12$, (v) $\frac{1}{3}\tan^{-1}(\frac{1}{3}\tan\theta)$.

3. (i) $-\frac{1}{2}\cot x+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}(\tan^{-1}\sqrt{\frac{1}{2}}\tan x)$.
(ii) $-\frac{\cos x/2}{(2\sin x+\cos x)}$ (iii) $\frac{\pi}{2\sqrt{5}}$
(iv) $\frac{1}{(a^2-b^2)}\log\frac{a}{b}$ (اگر $a^2 \neq b^2$)؛ $\frac{1}{2a^2}$ (اگر $a^2 = b^2$)
(v) $\pi/2a\sqrt{(a^2-b^2)}$.
(vi) $\frac{1}{6}\log\frac{t-1}{t+1}+\frac{1}{12}\log\frac{2+t}{2-t}$ (جہاں $t=\cos x$.)

4·81 - $(a\cos x+b\sin x)/(c\cos x+d\sin x)$ کا تکمل کرنا:

یہ دیکھتے ہوئے کہ نسب نما $c\cos x+d\sin x$ کا تفرقی سر $-c\sin x+d\cos x$

سے- ہم دو مستقل λ اور μ ایسے معلوم کرتے ہیں کہ

$$a\cos x+b\sin x \equiv \lambda(-c\sin x+d\cos x)+\mu(c\cos x+d\sin x)$$

دونوں طرف کے $\cos x$ اور $\sin x$ کے ضربیوں کی برابری کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\begin{cases} a = d\lambda+\mu, \\ b = -c\lambda+d\mu \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{ad-bc}{d^2+c^2},\ \mu = \frac{ac-bd}{d^2+c^2}$$

$$\therefore \quad \int \frac{a\cos x+b\sin x}{c\cos x+d\sin x}dx$$

$$= \lambda\int\frac{-c\sin x+d\cos x}{c\cos x+d\sin x}dx+\mu\int dx$$

$$= \lambda\log(c\cos x+d\sin x)+\mu x.$$

4·82- $(a\cos x+b\sin x+c)/(d\cos x+e\sin x+f)$ کا تکمل کرنا:

ہم تین مستقل λ، μ اور ν ایسے معلوم کرتے ہیں کہ

$$a\cos x+b\sin x+c = \lambda(d\cos x+e\sin x+f)$$
$$+\mu(-d\sin x+e\cos x)+\nu.$$

یہ مستقل ذیل مساواتوں سے ملتے ہیں۔

$$a = d\lambda+e\mu,\ b = e\lambda-d\mu,\ c = f\lambda+\nu.$$

اب λ، μ اور ν کی ایسی قیمتوں کے لیے ہم پاتے ہیں

$$\int\frac{a\cos x+b\sin x+c}{d\cos x+e\sin x+f}dx$$

$$= \int\lambda\, dx+\mu\int\frac{-d\sin x+e\cos x}{d\cos x+e\sin x+f}dx$$
$$+\nu\int\frac{dx}{d\cos x+e\sin x+f}$$

$$= \lambda x+\mu\log(d\cos x+e\sin x+f)$$
$$+\nu\int\frac{dx}{d\cos x+e\sin x+f}$$

اور تکملہ

$$\int \frac{dx}{d\cos x + e\sin x + f}$$

استحالہ $t = \tan(x/2)$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مشقیں

ذیل تکملے حاصل کیجیے

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cot x}$, (ii) $\int \frac{2\sin x+3\cos x}{3\sin x+4\cos x}dx$,

(iii) $\int \frac{dx}{a+b\tan x}$, (iv) $\int \frac{3\cos x+4\sin x}{4\cos x+5\sin x}dx$,

(v) $\int \frac{\cos x+2\sin x+3}{4\cos x+5\sin x+6}dx$, (vi) $\int \frac{5\cos x+6}{2\cos x+\sin x+3}dx$.

جوابات

(i) $\pi/4$. (ii) $\frac{18}{25}x+\frac{1}{25}\log(3\sin x+4\cos x)$.

(iii) $[ax+b\log(a\cos x+b\sin x)]/(a^2+b^2)$.

(iv) $[3x-\log(4\cos x+5\sin x)]/41$.

(v) $\frac{14}{41}x-\frac{3}{41}\log(4\cos x+5\sin x+6)$

$$+\frac{39}{41}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\log\frac{2\sin\frac{1}{2}x+(5-\sqrt{5})\cos\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x+(5+\sqrt{5})\cos\frac{1}{2}x}.$$

(vi) $2x+\log(2\cos x+\sin x+3)$.

4.9 ۔ معین تکملوں کی دو خصوصیات

اب ہم معین تکملوں کی دو خصوصیات ثابت کریں گے جن سے کچھ قسموں کے معین تکملے حاصل کرنے میں مدد ملتی ہے۔

4.91 - پہلی خصوصیت ۔ اگر $\varphi(x)$ کوئی بھی تفاعل ہو تو

$$\int_0^a \varphi(x)\,dx = \int_0^{\frac{a}{2}} \varphi(x)\,dx + \int_0^{\frac{a}{2}} \varphi(a-x)\,ax$$

ہم کو § 1.6. سے ملتا ہے

$$\int_0^a \varphi(x)\,dx = \int_0^{\frac{a}{2}} \varphi(x)\,dx + \int_{\frac{a}{2}}^a \varphi(x)\,dx$$

اب سب سے داہنی طرف کے تکملے کے لیے ہم لکھتے ہیں

$$y = a - x \quad \Rightarrow \quad dx = -dy$$

ساتھ ہی، $x = \frac{a}{2}$ پر $y = \frac{a}{2}$ اور $x = a$ پر $y = 0$ ہے۔

$$\therefore \quad \int_{\frac{a}{2}}^a \varphi(x)\,dx = -\int_{\frac{a}{2}}^0 \varphi(a-y)\,dy = \int_0^{\frac{a}{2}} \varphi(a-x)\,dx$$

$$\text{(A)} \quad \therefore \quad \int_0^a \varphi(x)\,dx = -\int_0^{\frac{a}{2}} \varphi(x)\,dx + \int_0^{\frac{a}{2}} \varphi(a-x)\,dx$$

ضمنی نتیجہ Cor 1

ہمیں (A) سے ملتا ہے کہ

اگر $\varphi(a-x) = \varphi(x) \Rightarrow \int_0^a \varphi(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{a}{2}} \varphi(x)\,dx$

اگر $\varphi(a-x) = -\varphi(x) \Rightarrow \int_0^a \varphi(x)\,dx = 0.$

ضمنی نتیجہ 2 پہلے ضمنی نتیجہ میں حاصل کیے گئے نتائج ذیل تکملے

$\int_0^{2\pi} \sin^p x \cos^q x\,dx$ اور $\int_0^{\pi} \sin^p x \cos^q x\,dx$

نکالنے میں کارآمد ثابت ہوتے ہیں (جہاں p, q مثبت کامل عدد ہیں)

(i) تکملہ

$$\int_0^{\pi} \sin^p x \cos^q x\, dx$$

حاصل کرنے کے لیے ہم لکھتے ہیں

$$\varphi(x) = \sin^p x \cos^q x$$

$$\therefore \quad \varphi(\pi-x) = \sin^p(\pi-x)\cos^q(\pi-x)$$
$$= \sin^p x(-\cos x)^q = (-1)^q \sin^p x \cos^q x$$

چونکہ $\varphi(x)$ ہوگا اگر q جفت ہو اور $-\varphi(x)$ ہوگا اگر q طاق ہو۔

لہذا

q طاق $\Rightarrow \int_0^{\pi} \sin^p x \cos^q x\, dx = 0$

q جفت $\Rightarrow \int_0^{\pi} \sin^p x \cos^q x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x\, dx$

(ii) پھر مان لیجیے کہ

$$\varphi(x) = \sin^p x \cos^q x.$$

$$\therefore \varphi(2\pi-x) = \sin^p(2\pi-x)\cos^q(2\pi-x)$$
$$= (-1)^p \sin^p x \cos^q x$$

چونکہ $\varphi(x)$ ہوگا اگر p جفت ہو اور $-\varphi(x)$ ہوگا اگر p طاق ہو۔

لہذا

p طاق $\Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin^p x \cos^q x\, dx = 0$

p جفت $\Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin^p x \cos^q x\, dx = 2\int_0^{\pi} \sin^p x \cos^q x\, dx$

$$= \begin{cases} 0 & (\text{اگر } q \text{ طاق ہو}) \\ 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x\, dx & (\text{اگر } q \text{ جفت ہو}) \end{cases}$$

لہذا اگر p یا q یا دونوں طاق ہوں تو

$$\int_0^{\cdots} \sin^p x \cos^q x\, dx = 0$$

اور اگر دونوں جفت ہوں تو

$$\int^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p} x \cos^{q} x \, dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p} x \cos^{q} x \, dx$$

مشقیں

1- حاصل کیجیے

(i) $\int_0^{\pi} \sin^4 x \cos^5 x \, dx,$ (ii) $\int_0^{\pi} \sin^4 x \cos^6 x \, dx,$

(iii) $\int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^5 x \, dx,$ (iv) $\int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^6 x \, dx,$

(v) $\int_0^{\pi} \sin^3 x \, dx.$ (vi) $\int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx,$

(vii) $\int_0^{2\pi} \cos^3 x \, dx.$ (viii) $\int_0^{2\pi} \cos^4 x \, dx.$

2- ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\pi} \theta \sin^3 \theta \cos \theta \cdot d\theta = -\frac{4}{9}$$

3- ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 3\varphi \sin^3 6\varphi \, d\varphi = \frac{5}{96}\pi.$$

4- ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \theta \, (1+2\cos\theta)(1+\cos\theta)^2 \, d\theta = \frac{8}{3}$$

5- ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \log \tan x \, dx = 0.$$

جوابات

1. (i) 0. (ii) $3\pi/256$. (iii) 0. (iv) $3\pi/128$.
(v) $4/3$. (vi) $3\pi/8$. (vii) 0. (viii) $3\pi/4$.

4.92. دوسری خصوصیت۔ اگر $\varphi(x)$ کوئی بھی تفاعل ہوتو

$$\int_0^a \varphi(x)\,dx = \int_0^a \varphi(a-x)\,dx.$$

ہم رکھتے ہیں

$$a-x = y \Rightarrow dx = -dy.$$

ساتھ ہی

$$x = 0 \Rightarrow y = a,\ x = a \Rightarrow y = 0$$

$$\therefore \int_0^a \varphi(a-x)\,dx = -\int_a^0 \varphi(y)\,dy$$

$$= \int_0^a \varphi(y)\,dy = \int_0^a \varphi(x)\,dx.$$

مثالیں

1۔ حاصل کیجیے

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx.$$

مان لیجیے

$$\varphi(x) = \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$$

$$\therefore \quad \varphi(\tfrac{1}{2}\pi-x) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)+\cos(\frac{\pi}{2}-x)}$$

$$= \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}$$

چونکہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\tfrac{\pi}{2} - x)\, dx,$$

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = I \quad (\text{کہہ لیجیے})$$

$$\therefore \quad 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1.\, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\pi}{4}.$$

2۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \log(1+\sqrt{2}).$$

مان لیجیے

$$\varphi(x) = \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}$$

$$\therefore \quad \varphi(\tfrac{\pi}{2} - x) = \frac{\cos^2 x}{\cos x + \sin x}.$$

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x + \sin x}\, dx = I \quad (\text{کہہ لیجیے})$$

$$\therefore \quad 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x + \sin x}\, dx.$$

اب $t = \tan(x/2)$ رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x + \sin x} = 2\int_0^1 \frac{d}{1+2t-t^2}$$

$$= 2\int_0^1 \frac{dt}{2-(t-1)^2}$$

$$= 2\,\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{2}-(t-1)} + \frac{1}{\sqrt{2}+(t-1)}\right] dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \log \frac{\sqrt{2}+(t-1)}{\sqrt{2}-(t-1)} \right|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[0 - \log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right]$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \log (\sqrt{2}+1).$$

$$\therefore\ I = \frac{1}{\sqrt{2}} \log (\sqrt{2}+1).$$

3۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

مان لیجیے کہ $\varphi(x) = \log \sin x$ تو $\varphi(\frac{\pi}{2} - x) = \log \cos x.$

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x \, dx = I$$ (کہہ لیجیے)

$$\therefore\ 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x + \log \cos x) \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \cos x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\sin 2x}{2} \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2 \, dx$$

$$(i) \ldots\ldots = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x \, dx - \frac{\pi}{2} \log 2.$$

اب $y = 2x$ رکھ کر ہم پاتے ہیں

$$(ii) \ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \log \sin y \, dy = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \log \sin x \, dx$$

اب $\varphi(\pi - x) = \log \sin (\pi - x) = \log \sin x = \varphi(x)$

اس لیے § 4·91 کے پہلے ضمنی نتیجہ سے ہم پاتے ہیں

$$(iv) \ldots \int \log \sin x \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = 2I.$$

پھر (ii) اور (iii) سے ملتا ہے

$$(iii) \cdots\cdots\cdots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x \, dx = 1.$$

آخر میں (i) اور (iv) سے ہم پاتے ہیں

$$2I = I - \frac{\pi}{2} \log 2$$

$$\Rightarrow \quad I = -\frac{\pi}{2} \log 2 = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2}$$

مشقیں

حاصل کیجیے

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx.$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx.$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \, dx}{1 + \sin x \cos x}.$

4. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$

5. $\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx.$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log (1 + \tan \theta) \, d\theta.$

7. $\int_0^{1} \frac{\log (1+x)}{1+x^2} dx.$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \tan x \, dx.$

9. $\int_0^{\pi} x \cos^4 x \, dx.$

10. $\int_0^{\pi} x \sin x \cos^4 x \, dx.$

11. $\int_0^{\pi} x \sin^3 x \, dx.$

12. $\int_0^{\pi} x \sin^2 x \cos^4 x \, dx.$

13 $\int^{\pi} x \log \sin x \, dx.$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (\tan x + \cot x) \, dx.$

15 $\int_0^{\infty} \log \left(x + \frac{1}{x} \right) \frac{dx}{1+x^2}.$

16. $\int_0^{\pi} \log (1 + \cos \theta) \, d\theta$

17. $\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}.$

18. $\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{1 + e \sin x}$

19 $\int_0^{\pi} x \sin^6 x \cos^4 x \, dx.$

جوابات

1. $\frac{\pi}{4}$.
2. 0.
3. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
4. $\frac{\pi^2}{4}$.
5. $\frac{\pi(\pi-2)}{2}$
6. $\frac{\pi}{8}\log 2$.
7. $\frac{\pi}{8}\log 2$.
8. 0.
9. $\frac{3}{16}\pi^2$.
10. $\frac{\pi}{5}$.
11. $\frac{2\pi}{3}$.
12. $\frac{\pi^2}{32}$
13. $\frac{1}{2}\pi^2 \log \frac{1}{2}$.
14. $\pi \log 2$.
15. $\pi \log 2$.
16. $\pi \log \frac{1}{2}$.
17. $\frac{\pi^2}{2ab}$.
18. $\frac{\pi \cos^{-1} e}{\sqrt{(1-e^2)}} \left(e^2 < 1 \right)$
19. $\frac{3\pi^2}{512}$.

4·10. $\int \cos^m x \cos nx\, dx$ کے لیے تحویلی فارمولا

حصہ ستے تکمل کے فارمولے سے ہم پاتے ہیں

$$(i) \quad \ldots\ldots \int \cos^m x \cos nx\, dx = \cos^m x . \frac{\sin nx}{n} + \frac{m}{n}\int \cos^{m-1} x \sin x \sin nx\, dx,$$

اب

$$\cos(n-1)x = \cos nx \cos x + \sin nx \sin x.$$

$\sin nx \sin x$ کے بجائے $\cos(n-1)x - \cos nx \cos x$ ، (i) کی داہنی جانب رکھنے پر

$$\int \cos^m x \cos nx\, dx = \frac{\cos^m x \sin nx}{n} + \frac{m}{n} \cos^{m-1} x \cos(n-1)x\, dx - \frac{m}{n}\int \cos^m x \cos nx\, dx$$

$$\Rightarrow \quad \left(1 + \frac{m}{n}\right)\int \cos^m x \cos nx\, dx = \frac{\cos^m x \sin nx}{n} + \frac{m}{n}\int \cos^{m-1} x \cos(n-1)x\, dx$$

$$\Rightarrow \int \cos^m x \cos nx\, dx = \frac{\cos^m x \sin nx}{m+n} + \frac{m}{m+n}\int \cos^{m-1} x \cos (n-1)x\, dx$$

جو کہ درکار تحویلی فارمولا ہے۔

نوٹ 1۔ اسی طرح سے ہم $\int \cos^m x \sin nx\, dx.$ کے لیے تحویلی فارمولا پا سکتے ہیں۔

نوٹ 2۔ اگر (i) کی داہنی جانب $\sin x \sin nx$ کی جگہ پر

$\cos (n-1)x - \cos nx \cos x$

نہ رکھتے بلکہ $\sin nx$ کو پہلا اور $\cos^{m-1} x \sin x$ کو دوسرا فیکٹر لیتے ہوئے اس کا حصہ سے تکمل کرتے تو ہمیں ذیل تحویلی فارمولا ملتا:

$$\int \cos^m x \cos nx\, dx = \frac{n \sin nx \cos x - m \cos nx \sin x}{n^2 - m^2} \cos^{m-1} x - \frac{m(m-1)}{n^2-m^2}\int \cos^{m-2} x \cos nx\, dx$$

4·11 تکملہ

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin^n x\, dx.$$

حاصل کرنا

حصہ سے تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$(i) \ldots \int e^{-ax} \sin^n x\, dx = -\frac{e^{-ax}}{a} \sin^n x + \frac{n}{a}\int e^{-ax} \sin^{n-1} x \cos x\, dx$$

پھر حصہ سے تکمل کرنے پر ملتا ہے

$$\int e^{-ax} \sin^{n-1} x \cos x\, dx = -\frac{e^{-ax}}{a} \sin^{n-1} x \cos x + \int \frac{e^{-ax}}{a} [(n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x - \sin^n x] dx.$$

اب $\cos^2 x$ کو $1-\sin^2 x$ پر داہنی جانب کی قیمت

$$-\frac{e^{-ax}}{a}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{a}\int e^{-ax}\sin^{n-2}x\,dx-\frac{n}{a}\int e^{-ax}\sin^{n}x\,dx$$

ہوجاتی ہے۔ یہ قیمت (i) میں رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int e^{-ax}\sin^n x\,dx=-\frac{e^{-ax}}{a}\sin^n x-\frac{ne^{-ax}}{a^2}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n(n-1)}{a^2}\int e^{-ax}\sin^{n-2}x\,dx-\frac{n^2}{a^2}\int e^{-ax}\sin^n x\,dx$$

اب $\frac{n^2}{a^2}\int e^{-ax}\sin^n x\,dx$ کو بائیں جانب منتقل کرکے $(a^2+n^2)/a^2$ سے تقسیم کرنے اور حدیں 0 اور ∞ لیتے ہوئے ہم پاتے ہیں

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin^n x\,dx=-\left|\frac{a\sin^n x+n\sin^{n-1}x\cos x}{n^2+a^2}e^{-ax}\right|_0^\infty+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int_0^\infty e^{-ax}\sin^{n-2}x\,dx$$

جب $x\to\infty$ تو $e^{-ax}\to 0$ اور تب

$$\frac{a\sin^n x+n\sin^{n-1}x\cos x}{n^2+a^2}$$

متناہی رہتا ہے، اِس لیے جس رکن میں تکملہ کا نشان نہیں ہے وہ $x\to\infty$ ہونے پر صفر کی طرف مائل ہوتا ہے اور $x=0$ پر بھی وہ صفر ہے۔ اب اگر

$$I_n=\int_0^\infty e^{-ax}\sin^n x\,dx$$

رکھیں تو ہم پاتے ہیں

$$I_n=\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}I_{n-2}.$$

اِس سے ہم پاتے ہیں

$$I_{n-2}=\frac{(n-2)(n-3)}{a^2+(n-2)^2}I_{n-4},$$
$$I_{n-4}=\frac{(n-4)(n-5)}{a^2+(n-4)^2}I_{n-6},$$

آخر میں

$$I_3=\frac{3\ 2}{a^2+3^2}I \quad \text{(اگر n طاق ہو)}$$
$$I_2=\frac{2\ .\ 1}{a^2+2^2}I_0 \quad \text{(اگر n جفت ہو)}$$

اب

$$I_1=\int_0^\infty e^{-ax}\sin x\,dx$$
$$=\frac{1}{1+a^2}\cdot \quad \text{(مثال 2 دیکھیے)}$$

ساتھ ہی

$$I_0=\int_0^\infty e^{-ax}\sin^0 x\,dx=\int_0^\infty e^{-ax}\,dx=\frac{1}{a}$$

$$\therefore I_n=\begin{cases}\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots3.2}{(a^2+n^2)[a^2+(n-2)^2]\ \ldots(a^2+3^2)}\cdot\dfrac{1}{(a^2+1)} & \text{(اگر n طاق ہو)}\\[2ex] \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots2\cdot1}{[a^2+n^2][a^2+(n-2)^2][a^2+2^2]} & \text{(اگر n جفت ہو)}\end{cases}$$

مشقیں

1۔ ثابت کیجیے کہ اگر

$$I_{m,n}=\int\cos^m x\sin nx\,dx,$$

ہو تو

$$(m+n)\,I_{m,n}=-\cos^m x\cos nx+m\,I_{m-1,\,n-1}.$$

اِس لیے یا اور کسی طریقے سے تکملہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 3x \, dx.$$

حاصل کیجیے۔

2۔ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos nx \, dx = m\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} x \cos (n-1) x \, dx,$$

اور پھر $n > m$ ہونے پر اس سے بائیں جانب کا تکملہ حاصل کیجیے۔
خاص طور پر یہ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx \, dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

3-اگر

$$f(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \cos qx \, dx$$

ہوتو ذیل تحویلی فارمولا حاصل کیجیے:۔

$$f(p, q) = \frac{p(p-1)}{p^2-q^2} f(p-2, q) = \frac{p}{p+q} f(p-1, q-1).$$

4۔ثابت کیجیے کہ

$$\int \sin^m x \cos nx \, dx = \frac{m \cos x \cos nx + n \sin x \sin mx}{n^2 - m^2} \sin^{m-1} x - \frac{m(m-1)}{n^2-m^2} \int \sin^{m-2} x \cos nx \, dx$$

5۔اگر

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin mx \, dx,$$

ہوتو ثابت کیجیے کہ

$u_n = \frac{n \, \pi^{n-1}}{m^2 \, 2^{n-1}} - \frac{n(n-1)}{m^2} u_{n-2}$، اگر m، $4r+1$ کی شکل کا ہو۔

6۔ اگر

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin (2p+1)\, x\, dx,$$

ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$(2p+1)^2 I_n + n(n-1) I_{n-2} = (-1)^p \,.\, n.\, (\pi/2)^{n-1}$$

جہاں n , p مثبت کامل عدد ہوں۔

تکملہ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \sin 3x\, dx.$

حاصل کیجیے۔

7۔ بتائیے کہ تکملہ

$$\int x^m \cos nx\, dx$$

کیسے حاصل کریں گے۔

8۔ تکملہ

$$\int e^{ax} \cos^n x\, dx$$

کے لیے تحویلی فارمولا حاصل کیجیے، جب کہ n مثبت کامل عدد ہو۔

9۔ تکملہ

$$I_m = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin^m x\, dx \quad n \geqslant 2$$

کے لیے ذیل تحویلی فارمولا

$$(1+m^2)\, I_m = m\,(m-1)\, I_{m-2}.$$

ثابت کیجیے۔

اس سے I_4 کی قیمت نکالیے۔

10۔ حاصل کیجیے

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-3x} \cos^4 x\, dx.$$

جوابات

1. 1/3.

2. $-\frac{\pi}{2^{m+1}} \cdot \frac{\underline{|m}}{\underline{\left|\frac{(m+n)}{2}\right.} \cdot \underline{\left|\frac{(m-n)}{2}\right.}}$ (اگر $m-n$ جفت ہو)

$2^{m-1} \frac{\underline{|m} \; \underline{|(m+n-1)-2} \; \underline{|(m-n-1).2}}{\underline{|m+n} \cdot \underline{|m-n}}$ (اگر $(m-n)$ طاق ہو)

6. $(16+24\pi-9\pi^2)/162$

8. $\int e^{ax} \cos^n x \, dx = \frac{a \cos x + n \sin x}{a^2+n^2} e^{ax} \cdot \cos^{n-1} x$

$$+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} x \, dx.$$

9. 24 / 85   10. $\frac{16}{325} \sinh \frac{3\pi}{2}$

باب 4 پر مشقیں

1۔ ثابت کیجیے

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2a(a+b)}$,

(ii) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2 \cosh^2 x + b^2 \sinh^2 x} = \frac{1}{ab} \tan^{-1} \frac{b}{a}$

2۔ حاصل کیجیے

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2 \theta}$, (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2\theta)^2}$

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin 4x \, dx$, (iv) $\int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$.

3۔ حاصل کیجیے

(i) $\int \frac{\cos 7\theta - \cos 8\theta}{\cos 2\theta - \cos 3\theta} d\theta$, (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \cos x}{1 + \cos 2x} dx$.

4۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+\cos\alpha \sin 2\alpha} = \begin{cases} \alpha/\sin\alpha, & (0<\alpha<\pi \text{ اگر}) \\ 1, & (\alpha = 0 \text{ اگر}) \end{cases}$$

5۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\sin x \cos\lambda} = (\pi-\lambda)\operatorname{cosec}\lambda, \ (0<\lambda<\pi).$$

6۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta \cos^2\theta \, d\theta}{\sqrt{(1+a^2\cos^2\theta)}} = \frac{\sqrt{(1+a^2)}}{2a^2} - \frac{\sinh^{-1} a}{2a^3}$$

7۔ ثابت کیجیے کہ اگر $a^2 > b^2$ ہو تو

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}.$$

8۔ حاصل کیجیے

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2} dx$, (ii) $\int_0^{\pi} \frac{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}{a^4\sin^2 x+b^4\cos^2 x} dx$.

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cosh^2\alpha-\cos^2 x}$, (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x \, dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

9۔ ذیل تفاعلوں کے تکملے نکالیے:

(i) $\sqrt{(1+\sin x)}$, (ii) $\frac{\sin x}{\sqrt{(1+\sin x)}}$,

(iii) $\sqrt{(1+\sec x)}$, (iv) $\sqrt{(\sec x-1)}$,

(v) $\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}$, (vi) $\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}$.

10۔ تکمل کیجیے

(i) $\sec^2 x \log(1+\sin^2 x)$, (ii) $\frac{\sin x \log(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}$

(iii) $\cos 2x \log(1+\tan x)$, (iv) $\frac{\cosh x+\sinh x \sin x}{1+\cos x}$

11۔ حاصل کیجیے۔

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x}\, dx.$$

12۔ اگر $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n \theta\, d\theta,$ ہو تو ثابت کیجیے کہ کسی بھی مثبت کامل عدد n کے لیے

$$n(I_{n-1}+I_{n+1}) = 1$$

13۔ اگر

$$U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx,$$

ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$U_n + U_{n-2} = \frac{1}{n-1}$$

اور اس سے u_5 کی قیمت نکالیے۔

14۔ اگر

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin^n \theta\, d\theta$$

اور $n > 1$ ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$u_n = \frac{n-1}{n} u_{n-2} + \frac{1}{n^2}$$

اور دکھائیے کہ

$$u_5 = \frac{149}{225}.$$

15۔ اگر

$$u_n = \int \cos n\theta \operatorname{cosec} \theta\, d\theta$$

ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$u_n - u_{n-2} = \frac{2 \cos (n-1) \theta}{n-1}$$

اس سے یا کسی اور طریقے سے ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3\theta \sin 5\theta}{\sin \theta} d\theta = \frac{11}{105}$$

16۔ وہ تحویلی فارمولا نکالیے جو کہ

$$I_{m,n} = \int \cos^m x \sin^n x \, dx$$

کا $I_{m,\, n-2}$ اور $I_{m-2,\, n}$ سے رابطہ قائم کرے۔ اس سے ذیل نتیجہ نکالیے

$$(m+n)(m+n-2)\, I_{m,\, n}$$
$$= \{(n-1) \sin^2 x - (m-1) \cos^2 x\} \cos^{m-1} x \sin^{n-1} x$$
$$+ (m-1)(n-1)\, I_{m-2,\, n-2}.$$

17۔ ذیل تحویلی فارمولے نکالیے:

(i) $\int \sec^m \theta \operatorname{cosec}^n \theta \, d\theta$ (ii) $\int \tanh^n x \, dx$.

18۔ اگر

$$u_n = \int \frac{dx}{\cosh^n x}$$

تو ثابت کیجیے کہ

$$(n-1)\, u_n = \frac{\tanh x}{\cosh^{n-2} x} + (n-2)\, u_{n-2}$$

اگر $n = 5$ ہو تو تکملہ u_5 حاصل کیجیے

19۔ ثابت کیجیے کہ اگر

$$u_n = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos nx}{1 - \cos x} dx$$

ہو اور $n \geq 0$ کامل عدد ہو تو

$$u_{n+2}+u_n = 2u_{n+1}$$

ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 n\theta}{\sin^2 \theta}\, d\theta = \frac{n\pi}{2}$$

20۔ ثابت کیجیے کہ اگر n مثبت کامل عدد ہو تو

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos (n-1)x - \cos nx}{1-\cos x}\, dx = 2\pi$$

اس سے یہ نکالیے کہ

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{1}{2}nx}{\sin \frac{1}{2} x}\right)^2 dx = 2n\pi.$$

21۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}\, d\theta = \begin{cases} 0 & (\text{اگر } n \text{ جفت مثبت ہو}) \\ \pi & (\text{اگر } n \text{ طاق مثبت ہو}) \end{cases}$$

کسی تحویلی فارمولے سے یا کسی اور طریقے سے ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 n\theta}{\sin \theta}\, d\theta = \pi$$

ہوگا۔ اگر n مثبت کامل عدد ہو۔

22۔ جب

$$u_n = \int_0^{\pi} \frac{x \sin nx}{\sin x} dx$$

تو $u_n - u_{n-2}$ کی قیمت نکال کر یا کسی اور طریقے سے u_n کے لیے تحویلی فارمولا نکالیے۔

ثابت کیجیے کہ اگر n مثبت طاق عدد ہو تو

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin nx}{\sin x} dx = \frac{\pi^2}{2}$$

اور اگر n جفت ہو تو

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin nx}{\sin x} dx$$

کی قیمت n کو لا انتہا بڑھانے پر $-\pi^2/2$ کی طرف مائل ہوتی ہے۔

23۔ اگر

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos \theta + b \sin \theta)^n \, d\theta$$

ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$I_n = \frac{1}{n}\left[ab(a^{n-2}+b^{n-2}) + (n-1)(a^2+b^2)I_{n-2}\right]$$

اب I_5, I_4 حاصل کیجیے

$a \cos \theta + b \sin \theta = r \sin (\alpha + \theta)$ (یہاں)

24۔ حاصل کیجیے

(i) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin 2\theta}$, (ii) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a \cos^2\theta + 2h \sin \theta \cos \theta + b \sin^2 \theta}$, $(ab-h^2) > 0$

(iii) $\int_0^{2} \frac{dx}{(1+\cos \alpha \cos x)^2}$, $0 < \alpha < \pi$; (iv) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1+e \cos x)^2}$, $e < 1$

(v) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sec^2 \alpha \, dx}{\tan x - \tan \alpha}$, $\alpha > \frac{\pi}{4}$

25۔ ذیل معین تکملے حاصل کیجیے

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cot x \, dx$, (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \operatorname{cosec}^2 x \, dx$

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^3 \cos x}{\sin^3 x} dx$.

26۔ حاصل کیجیے

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \, dx}{\cos x(\cos x + \sin x)}$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2 (\sin 2x - \cos 2x)}{(1+\sin 2x) \cos^2 x} dx$.

27- حاصل کیجیے

(i) $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\, dx,$ (ii) $\int_0^{\pi} \frac{x^2 \cos x}{(1+\sin x)^2}\, dx.$

28- حاصل کیجیے

(i) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x \sin 2x}{\sin x + \cos x}\, dx,$ (ii) $\int_0^{\pi} \frac{x^2 \sin x\, dx}{(2x-\pi)(1+\cos^2 x)},$

(iii) $\int_0^{\pi} \frac{x^3 \cos^4 x \sin^2 x}{\pi^2 - 3\pi x + 3x^2}\, dx,$ (iv) $\int^{\pi} x \sin^6 x \cos^4 x\, dx.$

(v) $\int_0^{\pi} \frac{x^2 \sin 2x \sin (\frac{1}{2}\pi \cos x)}{2x - \pi}\, dx.$

29- ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin 2nx \cot x\, dx = \frac{\pi}{2}$$

اشارہ: $\frac{\sin 2nx}{\sin x} = 2[\cos x + \cos 3x + \dots + \cos (2n-1)x]$

30- ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi(\sin 2x) \sin x\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin 2x) \cos x\, dx$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \varphi(\cos 2x) \cos x\, dx.$$

جوابات

2. (i) $\pi/2ab.$ (ii) $\pi(a^2+b^2)/4a^3b^3.$

(iii) $1/3.$ (iv) $\frac{1}{2}[x+\log (\sin x+\cos x)].$

3. (i) $\theta+\frac{2}{5} \sin 5\theta.$ (ii) $\frac{1}{2}[(\sqrt{2}-1)+\log (\sqrt{2}+1)].$

8. (i) $1/2.$ (ii) $\frac{2\pi}{a^2+b^2}.$

(iii) $\frac{\pi}{\sinh 2\alpha},$ (اگر $\alpha \neq 0$) (iv) $\frac{\pi}{4}.$

9. (i) $-2\sqrt{(1-\sin x)}.$ (ii) $-2\sqrt{(1-\sin x)}-\sqrt{2} \log \tan (\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{4} x).$

(*iii*) $2\tan^{-1}\sqrt{(\sec x-1)}$. (*iv*) $-2\coth^{-1}[\sqrt{(1+\sec x)}]$.

(*v*) $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x-\cot x}{\sqrt{2}}\right)$

(*vi*) $\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\tan x}-\sqrt{\cot x}}{\sqrt{2}}\right)$.

10. (*i*) $\tan x\log(1+\sin^2 x)-2x-\sqrt{2}\tan^{-1}(\cot x/\sqrt{2})$

(*ii*) $\sec x\log(\sin x+\cos x)+\log\frac{\sin\frac{1}{2}x+\cos\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x-\sin\frac{1}{2}x}$

$$+\sqrt{2}\log\frac{\sin\frac{1}{2}x-(\sqrt{2}+1)\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x+(\sqrt{2}-1)\cos\frac{1}{2}x}$$

(*iii*) $\frac{1}{2}\sin 2x\log(1+\tan x)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\log\sin(x+\frac{1}{4}\pi)$.

(*iv*) $\cosh x\tan\frac{1}{2}$

11. $\frac{1}{2}(\pi/\sqrt{3}-\log 2)$. **13.** $\frac{1}{2}\log(4/e)$.

17 (*i*) $\int\sec^m\theta\,\mathrm{cosec}^n\theta\,d\theta=-\frac{1}{n-1}\sec^{m-1}\theta\,\mathrm{cosec}^{n-1}\theta$

$$+\frac{m+n-2}{n-1}\int\sec^m\theta\,\mathrm{cosec}^{n-2}\theta\,d\theta.$$

(*ii*) $\int\tanh^n x\,dx=-[1/(n-1)]\tanh^{n-1}x+\int\tanh^{n-2}x\,dx$.

18. $\frac{1}{4}\frac{\tanh x}{\cosh^2 x}+\frac{3}{8}\cdot\frac{\tanh x}{\cosh x}+\frac{3}{4}\tan^{-1}(e^x)$.

22. $u_n=\frac{2}{(n-1)^2}[(n-1)x\sin(n-1)x+\cos(n-1)x-1]+u_{n-1}$

23 $I_4=ab(a^2+b^2)+\frac{3}{16}(a^2+b^2)^2\pi$.

$I_5=ab(a^3+b^3)+\frac{4}{15}(a+b)(a^2+b^2)[ab+2(a^2+b^2)]$.

24. (*i*) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. (*ii*) $\frac{2\pi}{\sqrt{(ab-h^2)}}$.

(*iii*) $\frac{2\pi}{\sin^3\alpha}$ (*iv*) $\frac{2\pi}{(1-e^2)^{3/2}}$.

(*v*) $\log\frac{\sin(\alpha-\frac{1}{4}\pi)}{\sin\alpha}-\frac{\pi}{4}\tan\alpha$.

25. (*i*) $\frac{\pi}{8}\log 2$. (*ii*) $\pi\log 2$.

(*iii*) $-\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}\pi\log 2$.

26. (*i*) $\frac{\pi}{8}\log 2$. (*ii*) $\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{4}\log 2$.

27 (i) π. (ii) $\pi(2-\pi)$.

28 (i) $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}-1)$ (ii) $\frac{\pi^2}{4}$.

(iii) $\frac{\pi^2}{32}$ (iv) $\frac{3\pi^2}{512}$

5

غیر ناطق تفاعلوں (Irrational Functions) کا تکمل

5·1 ۔ ایسے تفاعل کا تکمل کرنا جو x اور خطی سرڈ (linear surd) $(ax+b)^{1/n}$ دونوں کا تفاعل ہو، جہاں n کوئی مثبت کامل عدد ہے۔

عوضی $ax+b = t^n$ سے دیا ہوا تکملہ t کے ناطق تفاعل کے تکملے میں بدل جاتا ہے جسے باب 3 میں بتائے گئے طریقے سے حاصل کر سکتے ہیں۔

اسی طرح سے x اور

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}$$

دونوں کے کسی تفاعل کا تکملہ بھی استحالہ

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$$

کے ذریعے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

ذیل کی مثالوں سے یہ عمل سمجھ میں آجائے گا۔

مثالیں

1- حاصل کیجیے

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x+2)}}\,dx$$

ہم رکھتے ہیں

$$x+2 = y^3 \Rightarrow dx = 3y^2\,dy$$

$$\therefore \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(x+2)}} = \int \frac{(y^3-2)^2 \cdot 3y^2 dy}{y}$$

$$= 3\int (y^7 - 4y^4 + 4y)\,dy$$

$$= 3\left\{\frac{y^8}{8} - \frac{4}{5}y^5 + 2y^2\right\}$$

$$= 3\left\{\frac{(x+2)^{8/3}}{8} - \frac{4}{5}(x+2)^{\frac{5}{3}} + 2(x+2)^{\frac{2}{3}}\right\}$$

$$= 3(x+2)^{\frac{2}{3}}\left\{\frac{(x+2)^2}{8} - \frac{4(x+2)}{5} + 2\right\}$$

$$= \frac{3}{40}(x+2)^{\frac{2}{3}}(5x^2 - 12x + 36)$$

2- حاصل کیجیے

$$\int \frac{1}{\sqrt{(1+x)} - \sqrt[3]{(1+x)}}\,dx$$

ہم رکھتے ہیں

$$1+x = y^6 \Rightarrow dx = 6y^5\,dy$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x)} + \sqrt[3]{(1+x)}} = \int \frac{6y^5}{y^3+y^2}\,dy = 6\int \frac{y^3}{y+1}\,dy$$

$$= 6\int\left(y^2 - y + 1 - \frac{1}{y+1}\right)dy$$

$$= 6\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + y - \log(y+1)\right]$$

$$= 2\sqrt{(1+x)} - 3\sqrt[3]{(1+x)} + 6\sqrt[6]{(1+x)}$$

$$- 6\log[1 + \sqrt[6]{(1+x)}].$$

3 - حاصل کیجیے

$$\int \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}\frac{dx}{x}$$

ہم رکھتے ہیں

$$\frac{1-x}{1+x} = y^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1-y^2}{1+y^2} \Rightarrow dx = -\frac{4y\,dy}{(1+y^2)^2}$$

$$\therefore \quad \int \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}\frac{dx}{x} = -4\int \frac{y^2}{(1-y^2)(1+y^2)}\,dy$$

$$= -2\int\left(\frac{1}{1-y^2}-\frac{1}{1+y^2}\right)dy$$

$$= -2\int\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y}\right)-\frac{1}{1+y^2}\right]dy$$

$$= \log\frac{1-y}{1+y}+2\tan^{-1}y$$

$$= \log\frac{\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}} + 2\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}$$

مشقیں

1 - ذیل تفاعلوں کے تکملے حاصل کیجیے

(i) $x\sqrt[3]{(a+bx)}$, (ii) $\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x+2)}}$,

(iii) $\frac{x}{(x+2)\sqrt{(x+1)}}$ (iv) $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

-2.

(i) $\frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}$, (ii) $\frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}$

(iii) $\frac{1}{\sqrt{(1+x)}+\sqrt[3]{(1+x)}}$ (iv) $\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}-1}$.

3۔

(i) $\dfrac{x^2}{\sqrt{(2x+3)}}$, (ii) $\dfrac{x^2}{(x+3)\sqrt{(3x+4)}}$

(iii) $\dfrac{1}{(x^3+x^2)\sqrt{(1+x)}}$ (iv) $\dfrac{x+1}{(x+2)(x+3)^{3/2}}$

(v) $\left(\dfrac{x+2}{2x+3}\right)^{1/2}\cdot\dfrac{1}{x}$, (vi) $\sqrt{\left(\dfrac{1+x^2}{x^2-x^4}\right)}$

4۔ حاصل کیجیے

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x\sqrt{(1+x)}}$, (ii) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x)}}$,

(iii) $\displaystyle\int_8^{15} \frac{dx}{(x-3)\sqrt{(x+1)}}$, (iv) $\displaystyle\int_3^8 \frac{2-3x}{x\sqrt{(1+x)}}\,dx.$

جوابات

1. (i) $3(4b^2x^2+abx-3a^2)\sqrt[3]{(a+bx)}/28b^2$. (ii) $\frac{3}{40}(x+2)^{2/3}(5x^2-12x+36)$

 (iii) $2\sqrt{(x+1)}-4\tan^{-1}\sqrt{(x+1)}$. (iv) $2\sqrt{x}+\log[(\sqrt{x}-1)/(\sqrt{x}+1)]$.

2. (i) $\frac{3}{2}\log(1+\sqrt[3]{x^2})$.

 (ii) $6[\tan^{-1}y-y+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{5}y^5+\frac{1}{6}y^6+\frac{1}{7}y^7-\frac{1}{8}y^8]$, $x=y^6$. جہاں

 (iii) $2\sqrt{(1+x)}-3\sqrt[3]{(1+x)}+6\sqrt[6]{(1+x)}-6\log[1+\sqrt[6]{(1+x)}]$.

 (iv) $2\log\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}+4\sqrt[4]{x}+\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}$.

3. (i) $\frac{1}{5}(x^2-2x+6)\sqrt{(2x+3)}$.

 (ii) $\dfrac{2}{27}(3x-35)\sqrt{(3x+4)}+\dfrac{18}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\sqrt{\left(\dfrac{3x+4}{5}\right)}$

 (iii) $-\left(\dfrac{3x+1}{x}\right)\dfrac{1}{\sqrt{(1+x)}}+\dfrac{3}{2}\log\dfrac{\sqrt{(1+x)}+1}{\sqrt{(1+x)}-1}$

 (iv) $-\dfrac{4}{\sqrt{(x+3)}}+\log\dfrac{\sqrt{(x+3)}+1}{\sqrt{(x+3)}-1}$.

 (v) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\log\dfrac{1+\sqrt{2y}}{1-\sqrt{2y}}-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\log\dfrac{\sqrt{3y}+\sqrt{2}}{\sqrt{3y}-\sqrt{2}}$, $y=\sqrt{\left(\dfrac{x+2}{2x-3}\right)}$ جہاں۔

(vi) $\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)}+\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{(1+x^2)}-\sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt{(1+x^2)}+\sqrt{(1-x^2)}}$

4. (i) $2\log(\sqrt{2}+1)$. (ii) $\sqrt{2}-\log(\sqrt{2}+1)$

(iii) $(\log 5-\log 3)/2$ (iv) $2\log(3/2e^2)$.

5.2- تکملے

(i) $\int\sqrt{(ax^2+bx+c)}\,dx$; (ii) $\int\frac{1}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}}\,dx$

حاصل کرنا

اگر a مثبت ہو، تو ہم پاتے ہیں

$$\sqrt{(ax^2+bx+c)}=\sqrt{\left[a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\right]}$$

$$=\sqrt{a}\sqrt{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]}$$

(i) مان لیجیے کہ a اور $4ac-b^2$ دونوں مثبت ہیں۔ اب ہم لکھتے ہیں

$$(4ac-b^2)/4a^2=k^2$$

اور $y=x+b/2a$ رکھنے پر ملتا ہے

$$\int\sqrt{(ax^2+bx+c)}\,dx=\sqrt{a}\int\sqrt{(y^2+k^2)}\,dy$$

$$=\sqrt{a}\left[\frac{y\sqrt{(y^2+k^2)}}{2}+\frac{k^2}{2}\sinh^{-1}\frac{y}{k}\right]$$

اور

$$\int\frac{1}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dy}{\sqrt{(y^2+k^2)}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\sinh^{-1}\frac{y}{k}$$

(ii) مان لیجیے a مثبت اور $4ac-b^2$ منفی ہے۔ ہم لکھتے ہیں

$$(4ac-b^2)/4a^2=-t^2$$

اور $y=x+b/2a$ رکھنے پر ملتا ہے۔

$$\int\sqrt{(ax^2+bx+c)}\,dx=\sqrt{a}\int\sqrt{(y^2-t^2)}\,dy$$

$$= \sqrt{a}\left[\frac{y\sqrt{(y^2-t^2)}}{2}-\frac{t^2}{2}\cosh^{-1}\frac{y}{t}\right]$$

اور
$$\int\frac{1}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dy}{\sqrt{(y^2-t^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\cosh^{-1}\frac{y}{t}$$

(iii) مان لیجیے کہ a منفی ہے

$$\sqrt{(ax^2+bx+c)} = \sqrt{(-a)}\sqrt{\left[-x^2-\frac{bx}{a}-\frac{c}{a}\right]}$$
$$= \sqrt{(-a)}\sqrt{\left[\frac{b^2-4ac}{4a^2}-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right]}$$
$$= \sqrt{(-a)}\sqrt{\left[\left(\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}\right)^2-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right]}$$

ہم نے مان لیا ہے کہ $b^2 > 4ac$ کیونکہ اگر $b^2 < 4ac$ ہوتا تو جذر کے تحت بڑے بریکٹ کے اندر کا حصہ ہمیشہ منفی ہوتا۔
پہلے کی طرح سے، ہم لکھتے ہیں

$$(b^2-4ac)/4a^2 = t^2$$

اور $y = x+b/2a$ لینے پر اس بار ملتا ہے

$$\int\sqrt{(ax^2+bx+c)}dx = \sqrt{(-a)}\int\sqrt{(t^2-y^2)}dy$$
$$= \sqrt{(-a)}\left[\frac{y\sqrt{(t^2-y^2)}}{2}+\frac{t^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{t}\right]$$

اور
$$\int\frac{1}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}}dx = \frac{1}{\sqrt{(-a)}}\int\frac{dy}{\sqrt{(t^2-y^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(-a)}}\sin^{-1}\frac{y}{t}$$

مشقیں

1۔ تکمل کیجیے

(i) $\frac{1}{\sqrt{(2x^2+3x+4)}}$, (ii) $\sqrt{(2x^2+3x+4)}$

(iii) $\dfrac{4}{\sqrt{(3x^2-4x+1)}}$, (iv) $\sqrt{(3x^2-4x+1)}$.

-2

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{(1+2x-3x^2)}}$, (ii) $\sqrt{(1+2x-3x^2)}$,

(iii) $\dfrac{1}{\sqrt{(5x-6-x^2)}}$

جوابات

1. (i) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \sinh^{-1} \dfrac{4x+3}{\sqrt{(23)}}$ (ii) $\dfrac{4x+3}{8} \sqrt{(2x^2+3x+4)} + \dfrac{23\sqrt{2}}{32} \sinh^{-1} \dfrac{4x+3}{\sqrt{(23)}}$,

(iii) $\dfrac{4}{\sqrt{3}} \cosh^{-1} (3x-2)$ (iv) $\dfrac{3x-2}{6} \sqrt{(3x^2-4x+1)} - \dfrac{\sqrt{3}}{18} \cosh^{-1} (3x-2)$.

2. (i) $\sqrt{\tfrac{1}{3}} \sin^{-1} [(3x-1)/2]$ (ii) $\dfrac{3x-1}{6} \sqrt{(1+2x-3x^2)} + \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \sin^{-1} \left(\dfrac{3x-1}{2}\right)$

(iii) $\sin^{-1} (2x-5)$

5.3 تفاعلوں

(i) $\dfrac{Ax+B}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}}$, (ii) $(Ax+B) \sqrt{(ax^2+bx+c)}$

کا تکمل کرنا ہم دو مستقل λ اور μ ایسے معلوم کرتے ہیں کہ

$$Ax+B = \lambda (2ax+b) + \mu$$

جہاں $2ax+b$ تفاعل ax^2+bx+c کا تفرقی سر ہے۔ λ اور μ ذیل سے ملتے ہیں:

$$A = 2a\lambda, \quad B = b\lambda + \mu,$$

$$\lambda = \frac{A}{2a}, \quad \mu = \frac{2aB - Ab}{2a}$$

(i) ہم پاتے ہیں

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}}\,dx = \int \frac{\lambda(2ax+b)+\mu}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}}\,dx$$

$$= \lambda \int (ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}}(2ax+b)dx+\mu \int \frac{dx}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}}$$

$$= 2\lambda\,(ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}}+\mu \int \frac{dx}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}}$$

اور اس آخر والے تکملہ پر § 5.2. میں غور کیا جا چکا ہے۔

(ii) پھر، ہم پاتے ہیں

$$\int (Ax+B)\sqrt{(ax^2+bx+c)}dx$$

$$=\lambda \int(2ax+b)\sqrt{(ax^2+bx+c)}dx+\mu \int \sqrt{(ax^2+bx+c)}\,d$$

$$= \frac{2\lambda}{3}(ax^2+bx+c)^{3/2}+\mu \int \sqrt{(ax^2+bx+c)}\,dx,$$

اور اس آخر والے تکملہ پر § 5·2 میں غور کیا جا چکا ہے۔

مشقیں

1۔ حاصل کیجیے

(i) $\int x\sqrt{(1+x-x^2)}dx$, (ii) $\int \frac{x}{\sqrt{(8+x-x^2)}}\,dx$,

(iii) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{(4x^2+5x+6)}}\,dx$, (iv) $\int \frac{x}{\sqrt{(3x^2+2x+1)}}\,dx$.

2۔ حاصل کیجیے

(i) $\int \frac{x^2-2x+3}{\sqrt{(x^2+1)}}\,dx$, (ii) $\int \frac{x^3-3}{\sqrt{(x^2+2)}}\,dx$,

(iii) $\int (2x-5)\sqrt{(2+3x-x^2)}dx$.

جوابات

1. (i) $\frac{1}{24}(8x^2-2x-11)\sqrt{(1+x-x^2)}+\frac{5}{16}\sin^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{5}}$.

(ii) $-\sqrt{(8+x-x^2)}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{33}}$

(iii) $\frac{\sqrt{(4x^2+5x+6)}}{2}+\frac{7}{8}\sinh^{-1}\frac{8x+5}{\sqrt{71}}$.

(iv) $\frac{\sqrt{(3x^2+2x+1)}}{3}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\sinh^{-1}\frac{3x+1}{\sqrt{2}}$.

2. (i) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{(x^2+1)}+\frac{5}{2}\sinh^{-1}x$.

(ii) $\frac{1}{3}(x^2-4)\sqrt{(x^2+2)}-3\sinh^{-1}(x/\sqrt{2})$.

(iii) $\frac{1}{6}(4x^2-18x+1)\sqrt{(2+3x-x^2)}-\frac{17}{4}\sin^{-1}\frac{2x-3}{\sqrt{17}}$.

5.4 ۔ تکملہ

$$\int\frac{x^n}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}}\,dx,$$

کے لیے تحویلی فارمولا حاصل کرنا، جبکہ n مثبت کامل عدد ہو

مان لیجیے کہ

$$I_n=\int\frac{x^n}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}}\,dx.$$

اب ہم I_n کا I_{n-1} اور I_{n-2} سے رابطہ قائم کرتا ہوا تحویلی فارمولا حاصل کریں گے۔

ہم نوٹ کرتے ہیں کہ ax^2+bx+c , $2ax+b$ کا تفرقی سر ہے۔

پہلے ہم لکھتے ہیں

$$x^n = \frac{2ax+b-b}{2a} \cdot x^{n-1}$$

$$\text{(i)} \cdots \therefore \quad I_n = \frac{1}{2a}\int\frac{(2ax+b)x^{n-1}}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}}\,dx - \frac{b}{2a}\int\frac{x^{n-1}}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}}\,dx.$$

داہنی طرف کے I_n کے قریب والے تکملہ کا حصہ سے تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int\frac{2ax+b}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}}\,x^{n-1}\,dx$$

$$= 2\sqrt{(ax^2+bx+c)}x^{n-1} - 2\int(n-1)\,x^{n-2}\,\sqrt{(ax^2+bx+c)}dx$$

$$= 2\sqrt{(ax^2+bx+c)}x^{n-1} - 2(n-1)\int\frac{x^{n-2}(ax^2+bx+c)}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}}dx$$

$$\text{(ii)} \cdots = 2\sqrt{(ax^2+bx+c)}x^{n-1} - 2a(n-1)I_n - 2b(n-1)I_{n-1} - 2c(n-1)\,I_{n-2}$$

اب (i) اور (ii) سے ملتا ہے

$$I_n = \frac{1}{a}\,\sqrt{(ax^2+bx+c)}x^{n-1} - (n-1)\,I_n - \frac{b(n-1)}{a}I_{n-1}$$
$$- \frac{c(n-1)}{a}I_{n-2} - \frac{b}{2a}\,I_{n-1}.$$

اب $(n-1)\,I_n$ کو بائیں طرف منتقل کرکے n سے تقسیم کرنے پر ملتا ہے

$$\text{(A)} \cdots I_n = \frac{\sqrt{(ax^2+bx+c)}\,x^{n-1}}{an} - \frac{b(2n-1)}{2an}I_{n-1} - \frac{c(n-1)}{an}I_{n-2}$$

جو کہ درکار تحویلی فارمولا ہے۔

چونکہ I_1 اور I_0 پہلے ہی حاصل کیے جاچکے ہیں اس لیے اس تحویلی فارمولے کے متواتر استعمال سے ہم I_2, I_3, I_4 وغیرہ معلوم کرسکتے ہیں۔

مثال

حاصل کیجیے

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{(x^2-2x+2)}}dx.$$

تحویلی فارمولا (A) میں $a = 1$, $b = -2$ اور $c = 2$ رکھنے پر ملتا ہے

$$\int \frac{x^n}{\sqrt{(x^2-2x+2)}}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2-2x+2)}}{n}.\,x^{n-1} + \frac{2n-1}{n}\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{(x^2-2x+2)}}dx - \frac{2(n-1)}{n}\int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{(x^2-2x+2)}}dx.$$

اب $n = 3$ اور $n = 2$ رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$(i) \ldots \int \frac{x^3}{\sqrt{(x^2-2x+2)}}dx = \frac{\sqrt{(x^2-2x+2)}}{3}x^2 + \frac{5}{3}\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-2x+2)}}dx - \frac{4}{3}\int \frac{x}{\sqrt{(x^2-2x+2)}}\,dx$$

$$(ii) \ldots \int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-2x+2)}}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2-2x+2)}}{2}x + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+2)}} - \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+2)}}$$

اب

$$\int \frac{x}{\sqrt{(x^2-2x+2)}}dx = \frac{1}{2}\int \left[\frac{2x-2}{\sqrt{(x^2-2x+2)}} + \frac{2}{\sqrt{[(x-1)^2+1)]}}\right]dx$$

$$(iii) \ldots\ldots\ldots = (x^2-2x+2)^{\frac{1}{2}} + \sinh^{-1}(x-1)$$

اور

$$(iv) \ldots\ldots\ldots \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+2)}} = \sinh^{-1}(x-1).$$

مساواتوں (i), (ii), (iii) اور (iv) کے اس نظام سے ہم پاتے ہیں

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{(x^2-2x+2)}}\,dx = \frac{2x^2+5x+15}{6}\sqrt{(x^2-2x+2)} + \frac{5}{6}\sinh^{-1}(x-1)$$

نوٹ: کبھی کبھی $x^n/\sqrt{(ax^2+bx+c)}$ کا تکمل بہ آسانی ایک دوسرے طریقے سے کیا جا سکتا ہے جسے ہم اب بیان کریں گے۔

یہ طریقہ زیادہ عام تکملہ

$$\int \frac{\varphi(x)}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}}\, dx$$

کے لیے بھی استعمال کیا جاسکتا ہے، جہاں کہ $\varphi(x)$ ، x کا کوئی کثیر رکنی (polynomial) ہو
یہ طریقہ ذیل نتیجے پر منحصر ہے :-

اگر $\varphi(x)$ ڈگری n کا کثیر رکنی ہو، تو $(n-1)$ ڈگری کے ایک ایسے کثیر رکنی $f(x)$ اور ایک ایسے مستقل A کا وجود ہوتا ہے کہ

$$\int \frac{\varphi(x)}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}}\, dx = f(x)\sqrt{(ax^2+bx+c)}+A\int\frac{dx}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}}$$

دونوں طرف تفرق کرنے ، اور پھر $\sqrt{(ax^2+bx+c)}$ سے ضرب کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\varphi(x) = f'(x)\,(ax^2+bx+c)+\tfrac{1}{2}\,(2ax+b)f(x)+A.$$

اس مساوات میں دونوں طرف کے حصے ڈگری n کے کثیر رکنی ہیں۔ دونوں جانب مستقل جزو اور x ، x^2 ، x^3 وغیرہ کے ضریبوں کی برابری کرنے پر ہمیں $n-1$ سطری مساواتیں ملتی ہیں جن سے کثیر رکنی $f(x)$ کے n ضریب اور مستقل A یکتا طور پر حاصل ہوجاتے ہیں۔ اس طرح $f(x)$ اور A مکمل طور پر مل جاتے ہیں۔
یہ طریقہ ہم ایک مثال کے ذریعے سمجھائیں گے۔

مثال

حاصل کیجیے

$$\int \frac{x^3+5x^2-3x+4}{\sqrt{(x^2+x+1)}}\, dx.$$

یہاں $\varphi(x) = x^3+5x^2-3x+4$ تیسری ڈگری کا کثیر رکنی ہے۔ ہم لکھتے ہیں

$$\int\frac{x^3+5x^2-3x+4}{\sqrt{(x^2+x+1)}}\,dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{(x^2+x+1)}+D\int\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1)}}\,dx$$

تفرق کرکے $\sqrt{(x^2+x+1)}$ سے ضرب دینے پر ہم پاتے ہیں

$$x^3+5x^2-3x+4 = (2Ax+B)(x^2+x+1)+\tfrac{1}{2}(Ax^2+Bx+C)(2x+1)+D.$$

پھر دونوں طرف x کی یکساں قوتوں کے ضریبوں کی برابری کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔

$$1 = 3A, \quad 5 = \tfrac{5}{2}A+2B, \quad -3 = 2A+\tfrac{3}{2}B+C \quad 4 = B+\tfrac{1}{2}C+D.$$

ان سے ہم پاتے ہیں

$$A = 1/3\,;\ B = 25/12\,;\ C = -163/24\,;\ D = 85/16.$$

ساتھ ہی

$$\int\frac{1}{\sqrt{(x^2+x+1)}}\,dx = \int\frac{dx}{\sqrt{[(x+\frac{1}{2})^2+(\sqrt{3}/2)^2]}}$$

$$= \sinh^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$\int\frac{x^3+5x^2-3x+4}{\sqrt{(x^2+x+1)}}\,dx = \left(\frac{x^2}{3}+\frac{25}{12}x-\frac{163}{24}\right)\sqrt{(x^2+x+1)} + \frac{85}{16}\sinh^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

مشقیں

1 ۔ ذیل تفاعلوں کے تکملے معلوم کیجیے

(i) $\dfrac{x^3+4x^2-6x+3}{\sqrt{(5+6x-x^2)}}$, (ii) $\dfrac{x^4}{\sqrt{(3+2x+x^2)}}$,

(iii) $\dfrac{x^3}{\sqrt{(ax^2+2bx+c)}}$.

2 ۔ تکملہ

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(x^2+2x+2)}}$$

کو دو مختلف طریقوں سے حاصل کیجیے۔

جوابات

1. (i) $\frac{1}{3}(2x^2+27x+227)\sqrt{(5+6x-x^2)}-139\sin^{-1}[(3-x)/\sqrt{(14)}]$.

   (ii) $\frac{1}{24}(3x^3-7x^2+4x+30)\sqrt{(3+2x+x^2)}-\frac{9}{8}\sinh^{-1}[(x+1)/\sqrt{2}]$.

   (iii) $\frac{1}{6a^3}(2a^2x^2-5abx+15b^2-4ac)\sqrt{(ax^2+2bx+c)}$

   $$+\frac{3abc-5b^3}{2a^3}\int\frac{dx}{\sqrt{(ax^2+2bx+c)}}$$

2. $\frac{1}{6}(2x^2-5x+7)\sqrt{(x^2+2x+2)}+\frac{1}{2}\sinh^{-1}(x+1)$.

5·5 ۔ تکملہ

$$\int\frac{dx}{(Ax+B)\sqrt{(ax^2+bx+c)}}$$

حاصل کرنا

عوضی $Ax+B=1/t$ کے ذریعے دیا ہوا تکملہ ایسے تکملہ میں بدل جاتا ہے جس پر § 5·2 میں غور کیا جا چکا ہے۔

ہم پاتے ہیں

$$dx=-\frac{1}{At^2}dt,$$

اور

$$x=\left(\frac{1}{t}-B\right)\frac{1}{A}=\frac{1-Bt}{At}$$

لہٰذا ہم پاتے ہیں

$$\int\frac{dx}{(Ax+B)\sqrt{(ax^2+bx+c)}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{[(aB^2-bAB+cA^2)t^2+(bA-2aB)t+a]}},$$

اور اس طرح کے تکملہ پر § 5·2 میں غور ہو چکا ہے۔

مثال

حاصل کیجیے

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{(2x^2+3x+4)}}$$

اب ہم $x+1=1/y$ رکھنے پر پاتے ہیں

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{(2x^2+3x+4)}}=-\int\frac{dy}{\sqrt{(3y^2-y+2)}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt3}\int\frac{dy}{\sqrt{[(y-1/6)^2+(\sqrt{23}/6)^2]}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt3}\sinh^{-1}\frac{6y-1}{\sqrt{23}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt3}\sinh^{-1}\left[\frac{5-x}{\sqrt{23}\,(x+1)}\right]$$

نوٹ: اگر r مثبت کامل عدد ہو تو تکملہ

$$\int\frac{dx}{(Ax+B)^r\sqrt{(ax^2+bx+c)}}$$

عوضی $1/t=Ax+B$ کے ذریعے بھی نکالا جا سکتا ہے۔

مشقیں

ذیل تکملے حاصل کیجیے

1. (i) $\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{(1-2x+3x^2)}}$, (ii) $\int\frac{dx}{(3+2x)\sqrt{(x^2+x+1)}}$

(iii) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x^2-1)}}$, (iv) $\int\frac{(x+1)dx}{(2+x)\sqrt{(2x^2-3x+1)}}$,

2 (i) $\int\frac{1+2x}{(1+3x)\sqrt{(x^2+2x+5)}}\,dx$, (ii) $\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$,

(iii) $\int\frac{x^2+2x-1}{(x+2)\sqrt{(2x^2+3x-4)}}\,dx$, (iv) $\int\frac{\sqrt{(1+x+x^2)}}{1+x}dx$.

3. (i) $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{[(x-a)(b-x)]}}$, (ii) $\int\frac{(x^2+1)\,dx}{x\sqrt{(4x^2+1)}}$,

(iii) $\int\frac{x^3}{(x-1)\sqrt{(x^2-x+1)}}dx$ (iv) $\int\frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{(3x+4x-5)}}$.

جوابات

1. (i) $\frac{1}{3}\sinh^{-1}\left[\frac{5x+1}{\sqrt{2}(2-x)}\right]$.

(ii) $-\frac{1}{\sqrt{7}}\sinh^{-1}\left[\frac{1-4x}{\sqrt{3}(3+2x)}\right]$. (iii) $\sqrt{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$.

(iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh^{-1}(4x-3)+\frac{1}{\sqrt{15}}\cosh^{-1}\left(\frac{8-11x}{2+x}\right)$

2. (i) $\frac{2}{3}\sinh^{-1}\frac{x+1}{2}-\frac{1}{3\sqrt{40}}\sinh^{-1}\left(\frac{7+x}{1+3x}\right)$

(ii) $\sqrt{(x^2+1)}-\text{cosech}^{-1}x$.

(iii) $\frac{1}{2}\sqrt{(2x^2+3x-4)}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\cosh^{-1}\frac{4x+3}{\sqrt{41}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{5x+14}{\sqrt{41}(x+2)}$.

(iv) $\sqrt{(x^2+x+1)}-\frac{1}{2}\sinh^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\sinh^{-1}\left\{\frac{1-x}{\sqrt{3}(1+x)}\right\}$.

۳. (i) $\frac{2}{a-b}\sqrt{\left(\frac{b-x}{x-a}\right)}$ (ii) $\frac{1}{4}\cdot\sqrt{(4x^2+1)}-\sinh^{-1}\left(\frac{1}{2x}\right)$.

(iii) $\frac{1}{4}(2x+7)\sqrt{(x^2-x+1)}+\frac{11}{8}\sinh^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\sinh^{-1}\left[\frac{x+1}{\sqrt{3}(x-1)}\right]$

(iv) $\frac{\sqrt{(3x^2+4x-5)}}{x+2}+4\sin^{-1}\frac{4x+9}{\sqrt{19}(x+2)}$.

5·6 - تکملہ

$$\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)\sqrt{(Ax^2+Bx+C)}}$$

حاصل کرنا

اس صورت میں مناسب عوضی

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{ax^2+bx+c}=y^2.$$

ہے۔ اب ایک مثال سے یہ طریقہ سمجھائیں گے۔

مثال

حاصل کیجیے

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)}}$$

ہم رکھتے ہیں

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

$$\Rightarrow \quad 2x\,dx = -\frac{4y\,dy}{(1+y^2)^2}$$

ساتھ ہی

$$1+x^2 = \frac{2}{1+y^2} \quad \text{اور} \quad 1-x^2 = \frac{2y^2}{1+y^2}.$$

$$\therefore \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1} y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1} \sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}$$

مشقیں

ذیل تکملے حاصل کیجیے:-

1 (i) $\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{(x^2+1)}}$, (ii) $\int \frac{dx}{(2x^2+3)\sqrt{(3x^2-4)}}$

(iii) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(x^2+1)}}$, (iv) $\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+4)\sqrt{(x^2+9)}}$

2. (i) $\int \frac{(x^2+2x+3)\,dx}{(x^2+1)\sqrt{(x^2-2)}}$ (ii) $\int \frac{(x^3+x^2+x+1)dx}{(x^2+2)\sqrt{(x^2-3)}}$

(iii) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{(x^2+b^2)}}$, $(a^2<b^2)$ (iv) $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)}}$.

جوابات

1. (i) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh^{-1}\sqrt{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}$. (ii) $\frac{1}{\sqrt{51}}\sinh^{-1}\sqrt{\left(\frac{9x^2-12}{8x^2+12}\right)}$.

(iii) $\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$. (iv) $\frac{\sqrt{5}}{10}\log\frac{\sqrt{(x^2+9)}-\sqrt{5}}{\sqrt{(x^2+9)}+\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{10}\tan^{-1}\frac{\sqrt{5}x}{2\sqrt{(x^2+9)}}$.

2 (i) $\cosh^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{x^2-2}{3}\right)}+\frac{2}{\sqrt{3}}\sinh^{-1}\sqrt{\left(\frac{x^2-2}{2x^2+2}\right)}$.

(ii) $\sqrt{(x^2-3)}-\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{x^2-3}{5}\right)}+\cosh^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}$

$$-\frac{1}{\sqrt{10}}\sinh^{-1}\sqrt{\left(\frac{2x^2-6}{3x^2+6}\right)}$$

(iii) $\frac{1}{a\sqrt{(b^2-a^2)}}\cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$. (iv) $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

5·7 ـ مثلثاتی استحالوں (trigonometric transformations) کے ذریعہ جبری غیرناطق تفاعلوں کا تکمل :

کچھ حالات میں، جبری غیرناطق تفاعلوں کے تکمل میں مثلثاتی استحالوں سے بڑی سہولت ہوتی ہے۔ اس طرح کی مثالیں پہلے بھی § 2·4 میں آچکی ہیں۔

ایسے تفاعلوں کے تکمل میں جن میں

$\sqrt{(a^2-x^2)}$ ، $\sqrt{(a^2+x^2)}$ یا $\sqrt{(x^2-a^2)}$

ہوتے ہوں، ان کے تکمل کے لیے ترتیب وار استحالے

$x=a\sin\theta$ ، $x=a\tan\theta$ ، $x=a\sec\theta$

کارآمد ہوتے ہیں۔

جن تفاعلوں میں

$\sqrt{(x^2-a^2)}$ یا $\sqrt{(a^2+x^2)}$

ہوتے ہیں اُن کے تکمل کے لیے ترتیب وار استحالے

$x = a\cosh\theta$ اور $x = a\sinh\theta$,

بھی کارآمد ہوتے ہیں۔

مثالیں

1۔ حاصل کیجیے

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{(1-x^2)}}dx.$$

$x = \sin\theta.$ رکھنے پر دیا ہوا تکملہ

$$= \int \operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta = -\cot\theta = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$$

2۔ حاصل کیجیے

$$\int_0^1 x\sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}dx.$$

ہم رکھتے ہیں

$$x^2 = \cos\theta \Rightarrow 2x\,dx = -\sin\theta\, d\theta.$$

اب $x = 0$ پر $\theta = \pi/2$ اور $x = 1$ پر $\theta = 0$۔ لہٰذا دیا ہوا تکملہ

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{\left(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)}\frac{\sin\theta}{2}\,d\theta$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos\theta)\,d\theta = \frac{\pi-2}{4}$$

3۔ حاصل کیجیے

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$$

$x = \tan\theta$ رکھنے پر دیا ہوا تکملہ

$$= \int \cos\theta \, d\theta = \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}.$$

مشقیں

1۔ حاصل کیجیے

(i) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{(1+x^2)}}dx,$ (ii) $\int \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}}.$

(iii) $\int \frac{1}{(2ax+x^2)^{3/2}}dx,$ (iv) $\int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^{3/2}},$

2 –

(i) $\int x\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}dx,$ (ii) $\int \frac{\sqrt{(x^2-a^2)}}{x}dx,$

(iii) $\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{[(x-\alpha)(\beta-x)]}}, (\beta > \alpha),$

(iv) $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{3/2}},$ (v) $\int \frac{(1+x\cos\alpha)\,dx}{(1+2x\cos\alpha+x^2)^{3/2}}.$

3۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-2x^2)\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$$

جوابات

1. (i) $-\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$ (ii) $\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{(4+x^2)}},$

(iii) $-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{a+x}{\sqrt{(2ax+x^2)}}$ (iv) $\frac{1}{9}\cdot\frac{x+1}{\sqrt{(x^2+2x+10)}}.$

2. (i) $\frac{1}{2}\cos^{-1}x+\frac{1}{8}(x-2)\sqrt{(1-x^2)}$.

(ii) $a\sqrt{(x^2-a^2)}-a\cos^{-1}(a/x)$. (iii) π.

(iv) $-\dfrac{x}{a^2\sqrt{(x^2-a^2)}}$. (v) $\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+2x\cos\alpha+1)}}$

5·8۔ تفاعل $x^m(a+bx^n)^p$ کا تکمل کرنا جبکہ p, n, m سبھی ناطق

نمبر ہوں۔ (rational) ہم اُن مختلف صورتوں پر غور کریں گے جن میں کہ $x^m(a+bx^n)^p$ کا تکمل ابتدائی تفاعلوں کے ارکان میں کی جا سکتی ہے۔

I اگر p مثبت کامل عدد ہو، تو دو رُکنی فارمولے سے کالمیہ کو $(p+1)$ ارکان کے جوڑ کی شکل میں رکھ کر ہر رُکن کا تکمل کر سکتے ہیں۔

II مان لیجیے p منفی کامل عدد ہے، $-q$ کہہ لیجیے جہاں q مثبت کامل عدد ہے۔ اب ہم m اور n کو یوں لکھتے ہیں کہ اُن کا نسب نما ایک ہی ہو۔ مان لیجیے

$$m=\frac{r}{s},\quad n=\frac{t}{s}$$

جہاں s مثبت ہے اور r, t مثبت یا منفی ہو سکتے ہیں۔ اب عوضی $x^{1/s}=y$ کرنے پر، $x=y^s$ اِس لیے

$$\therefore\quad \int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\int x^{r/s}(a+bx^{t/s})^p\,dx$$
$$=\int\frac{y^r\cdot sy^{s-1}}{(a+by^t)^q}\,dy=s\int\frac{y^{r+s-1}}{(a+by^t)^q}\,dy,$$

جو کہ باب 3 میں بتائے گئے طریقوں سے حاصل ہو سکتا ہے کیوں کہ اِس میں تکاملیہ y کا ناطق تفاعل ہے۔

III مان لیجیے p ایک ناطق نمبر ہے، یعنی r/s جہاں s مثبت ہے۔ عوضی $(a+bx^n)^{1/s} = y$ کرنے پر $a+bx^n = y^s$

$$\therefore \quad \int x^m(a+bx^n)^{r/s}\,dx = \int \frac{x^m \cdot y^r \cdot sy^{s-1}}{nbx^{n-1}}\,dy$$

$$= \frac{s}{nb}\int \left(\frac{y^s-a}{b}\right)^{\frac{m-n+1}{n}} y^{r+s-1}\,dy$$

$$= \frac{s}{nb}\int \left(\frac{y^s-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} y^{r+s-1}\,dy$$

اوپر کی پہلی اور دوسری صورتوں (اور   ) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کے کامل عدد ہونے پر (مثبت یا منفی) یہ تکملہ حاصل ہو سکتا ہے۔

IV ہم لکھتے ہیں

$$x^m(a+bx^n)^p = x^m[x^n(b+ax^{-n})]^p$$

$$= x^{m+np}(b+ax^{-n})^p$$

اب اوپر صورت III میں حاصل نتیجے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر $\frac{m+np+1}{-n}$ یعنی $\frac{m+1}{n}+$ عدد صحیح ہو تو $x^m(x+bx^n)^p$ کا تکمل ہو سکتا ہے۔ لہٰذا ہم دیکھتے ہیں کہ $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ اُس وقت بھی حاصل ہو سکتا ہے۔ جب کہ $\frac{m+1}{n}+p$ کامل عدد ہو، مثبت یا منفی۔

اوپر کی بحث سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر

(i) p کامل عدد ہو۔

یا (ii) $(m+1)/n$ کامل عدد ہو۔

یا (iii) $m+1)/n+p$ کامل عدد ہو۔

تو تکملہ

$$\int x^m (a+bx^n)^p \, dx$$

حاصل کر سکتے ہیں

نوٹ : یہ غور کرنے کی بات ہے کہ جب p یا $(m+1)/n$ مثبت کامل عدد ہو یا $\frac{m+1}{n}+p$ نفی کامل عدد ہو تو تکمل بہت آسان ہوتا ہے کیوں کہ ایسی صورتوں میں تکاملیہ کو متناہی تعداد میں ارکان کے جوڑ کی طرح رکھ سکتے ہیں اور ہر رکن کا تکمل ہو سکتا ہے۔ جب p یا $(m+1)/n$ نفی کامل عدد ہوں یا $\{(m+1)/n+p\}$ مثبت کامل عدد ہو، تب تکمل نسبتاً مشکل ہے کیوں کہ ان صورتوں میں تکاملیہ کو جزوی کسروں میں توڑنا پڑتا ہے § 5·9 میں کچھ تحویلی فارمولے حاصل کیے جائیں گے جو کہ ایسی صورت میں کارآمد ہوتے ہیں۔

مثالیں

۱۔ حاصل کیجیے

$$\int \sqrt{x}\,(2+\sqrt[3]{x})^2 \, dx.$$

ہم پاتے ہیں

$$\int \sqrt{x}(2+\sqrt[3]{x})^2 dx = \int \sqrt{x}\left[4+x^{\frac{2}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}\right] dx$$
$$= \int \left(4x^{\frac{1}{2}}+4x^{\frac{7}{6}}+4x^{6}\right) dx$$
$$= \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{24}{13}x^{\frac{13}{6}}+\frac{24}{11}x^{\frac{11}{6}}$$

2۔ حاصل کیجیے

$$\int \sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})^{-2} \, dx.$$

یہاں $p=-2$ نفی عدد صحیح ہے۔

چونکہ $m=\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ ، $n=\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$ ، اس لیے ہم رکھتے ہیں

$$x^{\frac{1}{6}}=y \text{ so that } x=y^6$$

$$\therefore \int \sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})^{-2}\,dx=\int \frac{y^3\,.\,6y^5}{(1+y^2)^2}\,dx=6\int \frac{y^8}{(1+y^2)^2}\,dy.$$

اب

$$\frac{y^8}{(1+y^2)^2}=y^4-2y^2+3-\frac{4y^2+3}{(1+y^2)^2}$$
$$=y^4-2y^2+3-\frac{4(y^2+1)-1}{(1+y^2)^2}$$
$$=y^4-2y^2+3-\frac{4}{1+y^2}+\frac{1}{(1+y^2)^2}.$$

اس لیے

$$\int \frac{y^8}{(1+y^2)^2}\,dy=\frac{1}{5}y^5-\frac{2}{3}y^3+3y-4\tan^{-1}y+\int \frac{1}{(1+y^2)^2}\,dy.$$

داہنی طرف کے تکملے کو نکالنے کے لیے ہم رکھتے ہیں $y=\tan\theta$ اور ہمیں ملتا ہے

$$\int \frac{1}{(1+y^2)^2}\,dy=\int \cos^2\theta\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$=\tfrac{1}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta)=\tfrac{1}{2}\left[\tan^{-1}y+\frac{y}{1+y^2}\right].$$

$$\therefore \quad \int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^{-2}\,dx$$
$$=6\left[\frac{1}{5}y^5-\frac{2}{3}y^3+3y-\frac{7}{2}\tan^{-1}y+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{y}{1+y^2}\right],$$

جہاں کہ $y=\sqrt[6]{x}$.

حاصل کیجیے

$$\int x^4(1+x^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{3}}dx.$$

یہاں $m=4$, $n=\frac{5}{2}$ اس لیے $(m+1)/n=2$ جو کہ مثبت کامل عدد ہے۔
ہم رکھتے ہیں

$$1+x^{\frac{5}{2}}=y^2, \qquad \therefore \quad \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}dx=2y\,dy.$$

$$\int x^4(1+x^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{2}}\,dx=\int x^4\,.\,y\,.\,\frac{4y}{5x^{\frac{3}{2}}}dy$$

$$=\frac{4}{5}\int y^2x^{\frac{5}{2}}dy = \frac{4}{5}\int y^2(y^2-1)\,dy = \frac{4y^3(3y^2-5)}{75}$$

$$y^2=1+x^{\frac{5}{2}}$$

4 ۔ حاصل کیجیے

$$\int\frac{1}{\sqrt[4]{x(1+x^3)^5}}\,dx.$$

ہم پاتے ہیں

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x(1+x^3)^5}}=x^{-\frac{1}{4}}(1+x^3)^{-\frac{5}{4}}$$

یہاں

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{-\frac{1}{4}+1}{3}-\frac{5}{4}=-1$$

جو کہ نفی کامل عدد ہے۔ ہم لکھتے ہیں

$$x^{-\frac{1}{4}}(1+x^3)^{-\frac{5}{4}}=x^{-\frac{1}{4}}x^{-\frac{15}{4}}(1+x^{-3})^{-\frac{5}{4}}$$

$$=x^{-4}(1+x^{-3})^{-\frac{5}{4}}.$$

اب $1+x^{-3}=y^4$ رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int x^{-4}(1+x^{-3})^{-\frac{5}{4}}dx=-\frac{4}{3}\int\frac{1}{y^2}\,dy=\frac{4}{3y}=\frac{4}{3}\,\frac{1}{(1+x^{-3})^{\frac{1}{4}}}.$$

5- حاصل کیجیے

$$\int \sqrt{x}(1+x^3)^{\frac{1}{2}}\, dx.$$

یہاں

$$(m+1)/n+p=1$$

جوکہ مثبت کامل عدد ہے۔ ہم لکھتے ہیں

$$\sqrt{x}(1+x^3)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}\,.\,x^{\frac{3}{2}}(1+x^{-3})^{\frac{1}{2}}=x^2(1+x^{-3})^{\frac{1}{2}}$$

اب $y^2 = 1+x^{-3}$ رکھنے پر

$$\int x^2(1+x^{-3})^{\frac{1}{2}}dx=-\frac{2}{3}\int \frac{y^2}{(y^2-1)^2}\,dy.$$

اب

$$\frac{y^2}{(y^2-1)^2}=\frac{y^2}{(y+1)^2(y-1)^2}=-\frac{1}{4(y+1)}+\frac{1}{4(y+1)^2}+\frac{1}{4(y-1)}+\frac{1}{4(y-1)^2}.$$

$$\therefore \int \frac{y^2}{(y^2-1)^2}\,dy=\frac{1}{4}\log\frac{y-1}{y+1}-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y-1}\right]$$

اس طرح تکمل پورا ہوگیا

مشقیں

ذیل کا تکمل کیجیے

1.

(i) $\frac{x^3}{\sqrt{(1+x^2)}}$, (ii) $\frac{x^4}{\sqrt{(1+x^6)}}$, (iii) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(a^3-x^3)}}$

(vi) $\frac{1}{x^6\sqrt{(x^2+a^2)}}$, (v) $x^5(1+x^3)^{\frac{1}{3}}$, (vi) $(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}$.

(vii) $x(1+x^3)^{\frac{1}{3}}$, (viii) $\frac{x^6}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

2. (i) $\dfrac{x^4}{\sqrt{(4+9x^2)}}$, (ii) $x^8(x^3-1)^{-\frac{1}{3}}$

(iii) $x^5(1+x^2)^{\frac{7}{2}}$, (iv) $\dfrac{1}{x^4(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

3 - حاصل کیجیے

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^4\sqrt{(1-x^2)}}$$

جوابات

1. (i) $\frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{(1+x^2)}$. (ii) $\frac{1}{4}\sinh^{-1} x^4$.

(ii) $\frac{2}{3}\sin^{-1}(x/a)^{3/2}$

(iv) $-(8x^4-4a^2x^2+3a^4)\sqrt{(a^2+x^2)}/15a^6x^5$.

(v) $\frac{1}{28}(4x^3-3)(1+x^3)^{\frac{4}{3}}$.

(vi) $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\dfrac{y^2-1}{\sqrt{2}\,y}-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\log\dfrac{y^2-\sqrt{2}\,y+1}{y^2+\sqrt{2}\,y+1}$,
where $y=\sqrt[4]{(1-x^4)}/x$.

(vii) $-\dfrac{y}{3(y^3-1)}+\dfrac{1}{9}\log\dfrac{\sqrt{(y^2+y+1)}}{y-1}+\dfrac{\sqrt{3}}{9}\tan^{-1}\dfrac{2y+1}{\sqrt{3}}$,
where $y=\sqrt[3]{(1+x^3)}/x$.

(viii) $-\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{y}{(y^2+1)^3}-\dfrac{5}{24}\cdot\dfrac{y}{(y^2+1)^2}-\dfrac{5}{16}\left[\tan^{-1}y+\dfrac{y}{1+y^2}\right]$,
where $y=\sqrt{(1-x^2)}/x$

2. (i) $\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{y}{(y^2-9)^2}-\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{y}{y^2-9}-\dfrac{1}{36}\log\dfrac{y-3}{y+3}\right)$,
where $y=\sqrt{(4+9x^2)}/x$.

(ii) $\frac{1}{40}(5x^6+6x^3+9)(x^3-1)^{\frac{2}{3}}$

(iii) $(1+x^2)^{\frac{9}{2}}\left(\dfrac{(1+x^2)^2}{13}-\dfrac{2(1+x^2)}{11}+\dfrac{1}{9}\right)$.

(iv) $(8x^4+4x^2-1)/3x^3\sqrt{(1+x^2)}$.

3. $2\sqrt{3}$.

5·9 - تکملہ

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx.$$

کے لیے تحویلی فارمولا نکالنا

ہم دیکھیں گے کہ اس کا ذیل کے چھ میں سے کسی تکملہ سے بھی رابطہ قائم

ہو سکتا ہے:

(A) $\int x^m(a+bx^n)^{p-1}\,dx.$ (B) $\int x^m(a+bx^n)^{p+1}\,dx.$

(C) $\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx.$ (D) $\int x^{m+n}(a+bx^n)^p\,dx.$

(E) $\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}\,dx.$ (F) $\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}\,dx.$

ان تحویلی فارمولوں کو حاصل کرنے کے ہم دو طریقے بتائیں گے۔
حصہ سے تکمل کا فارمولا لگانے پر ہم پاتے ہیں

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}(a+bx^n)^p-\frac{nbp}{m+1}\int x^{m+1}(a+bx^n)^{p-1}x^{n-1}\,dx$$

$$\text{(F)}\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{x^{m+1}}{m+1}(a+bx^n)^p-\frac{nbp}{m+1}\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}\,dx,$$

چونکہ تحویلی فارمولا (F) ہے اور تب مفید ہوتا ہے جب p مثبت ہو
ہم لکھتے ہیں

$$x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}=\frac{x^m}{b}(a+bx^n-a)(a+bx^n)^{p-1}$$

$$=\frac{x^m(a+bx^n)^p}{b}-\frac{a}{b}x^m(a+bx^n)^{p-1}.$$

اس قیمت کو (F) کے داہنی طرف کے تکاملیہ کی جگہ رکھ کر منتقل کرنے پر ہم
پاتے ہیں

$$\text{(A)}\quad \int x^m(a+bx^n)^p dx$$

$$=\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1}+\frac{anp}{np+m+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}\,dx,$$

جو کہ تحویلی فارمولا (A) ہے۔
پھر (F) میں m کی جگہ $m-n$ اور p کی جگہ $p+1$ رکھنے اور منتقل کرنے
پر ہم پاتے ہیں

(E) $$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{m-n+1}{nb(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}\,dx,$$

جو کہ اُس وقت کار آمد ہے جب منفی ہو۔
اب (A) میں p کی جگہ $p+1$ رکھنے اور تکملے منتقل کرنے پر ہم پاتے ہیں

(B) $$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = -\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{an(p+1)} + \frac{n(p+1)+m+1}{an(p+1)}\int x^m(a+bx^n)^{p+1}\,dx,$$

جو کہ تحویلی فارمولا (B) ہے۔
اب تحویلی فارمولے (C) اور (D) حاصل کرنے کے لیے ہم لکھتے ہیں

$$\cdot\Big[\, xp\ {}_a({}_uxq+v)_wx \int \frac{I+d}{(I+u-w)q} -$$

$$xp\ {}_a({}_uxq+v)_{u-w}x \int \Big(\frac{I+d}{(I+u-w)v} - \frac{I+d}{{}_{I+a}({}_uxq+v)_{I+u-w}x}\Big]\frac{qu}{I} =$$

$$\Big[xp\ {}_a({}_uxq+v)({}_uxq+v)_{I-w}x \int \frac{I+d}{I+u-w} -$$

$$\frac{I+d}{{}_{I+a}({}_uxq+v)_{I+u-w}x}\Big]\frac{qu}{I} =$$

$$\Big[xp\ {}_{I+a}({}_uxq+v)_{u-w}x \int \frac{I+d}{(I+u-w)} - \frac{I+d}{{}_{I+a}({}_uxq+v)}\ {}_{I+u-w}x\Big]\frac{qu}{I} =$$

$$xp\ {}_a({}_uxq+v)\ {}_{I-u}xqu\ {}_{I+u-w}x \int \frac{qu}{I} = xp\ {}_a({}_uxq+v)_wx\int$$

اب سب سے داہنی طرف کے تکملے کو بائیں طرف منتقل کرنے اور

$$1+\frac{(m-n+1)}{n(p+1)}$$

سے تقسیم کرنے پر ہم پاتے ہیں

(C) $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$

$$= \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)} - \frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx,$$

جو کہ تحویلی فارمولا (C) ہے۔
اب فارمولے (C) میں، m کی جگہ $m+n$ لکھنے پر اور (C) کے دونوں تکملے منتقل کرنے پر ہمیں ذیل تحویلی فارمولا ملتا ہے

(D) $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$

$$= \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{a(m+1)} - \frac{b(np+m+n+1)}{a(m+1)}\int x^{m+n}(a+bx^n)^p\,dx,$$

جو کہ تحویلی فارمولا (D) ہے۔

دوسرا طریقہ

ان چھ تحویلی فارمولوں میں سے کسی کو بھی حاصل کرنے کے لیے ہم لکھتے ہیں

$$P = x^{\lambda+1}(a+bx^n)^{\mu+1}$$

جہاں λ اور μ اُن دو تفاعلوں میں x اور $(a+bx^n)$ کی کمتر قیمتیں ہیں جن کے تکملوں میں رابطہ چاہیے ہے۔
dP/dx معلوم کیجیے اور اُسے دونوں تکاملیوں کے خطی مرکب کی طرح لکھیے۔ اب تکمل کرنے پر رابطہ قائم ہوجاتا ہے۔
مثال: مثال کے طور پر ہم ذیل دو تکملوں

$$\int x^m(a+bx^n)^{p-1}\,dx \quad \text{اور} \quad \int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

میں رابطہ قائم کرتے ہیں۔

یہاں $\lambda = m, \mu = p-1.$

اس لیے، $P = x^{m+1}(a+bx^n)^p.$

$$\frac{dP}{dx} = (m+1)x^m(a+bx^n)^p + pnbx^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}$$
$$= (m+1)x^m(a+bx^n)^p + pnx^m(a+bx^n-a)(a+bx^n)^{p-1}$$
$$= (m+1)x^m(a+bx^n)^p + pnx^m(a+bx^n)^p - pnax^m(a+bx^n)^{p-1}$$
$$= (m+1+pn)x^m(a+bx^n)^p - pnax^m(a+bx^n)^{p-1}$$

تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$P = (m+1+pn)\int x^m(a+bx^n)^p\,dx - pna\int x^m(a+bx^n)^{p-1}\,dx$$
$$\Rightarrow \int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1+pn} + \frac{apn}{m+1+pn}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}\,dx,$$

جو کہ درکار تحویلی فارمولا ہے۔

ایک ضروری نوٹ: طالب علم کے لیے یہ یاد رکھنا چاہیے ہوگا کہ x^m کی قوت m میں صرف دو رکنی $(a+bx^n)$ میں آنے والے x^n کی قوت n کا ہی اضافہ یا کمی ممکن ہے اور دو رکنی $(a+bx^n)$ کی قوت p میں صرف 1 ہی گھٹ یا بڑھ سکتا ہے۔

مثال

اگر m مثبت کامل عدد ہو تو

$$\int x^m \sqrt{(2ax-x^2)}\,dx.$$

کے لیے ایک تحویلی فارمولا حاصل کیجیے۔ اس کی مدد سے تکملہ

$$\int_0^{2a} x^3 \sqrt{(2ax-x^2)}\, dx.$$

کی قیمت نکالیے۔

ہم پاتے ہیں

$$x^m(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}} = x^{m+\frac{1}{2}}(2a-x)^{\frac{1}{2}}$$

چونکہ دو رکنی $2a - x$ میں x کی قوت 1 ہے اس لیے ہم

$\int x^{m+\frac{1}{2}-1}(2a-x)\, dx$ کا $\int x^{m+\frac{1}{2}}(2a-x)^{\frac{1}{2}}\, dx$ یعنی $\int x^{m-\frac{1}{2}}(2a-x)^{\frac{1}{2}}\, dx.$

سے رابطہ قائم کریں گے۔ ہم لیتے ہیں۔

$$P = x^{m-\frac{1}{2}+1}(2a-x)^{\frac{1}{2}+1} = x^{m+\frac{1}{2}}(2a-x)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dx} = (m+\tfrac{1}{2})x^{m-\frac{1}{2}}(2a-x)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{3}{2}x^{m+\frac{1}{2}}(2a-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (m+\tfrac{1}{2})x^{m-\frac{1}{2}}(2a-x)^{\frac{1}{2}}(2a-x) - \tfrac{3}{2}x^{m+\frac{1}{2}}(2a-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (2m+1)ax^{m-\frac{1}{2}}(2a-x)^{\frac{1}{2}} - (m+\tfrac{1}{2})x^{m+\frac{1}{2}}(2a-x)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{3}{2}x^{m+\frac{1}{2}}(2a\ \ x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (2m+1)ax^{m-\frac{1}{2}}(2a-x)^{\frac{1}{2}} - (m+2)x^{m+\frac{1}{2}}(2a-x)^{\frac{1}{2}}$$

تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$P = (2m+1)a\int x^{m-\frac{1}{2}}(2a-x)^{\frac{1}{2}}\, dx - (m+2)\int x^{m+\frac{1}{2}}(2a-x)^{\frac{1}{2}}\, dx.$$

منتقلی وغیرہ کے بعد ہم پاتے ہیں

$$\int x^m \sqrt{(2ax-x^2)}\, dx = -\frac{x^{m+\frac{1}{2}}(2a-x)^{\frac{3}{2}}}{m+2} + \frac{(2m+1)a}{m+2}\int x^{m-1}\sqrt{(2ax-x^2)}\, dx.$$

صفر اور 2a کو حدیں لینے پر ملتا ہے

$$I_m = \int_0^{2a} x^m \sqrt{(2ax-x^2)}\, dx = \frac{(2m+1)\,a}{m+2}\int_0^{2a} x^{m-1}\sqrt{(2ax-x^2)}\, dx$$

$$= \frac{(2m+1)\,a}{m+2}\, I_{m-1}.$$

$$\therefore\ I_3 = \frac{7a}{5}\, I_2, \text{ و } I_2 = \frac{5a}{4}\, I_1. \text{ و } I_1 = \frac{3a}{3}\, I_0.$$

ساتھ ہی

$$I_0 = \int_0^{2a} \sqrt{(2ax-x^2)}\, dx = \int_0^{2a} \sqrt{[a^2-(x-a)^2]}\, dx$$

$$= \left| \frac{(x-a)}{2}\sqrt{[a^2-(x-a)^2]} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x-a}{a} \right|_0^{2a}$$

$$= \pi a^2/2$$

$$\therefore\quad I_3 = \tfrac{7}{8}\pi a^5.$$

مشقیں

1۔ اگر n مثبت کامل عدد ہو تو

$$\int (a^2+x^2)^{n/2} dx$$

کے لیے تحویلی فارمولا حاصل کیجیے اور اس کی مدد سے

$$\int (a^2+x^2)^{5/2}\, dx$$

حاصل کیجیے۔

2۔ اگر

$$u_n = \int x^n \sqrt{(a^2-x^2)}\, dx$$

ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$u_n = -\frac{x^{n-1}(a^2-x^2)^{3/2}}{n+2} + \frac{n-1}{n+2}\, a^2 u_{n-2}.$$

حاصل کیجیے

$$\int_0^a x^4 \sqrt{(a^2-x^2)}\, dx.$$

3 ۔ ذیل تفاعلوں کے تکملوں کے لیے مناسب تحویلی فارمولے حاصل کیجیے۔

$$\frac{1}{x^n \sqrt{(x^2-1)}} \quad \text{اور} \quad \frac{x^n}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$$

اور $n = 3$ کے لیے ان کا تکمل کیجیے۔

4 ۔ اگر

$$I_n = \int x^n \sqrt{(a-x)}\, dx$$

ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$(2n+3)\, I_n = 2anI_{n-1} - 2x^n\, (a-x)^{3/2}$$

حاصل کیجیے

$$\int_0^a x^2 \sqrt{(ax-x^2)}\, dx$$

جوابات

1. $\int (a^2+x^2)^{n/2}\, dx = \frac{x\,(a^2+x^2)^{n/2}}{n+1} + \frac{na^2}{n+1} \int (a^2+x^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dx.$

   $\int (a^2+x^2)^{5/2}\, dx = \frac{1}{48}\, x(8x^4+26a^2x^2+33a^4)\, \sqrt{(a^2+x^2)} + \frac{5}{16} a^6 \sinh^{-1}(x/a).$

2. $\pi a^6/32.$

3. $nI_n = \frac{x^n\,(2a-x)}{\sqrt{(2ax-x^2)}} + (2n-1)\, aI_{n-1}\,;$

   $I_3 = \frac{2x^4+ax^3+5a^2x^2-30a^3x}{6\sqrt{(2ax-x^2)}} + \frac{5a^3}{2} \sin^{-1} \frac{x-a}{a}.$

   $(n-1)\, I_n = \sqrt{(x^2-1)}/x^{n-1} + (n-2)\, I_{n-2}\,;$

   $I_3 = \sqrt{(x^2-1)}/2x^2 + \frac{1}{2} \sec^{-1} x\,;$

4. $5\pi a^4/128.$

5·10. عام تجویز **(General Consideration.)** x اور $\sqrt{(ax^2+bx+c)}$ کے
کسی ناطق تفاعل $R\{x, \sqrt{(ax^2+bx+c)}\}$ کا تکمل کرنا۔

ہم یہ دکھائیں گے کہ x اور $\sqrt{(ax^2+bx+c)}$ کے کسی ناطق تفاعل کے تکملہ کو
نئے متغیر t کے ناطق تفاعل کے تکملہ میں تبدیل کر سکتے ہیں۔
ہم جانتے ہیں کہ

$$\sqrt{(ax^2+bx+c)} =$$

$$\begin{cases} \text{(i)} & \sqrt{a}\sqrt{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{(4ac-b^2)}}{2a}\right)^2\right]}, \quad (a>0,\ 4ac-b^2>0 \text{ اگر}) \\ \text{(ii)} & \sqrt{a}\sqrt{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}\right)^2\right]}, \quad (a>0,\ 4ac-b^2<0 \text{ اگر}) \\ \text{(iii)} & \sqrt{-a}\sqrt{\left[\left(\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}\right)^2-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right]} \quad (a<0,\ b^2-4ac>0 \text{ اگر}) \end{cases}$$

پہلی صورت : صورت (i) میں، ہم رکھتے ہیں $\sqrt{(4ac-b^2)}/2a = \lambda$

$$\text{دیا ہوا تکملہ} = \int R\left\{x, \sqrt{a}\sqrt{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\lambda^2\right]}\right\} dx$$

ہم رکھتے ہیں

$$x+\frac{b}{2a} = \frac{\lambda}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) \Rightarrow dx = \frac{\lambda}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$$

اور

$$\sqrt{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\lambda^2\right]} = \frac{\lambda}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

اس لیے دیا ہوا تکملہ

$$= \int R\left\{\frac{\lambda}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)-\frac{b}{2a}, \frac{\sqrt{a}\lambda}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right\}\frac{\lambda}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt,$$

جوکہ t کے ایک ناطق تفاعل کا تکملہ ہے۔

دوسری صورت : صورت (ii) میں استحالہ

جہاں $\lambda = \frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$ $x+\frac{b}{2a} = \frac{\lambda}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$

سے دیا ہوا تکملہ t کے ناطق تفاعل کے تکملہ میں بدل جاتا ہے۔

تیسری صورت : صورت (iii) میں استحالہ

جہاں $\lambda = \frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$ ، $x+\frac{b}{2a} = \frac{2\lambda}{t+1/t}$

سے دیا ہوا تکملہ درکار شکل میں بدل جاتا ہے۔

لہٰذا ہم نے یہ ثابت کر دیا کہ اصولاً x اور $\sqrt{(ax^2+bx+c)}$ کا ہر ناطق تفاعل ہمیشہ ابتدائی تفاعلوں کے تکملوں سے حاصل ہو سکتا ہے۔

اس سیکشن میں جو استحالے بتائے گئے وہ عملی طور پر زیادہ کارآمد نہیں ہوتے کیوں کہ اس سے ملنے والے ناطق تکاملیہ میں نسب نما کی ڈگری بہت ہوتی ہے۔

باب 5 پر مشقیں

1۔ حاصل کیجیے

(i) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x+1)}}$, (ii) $\int \frac{2x^2+3}{\sqrt{(3-2x-x^2)}}\,dx$, (iii) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{(x^2+2x+3)}}$,

(iv) $\int \frac{dx}{(1+x)^2\sqrt{x}}$, (v) $\int \sqrt{[(x-3)(4-x)]}\,dx$, (vi) $\int \frac{\sqrt{(1+x+x^2)}}{x+1}\,dx$.

2۔ حاصل کیجیے

(i) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x^4-1)}}$, (ii) $\int x^3\sqrt{(a+bx^2)}\,dx$, (iii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{[x(x-a)]}}$,

(iv) $\int\left(\frac{x}{x^4-1}\right)^{\frac{1}{3}}dx$, (v) $\int\frac{2a+x}{a+x}\sqrt{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}\,dx$, (vi) $\int x^3\sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)}\,dx$

(vii) $\int_1^\infty \frac{dx}{(x-\cos\alpha)\sqrt{(x^2-1)}}$, (جہاں $\pi > \alpha > 0$)

3. ثابت کیجیے کہ

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x^2-1)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

4. حاصل کیجیے

(i) $\int\frac{x\,dx}{(a-x)^2\sqrt{(2ax-x^2)}}$, (ii) $\int\frac{1-\sqrt{(1-x^2)}}{x\sqrt{(1-x^2)}}\,dx$.

5. ثابت کیجیے کہ

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^4\sqrt{(a^2+x^2)}} = \frac{2-\sqrt{2}}{3a^4},\quad (\text{جبکہ } a > 0.)$$

6. ثابت کیجیے کہ

$$\int\sqrt{[x(1+x^2)]}\,dx=\tfrac{1}{3}\{\sqrt{[x^3(1+x^2)]}+\cosh^{-1}\sqrt{(1+x^2)}\}.$$

7 عوضی $x=1/\sqrt{(t^2+1)}$ سے یا کسی اور طریقے سے ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(9+25x^2)\sqrt{(1+x^2)}} = \frac{1}{12}\tan^{-1}\frac{4}{3}.$$

8. ثابت کیجیے کہ

$$\int\frac{dx}{(x^2+6x+5)^{3/2}} = -\frac{x+3}{4\sqrt{(x^2+6x+5)}}.$$

9. ثابت کیجیے کہ تکملہ

$$\int_0^4 x^3\sqrt{(4x-x^2)}\,dx$$

کی قیمت تقریباً 88 ہے۔

10۔ ثابت کیجیے کہ

$$(i)\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{(a^2-x^2)}}=\tfrac{1}{4}\pi. \quad (ii)\int_0^a \frac{a\,dx}{[x+\sqrt{(a^2-x^2)}]^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2}).$$

11۔ حاصل کیجیے

$$\int[x+\sqrt{(1+x^2)}]^n dx$$

12۔ حاصل کیجیے

$$(i)\int\sqrt{\left(\frac{e^x+a}{e^x-a}\right)}dx, \qquad (ii)\int\sqrt{\left(\frac{x+a}{x+b}\right)}\frac{dx}{x+c}.$$

13۔ تکمل کیجیے

$$(i)\ \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^4)}} \qquad (ii)\ \frac{x^4-1}{x^2\sqrt{(x^4+x^2+1)}}$$

جوابات

1. (i) $\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{(1+x)}$. (ii) $9\sin^{-1}[(x+1)/2]+(3-x)\sqrt{(3-2x-x^2)}$.

(iii) $-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sinh^{-1}[(x+2)\sqrt{2}/(x-1)]$. (iv) $\tan^{-1}\sqrt{x}+\sqrt{x}/(1+x)$.

(v) $\tfrac{1}{4}(2x-7)\sqrt{(x-3)(4-x)}+\tfrac{1}{8}\sin^{-1}(2x-7)$.

(vi) $\sqrt{(x^2+x+1)}-\sinh^{-1}[(1-x)/\sqrt{3}(1+x)]-\tfrac{1}{2}\sinh^{-1}[(2x+1)/\sqrt{3})]$.

2. (i) $\tfrac{1}{4}\log[(1+y)/(1-y)]-\tfrac{1}{2}\tan^{-1}y$, where $x^4y^4=x^4-1$

(ii) $(3bx^2-2a)(a+bx^2)^{3/2}/15b^2$ (iii) $2\sqrt{(x-a)}/a\sqrt{x}$.

(iv) $\frac{1}{8}\log\frac{y^2+y+1}{y^2-2y+1}-\frac{\sqrt{3}}{4}\tan^{-1}\frac{2y+1}{\sqrt{3}}$, $x^4y^3=x^4-1$ جہاں۔

(v) $\sqrt{(a^2-x^2)}-2a\sqrt{[(a-x)/(a+x)]}$.

(vi) $\tfrac{1}{2}\tan^{-1}y-y(1+3y^2)/2(1+y^2)^2$, $\sqrt{(1+x^2)}=y\sqrt{(1-x^2)}$

(vii) $(\pi-\alpha)/\sin\alpha$.

10 (i) $\frac{1}{a}\left[\frac{\sqrt{(2ax-x^2)}}{a-x}-\log\frac{\sqrt{(2a-x)}+\sqrt{x}}{\sqrt{(2a-x)}-\sqrt{x}}\right]$ (ii) $\sqrt{[\log x+\operatorname{sech}^{-1} x]}$.

11. $\frac{[x+\sqrt{(1+x^2)}]^{n+1}}{2(n+1)}+\frac{[x+\sqrt{(1+x^2)}]^{n-1}}{2(n-1)}$

12 (i) $\cosh^{-1}(e^x/a)+\sec^{-1}(e^x/a)$.

(ii) $\cosh^{-1}\frac{2x+a+b}{a-b}+\sqrt{\left(\frac{c-a}{c-b}\right)}\cosh^{-1}\frac{2(c-b)(c-a)+(a+b-2c)(x+c)}{(a-b)(c+x)}$

13. (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}x}{1+x^2}\right)$ (ii) $\frac{\sqrt{(x^4+x^2+1)}}{x}$

متفرق مشقیں 1

1 حاصل کیجیے

(i) $\int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^4)}$ (ii) $\int \frac{x^2\,dx}{x^4-x^2-12}$, (iii) $\int \frac{x^6\,dx}{(1+x^2)^3}$

(iv) $\int \frac{x^5\,dx}{(a^2-x^2)^2}$, (v) $\int \frac{x^2}{(1-x^2)^3}\,dx$, (vi) $\int \frac{(x^3+x^2+2)dx}{x(x-1)^2(x^2+1)}$

2۔ ذیل کا تکمل کیجیے:-

(i) $e^{mx}\sin^3 x$, (ii) $\frac{1}{1-\sin x\cos x}$,

(iii) $\frac{\cos 2x}{3+\cos x+\sin x}$, (iv) $\frac{1}{\cos 2\alpha-\cos x}$.

3۔ a کو 1 اور 3 لیتے ہوئے تکملہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x+\sin x+a},$$

کی قیمت حاصل کیجیے۔

4۔ (i) ثابت کیجیے کہ اگر $0<\alpha<\pi$ ہو تو

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x\cos\alpha+1}=\frac{\alpha}{\sin\alpha},$$

(ii) α کی یکساں قیمتوں کے لیے تکملوں

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+2x^2\cos\alpha+1}, \qquad \int_0^\infty \frac{(x^2+1)\,dx}{x^4+2x^2\cos\alpha+1}$$

کی قیمت نکالیے۔

5۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{(2-x)}}=\sqrt{2}-\log(\sqrt{2}+1).$$

6۔ تکملہ

$$\int_0^4 x^2(4x-x^2)^{1/2}\,dx.$$

کی قیمت نکالیے۔

7۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x\sin x+\cos x)^2}=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}.$$

(اشارہ: لکھیے

$$\frac{x^2\,dx}{(x\sin x+\cos x)^2}=\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}\quad x\sec x,$$

اور یہ یاد رکھتے ہوئے حصہ سے تکمل کیجیے کہ $[x\sin x+\cos x]$. کا تفرقی سر
$x\cos x$ ہے)

8۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int\sqrt{\left[\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta(1+\cos\theta)(2+\cos\theta)}\right]}\,d\theta=\operatorname{cosec}^{-1}\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$$

9۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}\,dx = -\cosh^{-1}(\cos x+\sin x).$$

10۔ حاصل کیجیے

$$\int (\tan x+\sec x)^4 \sec^2 x\,dx.$$

11۔ غیر حاصل ضربیوں (indeterminate co-efficients) کے طریقے کی مدد سے تکملہ

$$\int \frac{30x^5+30x^4+12x^3+21x^2-15x-1}{\sqrt{(4+2x+3x^2)}}\,dx.$$

حاصل کیجیے۔

12۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\,d\theta}{a^2+\sin^2\theta} = \frac{\pi}{2\sqrt{(a^2+1)}}.$$

13۔ اگر $a > b > 0$ ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2+b^2-2ab\cos x} = \frac{\pi}{a^2-b^2}.$$

اس تکملہ کی قیمت کیا ہوگی اگر $b > a > 0$ ہو؟

14۔ ثابت کیجیے کہ اگر $c > a > 0$ ہو تو

$$\int_0^{a} \frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{(c^2-x^2)}\,dx = \frac{\pi[c-\sqrt{(c^2-a^2)}]}{2c}.$$

15۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{1} \frac{dx}{(1+x)(2+x)\sqrt{[x(1-x)]}} = \pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

(یہاں $x=\sin^2$ رکھیے)

10۔ ثابت کیجیے کہ اگر $a \geq b > 0$ ہو تو

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{a^2-2ab\cos x+b^2} = \frac{\pi}{2a^2}.$$

اس تکملہ کی قیمت کیا ہوگی اگر $b > a > 0$ ہو؟

17۔ حاصل کیجیے

(i) $\int \frac{x^4\, dx}{(1+x^2)^3}$, (ii) $\int \frac{x\, dx}{(x^3-1)}$,

(iii) $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2}$, (iv) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}$.

18۔ حاصل کیجیے

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^m(1-x)^n\, dx.$$

19۔ $(1+e\cos x)(1-e\cos y) = 1-e^2$. رکھ کر

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{(1+e\cos x)^2}$$

کی قیمت حاصل کیجیے۔

20۔ حاصل کیجیے

$$\int \frac{\sin x}{\sin 4x} dx.$$

21۔ حاصل کیجیے

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4\theta}{\sin \theta} d\theta.$$

22۔ عوضی $\sqrt{(1+x^4)} = (1+x^2)\cos\theta$ سے یا کسی اور طریقے سے ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^4)}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

23. ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2}$$

اور اس سے نکالیے کہ

$$\int_0^1 \frac{x^2 \log x}{\sqrt{(1-x^2)}} dx = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2} + \log \frac{1}{2}\right)$$

24. حاصل کیجیے

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\pi x - 4x^2) \log (1+\tan x) \, dx.$$

25. حاصل کیجیے

$$\int_0^{\pi} \theta \sin \theta \cosh (\cos \theta) \, d\theta.$$

26. حاصل کیجیے

$$\int \frac{\sin 2\theta}{a \pm b \tan \theta} d\theta.$$

27. ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\pi} \theta^3 \log \sin \theta \, d\theta = \frac{3\pi}{2} \int_0^{\pi} \theta^2 \log (\sqrt{2} \sin \theta) \, d\theta.$$

(دیکھیے § 4·92)

28. ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (\log x)^n \, dx = \frac{(-1)^n n!}{\alpha^{n+1}}$$

جبکہ n مثبت کامل عدد ہو اور α مثبت نمبر ہو۔

29. حاصل کیجیے

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x})^{-4} \, dx.$$

30. اگر $y^2 = ax^2+2bx+c$ اور $u_n = \int \frac{x^n}{y} dx$ ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$(n+1)au_{n+1}+(2n+1)bu_n+ncu_{n-1} = x^n y$$

اور اس سے نکالیے کہ

$$au_1 = y-bu_0\,;\ 2a^2u_2 = y(ax-3b)-(ac-3b^2)\,u_0.$$

31. ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^1 \cot^{-1}(1-x+x^2)\,dx = \frac{\pi}{2} - \log 2$$

32. ثابت کیجیے کہ

$$(i)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \log\sin\theta\, d\theta = \log\frac{2}{e}$$

$$(ii)\quad \int_0^{\pi} \cos 2x \log\sin x\, dx = -\frac{1}{2}\pi.$$

33. عوضی $y^2 = x+1+1/x$ کی مدد سے تکملہ

$$\int \frac{x-1}{x+1}\,\frac{dx}{\sqrt{[x(x^2+x+1)]}}$$

حاصل کیجیے۔

34. حاصل کیجیے

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{(1+\sin\theta\sin 2\beta)}}\,d\theta.$$

(جبکہ $0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$)

35. اگر

$$u_n = \int(\sin x+\cos x)^n\,dx,$$

ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$nu_n = (\sin x+\cos x)^{n-1}(\sin x-\cos x)+2(n-1)u_{n-2}.$$

36- اگر

$$I_{(m,n)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos nx \, dx, \quad J_{(m,n)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \sin nx \, dx, \quad m > 1$$

ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$(m+n)\, I_{(m,n)} = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - m\, J_{(m-1,\, n-1)}$$

اور $I_{(m,n)}$ کو $I_{(m-2,\, n-2)}$ کے ارقام میں رکھیے۔

37- اگر

$$I_m = \int_0^{\infty} x^m e^{-x} \cos x \, dx,$$

$$J_m = \int_0^{\infty} x^m e^{-x} \sin x \, dx,$$

ہو تو I_m اور J_m کو I_{m-1} اور J_{m-1} کے ارقام رکھنے والا رشتہ (relation) معلوم کیجیے اور اس سے ثابت کیجیے کہ اگر $m > 1$ کامل عدد ہو تو

$$I_m - m\, I_{m-1} + \tfrac{1}{2} m\,(m-1)\, I_{m-2} = 0.$$

38- یہ دکھائیے کہ

$$\sin x / (a + b \cos x)^{n-1}$$

کا تفرق کر کے کس طرح

$$\int \frac{dx}{(a + b \cos x)^n}$$

کے لیے تحویلی فارمولا حاصل کر سکتے ہیں۔

39- اگر m, n مثبت کامل اعداد ہوں اور

$$I_{(m,n)} = \int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx.$$

تو ثابت کیجیے کہ

$$(m+n+1) \cdot I_{(m,n)} = n\, I_{(m,\, n-1)}$$

اور اس سے نکالیے کہ

$$I_{(m,\,n)} = \frac{m\,!\,n\,!}{(m+n+1)\,!}$$

40۔ اگر m , n مثبت کامل اعداد ہوں تو عوضی $x = a+(b-a)\,y$ سے ثابت کیجیے کہ

$$\int_a^b (x-a)^m\,(b-x)^n\,dx = \frac{m\,!\,n\,!\,.\,(b-a)^{m+n+1}}{(m+n+1)\,!}$$

41۔ اگر

$$I_{(m,\,n)} = \int \frac{x^m\,dx}{(x^2+1)^n}$$

ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$(2n-2)\,I_{(m,\,n)} = -x^{m-1}\,(x^2+1)^{-n+1}+(m-1)\,{}_{(m-2,\,n-1)}$$

42۔ اگر

$$I_n = \int (a\cos^2 x+2h\cos x\sin x+b\sin^2 x)^{-n}\,dx,$$

ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$4n(n+1)(ab-h^2)\,I_{n+2}-2n(2n+1)(a+b)\,I_{n+1}+4n^2\,I_n=-D_a{}^2I_n$$

43۔ اگر

$$\varphi(n) = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{n-1}\log x\,dx,$$

تو ثابت کیجیے کہ

$$\varphi(n+2)-(2n+1)\,\varphi\,(n+1)+n^2\varphi(n)=0.$$

44 عوضی $\cos\theta=(a\cos x+b)(a+b\cos x)^{-1}$, سے ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^\pi (a+b\cos x)^{-n}\,dx = \frac{1}{(a^2-b^2)}\,n-y^2\int_0^\pi (a-b\cos\theta)^{n-1}\,d\theta.$$

اس کی مدد سے حاصل کیجیے

$$\int_0^{\pi} (5+4\cos x)^{-3}\, dx$$

45- اگر $a^2 > b^2$ ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^3} = \pi(2a^2+b^2)\Big/\left(2(a^2-b^2)^{5/2}\right)$$

جوابات

1. (i) $\frac{1}{4}\log\frac{32}{17}$. (ii) $\frac{1}{7}\left[\log\frac{x-2}{x+2}+\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\right]$

(iii) $\frac{1}{2}\log(1+x^2)+(1+x^2)^{-1}-\frac{1}{4}(1+x^2)^{-2}$. (iv) $a^2\log(a^2-x^2)+x^2(2a^2-x^2)/2(a^2-x^2)$.

(v) $\frac{1}{16}\left[\frac{4x}{(1-x^2)^2}-\frac{2x}{1-x^2}+\log\frac{1-x}{1+x}\right]$.

(vi) $-2\log x-\frac{3}{2}\log(x-1)-\frac{1}{4}\log(1+x^2)-2(x-1)^{-1}+\frac{1}{2}\tan^{-1}x$

2. (i) $\frac{e^{mx}}{4}\left[\frac{3}{\sqrt{(m^2+1)}}\sin(x-\cot^{-1}m)-\frac{1}{\sqrt{(m^2+9)}}\sin\left(3x-\tan^{-1}\frac{3}{m}\right)\right]$

(ii) $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left[\frac{2\tan x-1}{\sqrt{3}}\right]$ (iii) $(\sin x+\cos x)-3\log(3+\sin x+\cos x)$

(iv) $\frac{1}{\sin 2\alpha}\log\frac{\sin(\frac{1}{2}x-\alpha)}{\sin(\frac{1}{2}x+\alpha)}$.

3. $\frac{1}{2}\log 3 : \tan^{-1}\frac{1}{2}$. 4. (ii) $\frac{\pi}{2}\sec(\frac{\alpha}{2}), \frac{\pi}{4}\sec(\frac{\alpha}{2})$. 6. 10π.

10. $\frac{1}{10}(\tan x+\sec x)^5+\frac{1}{6}(\tan x+\sec x)^3$

11. $(2x^4+x^3-3x^2+4x-1)\sqrt{(3x^2+2x+4)}-\frac{16}{\sqrt{3}}\sinh^{-1}\frac{3x+1}{\sqrt{11}}$

13 $\pi/(b^2-a^2)$. 16 $\pi/2b^2$.

17 (i) $x+\frac{1}{2}x(1+x^2)^{-1}-\frac{3}{2}\tan^{-1}x$.

(ii) $\frac{1}{18}\log\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{9}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

(iii) $\frac{1}{9a^6}\left[\log\frac{a^2+ax+x^2}{(x-a)^2}-\frac{x}{x-a}+\frac{2ax+x^2}{a^2+ax+x^2}-\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2x+a}{\sqrt{3}a}\right]$

(iv) $\pi(2a+b)/4a^3b(a+b)^2$.

18 $2^{2m+n+1}(m+n)!\,.\,(m!)/(2m+n+1)!.$

19 $[2\tan^{-1}\sqrt{(1-e)/(1+e)}-e\sqrt{(1-e^2)}]/(1-e^2)^{3/2}.$

20 $\frac{1}{2}\log\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+(1/4\sqrt{2})\log\{(1+\sqrt{2}\sin x)/(1-\sqrt{2}\sin x)\}$

21 $4/3.$ 24 $\pi^3\log 2/192.$ 25. $\frac{\pi}{2}(e-e^{-1}).$

26 $-\frac{2ab^2}{(a^2-b^2)^2}\log(a\cos\theta-b\sin\theta)+\frac{b(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}\theta-\frac{(a\cos\theta+b\sin\theta)\cos\theta}{a^2+b^2}.$

29 $1/3.$ 33 $-2\operatorname{cosec}^{-1}(x^{1/2}+x^{-1/2}).$

34. $-\frac{4}{3}\tan\beta\sec\beta$ ($0<\beta\leqslant\frac{1}{4}\pi$ اگر); $-\frac{4}{3}\cot\beta\operatorname{cosec}\beta$ ($\frac{1}{4}\pi\leqslant\beta<\frac{1}{2}\pi$ اگر);
0 (اگر β صفر یا $\frac{\pi}{2}$)

36 $$I_{(m,n)}=\frac{1}{m+n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{m}{(m+n)(m+n-2)}\cos\frac{(n-1)\pi}{2}-\frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-2)}I_{(m-2,n-2)}.$$

37 $I_m=\frac{1}{2}m(I_{m-1}-J_{m-1}),\quad J_m=\frac{1}{2}m(I_{m-1}+J_{m-1}).$

38 $(n-1)(a^2-b^2)u_n=-b\sin x/(a+b\cos x)^{n-1}+(2n-3)au_{n-1}-(n-2)u_{n-2}$

جہاں $u_n=\int dx/(a+b\cos x)^n$.

44 $11\pi/81$

متفرق مشق 2

1۔ ثابت کیجیے کہ

$$(i)\ \int_0^\pi x\,\varphi(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\varphi(\sin x)\,dx,$$

$$(ii)\ \int_a^{\pi-a}xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_a^{\pi-a}f(\sin x)\,dx$$

2۔ ثابت کیجیے کہ

$$(i)\ \int_{-a}^{a}f(x)^2\,dx=2\int_0^a f(x)^2\,dx,\quad (ii)\ \int_{-a}^{a}xf(x)^2\,dx=0$$

3. اگر m کی ہر کامل عدد قیمت کے لیے $f(x+mp) = f(x)$ ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{np} f(x)\,dx = n \int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

جہاں n مثبت یا منفی کامل عدد ہے۔

4. اگر n مثبت کامل عدد ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{n\pi} f(\cos^2 x)\,dx = n \int_0^{\pi} f(\cos^2 x)\,dx$$

5. ثابت کیجیے کہ

$$\text{(i)} \int_0^{b-c} f(x+c)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx. \quad \text{(ii)} \int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

6. اگر $f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{n} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$ اور $m \leqslant n$ ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$\pi a_0 = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx\ ;\ \pi a_m = \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx\,dx,$$

$$\pi b_m = \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx\,dx.$$

7. اگر m, n مثبت کامل اعداد ہوں اور $m > n$ ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\pi} \cos mx\,(\cos x)^n\,dx = .$$

8. ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{1}{2}x}\,dx = \pi$$ (اگر n مثبت عدد صحیح ہو)

$$\left[\tfrac{1}{2} \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2} + \cos x + \ldots + \cos nx\right].$$

9. اگر p, q مثبت کامل اعداد ہوں تو ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\pi} \cos px \sin qx \, dx = \begin{cases} 2q/(q^2-p^2) & \text{(اگر } (q-p) \text{ طاق ہو)} \\ 0 & \text{(اگر } (q-p) \text{ جفت ہو)} \end{cases}$$

10. ثابت کیجیے کہ اگر

$$u_n = \int_0^1 x^n \tan^{-1} x \, dx$$

تو

$$(n+1)u_n + (n-1)u_{n-2} = -1/n.$$

u_{4m} حاصل کیجیے اور دکھائیے کہ اگر $m \to \infty$ تو $4mu_{4m} \to \frac{1}{2} \log 2$ ،

11. اگر

$$I_n = \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n \cos mx \, dx$$

تو ثابت کیجیے کہ اگر $n > 2$ ہو تو

$$m^2 I_n = 2n(2n-1) I_n - 4n(n-1) I_{n-2}.$$

12. ثابت کیجیے کہ

$$\int f^n(x) g(x) \, dx = f^{n-1}(x) g(x) - f^{n-2}(x) g'(x) + \dots + (-1)^n \int f(x) g^n(x) \, dx$$

13. اگر

$$I_n = \int_0^{\pi} (\pi x - x^2)^n \cos mx \, dx$$

اور n ایک سے بڑا کامل عدد ہو تو

$$m^2 I_n - 2n(2n-1) I_{n-1} + n(n-1) \pi^2 I_{n-2} = 0$$

ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\pi} (\pi x - x^2)^3 \cos 2x \, dx = \tfrac{3}{4}\pi(\pi^2 - 15).$$

14. ثابت کیجیے کہ

$$\int \sin n\theta \sec \theta \, d\theta = -2 \cos(n-1)\theta/(n-1) - \int \sin(n-2)\theta \sec \theta \, d\theta.$$

15۔ ثابت کیجیے کہ

(i) $$\int_{-a}^{+a} f(x)f(-x)\,dx = 2\int_0^\infty f(x)f(-x)\,dx,$$

(ii) $$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+4x^2)\sqrt{(1+3x^2)}} = \frac{\pi}{6},$$

(iii) $$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{(1+x+x^2)}} = \log 3.$$

16۔ اگر

$$I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin nx\,dx.$$

ہو تو $I_{m,n}$ کے لیے تحویلی فارمولا حاصل کیجیے۔ اس سے یہ نکالیے کہ

$$I_{m,n} = \frac{1}{2^{m+1}}\left[2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\dots+\frac{2^m}{m}\right].$$

17۔ اگر n کامل عدد ہو اور

$$S_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\,dx,\quad V_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx,$$

ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$S_{n+1}-S_n=0,\quad V_{n+1}-V_n=S_{n+1}.$$

18۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^1 x^{2p-1}\log(1+x)\,dx = \frac{1}{2p}\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{(2p-1)2p}\right].$$

19۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int\frac{dx}{x^m\sqrt{(2ax-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(2ax-x^2)}}{(2m-1)ax^m}+\frac{m-1}{(2m-1)a}\int\frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{(2ax-x^2)}}$$

20۔ اگر

$$I_m = \int\frac{x^m}{(a+2bx+cx^2)^n}\,dx,$$

تو ثابت کیجیے کہ

$$I_m = -\frac{x^{m-1}}{c(2n-m-1)(a+2bx+cx^2)^{n-1}} + \frac{2b(m-n)}{c(2n-m-1)} I_{m-1} + \frac{a(m-1)}{c(2n-m-1)} I_{m-2}.$$

21۔ ذیل تکملے حاصل کیجیے

(i) $\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{x} dx$, (ii) $\int \frac{1+\cos x}{\sin x \cos x} dx$, (iii) $\int \frac{x}{1+\sin x} dx$,

(iv) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx$, (v) $\int \left(\frac{\tan x^{-1}}{x}\right)^2 dx$, (vi) $\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^n-1)}}$,

(vii) $\int \frac{dx}{(2 \sin x+\cos x)^2}$ (viii) $\int \log[\sqrt{(x-a)}+\sqrt{(x-b)}]dx$,

(ix) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta \, d\theta}{\sin^2 \theta+4 \cos^2 \theta}$ (x) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin 5x \, dx$.

22۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{1-x^2 \sin^2 \alpha} dx = \frac{\pi}{4 \cos^2 \frac{1}{2}\alpha}$$

23۔ ثابت کیجیے کہ

(i) $\int \operatorname{sech}^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec^{-1} \cosh x+\frac{1}{2} \operatorname{sech} x \tanh x$.

(ii) $\int \frac{1}{(e^x-1)^2} dx = x-\log (e^x-1)-\frac{1}{e^x-1}$

24۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin nx \, dx = \frac{1}{n-1}$$ (جبکہ n کامل عدد ہو اور $n > 1$)

25۔ ثابت کیجیے کہ

(i) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x \cos x \sin x}{(a^2 \cos^2 x+b^2 \sin^2 x)^2} dx = \frac{\pi}{4ab^2(a+b)}$.

(پہلے لکھیے $\frac{x \cos x \sin x}{(a^2 \cos^2 x+b^2 \sin^2 x)^2} = x \cdot \frac{\tan x \sec^2 x}{(a^2+b^2 \tan^2 x)^2}$ اور پھر حصے سے تکمل کیجیے۔)

(ii) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi}{a - b\cos\varphi}\, d\varphi = 2\pi\{a - \sqrt{(a^2 - b^2)}\}/b^2,\ (a > b).$

26۔ حاصل کیجیے

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b\cos x + c\sin x},\ [a > \sqrt{(b^2 + c^2)} > 0].$$

جوابات

21. (i) $\frac{\pi}{8}\log 2.$ (ii) $\log(\tan x \tan \frac{x}{2}).$

(iii) $x(\tan\frac{x}{2} - 1)/(\tan\frac{x}{2} + 1) + 2\log(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}).$ (iv) $x \tan \frac{1}{2}$

(v) $x^{-1} - \tan(x^{-1}).$ (vi) $(2/n)\tan^{-1}\sqrt{(x^n - 1)}.$ (vii) $-\cos(x/2)(2\sin x + \cos x).$

(viii) $x \log[\sqrt{(x-a)} + \sqrt{(x-b)}] - \frac{1}{2}\sqrt{(x-a)(x-b)}$

$- \frac{1}{2}(a+b)\cosh^{-1}\{[2x - (a+b)]/(a+b)\}.$

(ix) $\pi/6$ (x) $1/4.$

26. $2\pi/\sqrt{(a^2 - b^2 - c^2)}.$

6

معین تکملہ بطور مجموعہ کی انتہا

(Limit of a Sum)

6·1۔ اب تک ہم نے تکمل کو تفرق کا معکوس (inverse) عمل مانا ہے۔ معین تکملہ

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

کی تعریف یہ بتائی گئی ہے کہ یہ

$$F(b) - F(a)$$

کے برابر ہے، جہاں $F(x)$ ایسا تفاعل ہے کہ

$$F'(x) = f(x).$$

رقبوں، قوس کی لمبائی، گردشی ٹھوس شکلوں کے حجم اور سطح وغیرہ نکالنے میں تکمل کا استعمال بھی معین تکملہ کے اسی مفہوم (معکوس تفرق) پر منحصر ہے۔

اب یہ دیکھیں گے کہ معین تکملہ ایسے ارکان کے جوڑ کی انتہا کی حیثیت سے بھی سمجھا جا سکتا ہے جہاں ارکان کی تعداد لا انتہا بڑھ رہی ہو اور ہر رکن صفر کی طرف مائل ہو رہا ہو۔ معین تکملہ کا یہ مفہوم زیادہ اہم اور کہیں زیادہ کارآمد ہے اور اسی نظریے کی بنا پر ہی تکمل کا اِس قدر وسیع استعمال ہے۔ اصولاً بھی اسی مفہوم سے اِس مضمون میں نہایت وسیع اور بہترین ترقیاں ہوئیں لیکن اِن ترقیوں کے بارے میں اِس معیار کی ابتدائی کتاب میں نہیں پڑھا جا سکتا۔ یہاں مقصد صرف یہ ہے کہ طالب علم کو اِس مفہوم سے باخبر کر دیا جائے۔ لیکن محض اِس وجہ سے کہ

اِس کتاب میں اِس نظریے کو کم جگہ میں لکھا گیا ہے۔ پڑھنے والے کو یہ نہ سمجھ لینا چاہیے کہ اِس کی اہمیت کم ہے۔

6.2 تکملی احصار کا بنیادی مسئلہ (Fundamental Theorem) معین تکملہ بطور مجموعہ کی انتہا:

مان لیجیے وقفہ $[a, b]$ کو n برابر حصّوں میں بانٹ دیا جائے اور مان لیجیے ہر حصہ کی لمبائی h ہو، اس طرح $nh=b-a$، تب

$$\int_a^b f(x)dx=\lim h[f(a+h)+f(a+2h)+\ldots\ldots+f(a+nh)]$$

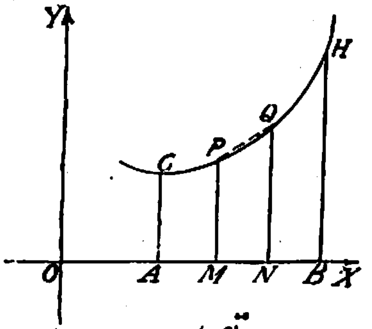
جہاں $n\to\infty$ اور $h\to 0$ اس طرح سے کہ $nh=b-a$

وقفہ $[a, b]$ کو n برابر حصّوں میں بانٹنے پر جو نقاط تقسیم (points of division) حاصل ہوتے ہیں وہ

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ldots\ldots,\ a+(r-1)h,\ \ldots\ldots,\ a+(n-1)h,\ a+nh$$

ہیں، جہاں h ہر حصہ کی لمبائی ہے۔

مان لیجیے کہ x کے a سے b تک بڑھنے کا تفاعل $f(x)$ ایک کیفی صعودی (monotonically increasing) ہے۔ ہم منحنی $y=f(x)$ کا گراف بناتے ہیں۔ مان لیجیے کہ G اور H اُس منحنی پر وہ نقطے ہیں جن کے فصلے (abscissae) a اور b ہیں۔



تصویر 9

X_محور پر عمود (Perpendicular) GA اور HB ڈالیے۔

مان لیجیے کہ وقفہ $[a, b]$ کو n برابر

حصّوں میں بانٹنے پر r ویں پٹی کے نقاط تقسیم M اور N ہیں جس سے کہ

$$OM = a+(r-1)h, \qquad ON = a+rh$$

$$MP = f[a+(r-1)h], \qquad NQ = f(a+rh)$$

ہم لکھتے ہیں

$$S_n = h\,[f(a+h)+f(a+2h)+\ldots\ldots+f(a+nh)].$$

اب مستطیل (rectangles) MQ اور NP کو پورا کر لیجیے۔

قطعہ GABH کے اندر NP کی طرح کے سبھی مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ

$$= h\sum_{r=1}^{r=n} f\,[a+(r-1)h]$$

$$= h\,[f(a)+f(a+h)+\ldots\ldots+f(a+(n-1)h)]$$

$$= S_n - h[f(a+nh)-f(a)]$$

(i) . . . . . $= S_n - h[f(b)-f(a)],$ (کیونکہ $nh = b-a$)

قطعہ GABH کے باہر تک جانے والے MQ کی طرح کے مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ

$$= \sum_{r=1}^{r=n} h\,f(a+rh)$$

$$= h\,[f(a+h)+f(a+2h)+\ldots\ldots+f(a+nh)]$$

(ii) . . . . $= S_n$

(iii) . . . . $\int_a^b f(x)\,dx. =$ قطعہ GABH کا رقبہ

تصویر سے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ قطعہ GABH کا رقبہ اوپر (i) اور (ii) میں لکھے ہوئے مجموعوں کے درمیان ہے۔

لہٰذا ہم پاتے ہیں

(iv) . . . . $S_n - h[f(b)-f(a)] < \int_a^b f(x)dx < S_n$

(v) . . . . $\Rightarrow$ $0 < S_n - \int_a^b f(x)\,dx < h[f(b)-f(a)].$

اب مان لیجیے $h \to 0$ یعنی ہر پٹی پتلی ہوتی جائے تو داہنی جانب بھی صفر کی طرف مائل ہوتی ہے۔ لہٰذا

$$\lim \left[S_n - \int_a^b f(x)\,dx \right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim S_n = \int_a^b f(x)\,d$$

اِس طرح اُس صورت میں یہ نتیجہ ثابت ہو گیا جب کہ x کے a سے b تک بڑھنے پر $f(x)$ ایک کیفی صعودی ہو۔ اسی طرح یہ بھی ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ نتیجہ اُس صورت میں بھی صحیح ہوگا جب کہ x کے a سے b تک بڑھنے پر $f(x)$ ایک کیفی نزولی ہو۔ تب (iv) اور (v) میں غیر مساوی علامت (inequalities) اُلٹ (reverse) جائیں گے۔

نوٹ 1: اوپر دیا گیا ثبوت جیومیٹریائی ہے۔ تحلیلی ثبوت (*analytical* proof) اِس کتاب کے معیار سے باہر ہے۔

نوٹ 2: اِس مسئلے کے نتیجے کو مختصراً یوں لکھ سکتے ہیں:-

جب $h \to 0$ اور $n \to \infty$، اس طرح سے کہ $nh = b - a$ رہے تو

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{r=1}^{r=n} hf(a+rh).$$

نوٹ 3: یہ نوٹ کرنا چاہیے کہ چونکہ

$$\Sigma\ hf(a+rh)$$

میں ہر رُکن صفر کی طرف مائل ہو رہا ہے اِس لیے متناہی تعداد میں ایسے ارکان جوڑنے یا نظر انداز کرنے سے انتہا (limit) پر فرق نہیں پڑتا۔

مثالیں

1. مجموعہ کی انتہا کی حیثیت سے

$$\int_a^b x^2\, dx$$

حاصل کیجیے۔

یہاں $f(x) = x^2$

$$\therefore \int_a^b x^2\, dx = \lim h[f(a+h)+f(a+2h)+\ldots\ldots+f(a+nh)]$$

جہاں $h \to 0$ ، $n \to \infty$ اس طرح کہ $b-a = nh$

$$= \lim h[(a+h)^2+(a+2h)^2\ldots\ldots+(a+nh)^2]$$

$$= \lim h[na^2+2ah(1+2+\ldots\ldots+n)+h^2(1^2+2^2+\ldots+n^2)]$$

$$= \lim h[na^2+n(n+1)ah+\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)h^2]$$

$$= \lim [nha^2+nh(nh+h)a+\tfrac{1}{6}nh(nh+h)(2nh+h)]$$

$$= \lim [(b-a)a^2+(b-a)(b-a+h)a+\tfrac{1}{6}(b-a)(b-a+h)\{2(b-a+h)\}]$$

$$= (b-a)a^2+(b-a)^2 a+\tfrac{1}{3}(b-a)^3$$

$$= \tfrac{1}{3}(b^3-a^3).$$

2. مجموعہ کی انتہا کی حیثیت سے

$$\int_a^b e^x\, dx$$

حاصل کیجیے۔

یہاں $f(x) = e^x$

$$\int_a^b e^x\, dx = \lim h[e^{a+h}+e^{a+2h}+\ldots+e^{a+nh}]$$

جہاں $h \to 0$ ، $n \to \infty$ اس طرح کہ $nh = b-a$

$$= \lim \frac{he^{a+h}\,(1-e^{nh})}{1-e^{h}}$$

$$= \lim \left[\, e^{a} \,.\, (1-e^{b-a})e^{h} \,.\, \frac{h}{1-e^{h}} \right]$$

$$= (e^{a}-e^{b}) \,.\, \lim e^{h} \,.\, \lim \frac{h}{1-e^{h}}$$

$$= (e^{a}-e^{b})(-1) = e^{b}-e^{a},$$

کیونکہ $\lim \{h/(1-e^{h})\} = -1$ اگر $h \to 0$

3۔ معین تکملہ کی تعریف مجموعہ کی انتہا لیتے ہوئے

$$\int_a^b \cos x\, dx$$

حاصل کیجیے۔

یہاں $f(x) = \cos x$، اس لیے

$$\int_a^b \cos x\, dx = \lim h[\cos(a+h) + \cos(a+2h) + \ldots\ldots + \cos(a+nh)].$$

مان لیجیے

$$S = \cos(a+h) + \cos(a+2h) + \ldots\ldots + \cos(a+nh).$$

دونوں جانب $2 \sin \frac{1}{2}h$ سے ضرب دینے پر ہم پاتے ہیں

$$2 \sin \tfrac{1}{2}h.\, S = 2 \sin \tfrac{1}{2}h \cos(a+h) + 2 \sin \tfrac{1}{2}h \cos(a+2h) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + 2 \sin \tfrac{1}{2}h \cos(a+nh)$$

$$= \sin(a+\tfrac{3}{2}h) - \sin(a+\tfrac{1}{2}h) + \sin(a+\tfrac{5}{2}h) - \sin(a+\tfrac{3}{2}h)$$
$$+ \ldots\ldots + \sin[a+\tfrac{1}{2}(2n+1)h] - \sin[a+\tfrac{1}{2}(2n-1)h]$$

$$= \sin[a+\tfrac{1}{2}(2n+1)h] - \sin[a+\tfrac{1}{2}h]$$

$$= \sin[b+\tfrac{1}{2}h] - \sin[a+\tfrac{1}{2}h],$$ (کیونکہ $nh = b - a$)

اِسی طرح

$$\int_a^b \cos x\,dx = \lim \frac{h[\sin(b+\tfrac{1}{2}h)-\sin(a+\tfrac{1}{2}h)]}{2\sin\tfrac{1}{2}h}$$

$$= \lim \frac{\tfrac{1}{2}h}{\sin\tfrac{1}{2}h}[\sin(b+\tfrac{1}{2}h)-\sin(a+\tfrac{1}{2}h)]$$

$$= 1\,.\,(\sin b-\sin a) = \sin b-\sin a.$$

مشقیں

ذیل معین تکملوں کی قیمت بطور مجموعہ کی انتہا حاصل کیجیے:-

1. (i) $\int_a^b x\,dx$, (ii) $\int_2^3 x^3\,dx$.
2. (i) $\int_a^b \sin x\,dx$, (ii) $\int_a^b \sin^2 x\,dx$.
3. (i) $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}dx$, (ii) $\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx$.
4. (i) $\int_a^b \sinh x\,dx$, (ii) $\int_a^b \cosh 2x\,dx$.

جوابات

1. (i) $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$. (ii) 65/4.
2. (i) $\cos a-\cos b$. (ii) $\frac{1}{2}(b-a)+(\sin a\cos a-\sin b\cos b)$.
3. (i) $2(\sqrt{b}-\sqrt{a})$. (ii) $(b-a)/ab$.
4. (i) $\cosh b-\cosh a$. (ii) $\sinh b\cosh b-\sinh a\cosh a$.

6·3۔ سلسلوں کا مجموعہ نکالنا (Summation of Series)

کچھ قسم کے سلسلوں کے مجموعوں کی انتہائیں معین تکملوں کی شکل میں رکھی جاسکتی

ہیں اور اُن کا مجموعہ اِس طرح سے نکالا جا سکتا ہے۔ ہم ایسے سلسلوں کی خصوصیات پر غور کریں گے جن کے مجموعوں کی انتہا کو اِس طرح رکھا جا سکے اور یہ بھی سیکھیں گے کہ ان سے متعلق معین تکملے کیسے حاصل کیے جائیں۔ یہ بھی دکھایا جائے گا کہ ہمیشہ ایسے سلسلوں کو اس طرح تبدیل کر کے لکھ سکتے ہیں کہ ان سے متعلق معین تکملوں میں زیریں اور صعودی حدیں 0 اور 1 ہوں۔

ہم جانتے ہیں کہ جب $h \to 0$ اور $n \to \infty$، اس طرح کہ $nh=b-a$ ہو، تو

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim h[f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+rh)+\ldots+f(a+nh)].$$

اب h کی جگہ $(b-a)/n$ لکھنے پر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اگر $n \to \infty$ تب

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= (b-a)\lim \frac{1}{n}\left\{f\left[a+(b-a)\frac{1}{n}\right]+f\left[a+(b-a)\frac{2}{n}\right]+\ldots\right.\\ &\qquad \left.+f\left[a+(b-a)\frac{r}{n}\right]+\ldots+f\left[a+(b-a)\frac{n}{n}\right]\right\}\\ &= (b-a)\lim \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{r=n} f\left[a+(b-a)\frac{r}{n}\right].\end{aligned}$$

اب § 9·2 سے ہم آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ جب $n \to \infty$ تو

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{r=n} f\left[a+(b-a)\frac{r}{n}\right] = \int_0^1 f\left[a+(b-a)x\right]dx$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f\left[a+(b-a)x\right]dx.$$

جوڑ $(1/n)\Sigma f[a+(b-a)(r/n)]$ کا عام جُزو $(1/n)f[a+(b-a)(r/n)]$, (r/n) کا ایسا تفاعل ہے کہ r کی جگہ 1، 2، 3 .... n رکھنے پر سلسلے کے مختلف ارکان ملتے ہیں اور ساتھ ہی (r/n) کی جگہ x لکھنے پر نیا تکاملیہ $f[a+(b-a)x]$ مل جاتا ہے۔ ساتھ ہی ہر رُکن کا ایک فیکٹر $(1/n)$ ہے۔

اوپر کی بحث سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جس سلسلے کے مجموعہ کی انتہا کو معین تکملہ کی شکل میں رکھا جا سکتا ہو، اُس کا عام جزو $1/n$ اور r/n کے کسی تفاعل $\varphi(r/n)$ کا حاصل ضرب ہوتا ہے، جس سے کہ r کی جگہ $1, 2, 3, \ldots, n$ لکھ کر سلسلے کے ارکان ملتے ہیں۔ تب عام رُکن میں r/n کی جگہ x لکھنے پر اور 0 اور 1 کو حدیں لینے پر سلسلے سے متعلق معین تکملہ حاصل ہو جاتا ہے۔

لہٰذا یہ اہم بات یاد رکھنی چاہیے کہ

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{r=1}^{r=n}\frac{1}{n}\,\varphi\left(\frac{r}{n}\right)\right]=\int_0^1 \varphi(x)\,dx.$$

نوٹ: یہاں ارکان کی تعداد n ہے لیکن چونکہ ہر رُکن صفر کی طرف مائل ہوتا ہے۔ اِس لیے متناہی تعداد میں ارکان کو جوڑنے یا نظر انداز کرنے پر انتہا نہیں بدلتی۔

مثالیں

1۔ اگر $n \to \infty$ تو سلسلہ

$$\frac{n^2}{(n^2+1^2)^{3/2}}+\frac{n^2}{(n^2+2^2)^{3/2}}+\cdots\cdots+\frac{n^2}{[n^2+(n-1)^2]^{3/2}}$$

کی انتہا معلوم کیجیے۔

یہاں r واں رُکن

$$=\frac{n^2}{(n^2+r^2)^{3/2}}=\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{\left[1+\left(\frac{r}{n}\right)^2\right]^{3/2}}\right\}$$

جو کہ $1/n$ اور تفاعل $1\Big/\left[1+\left(\frac{r}{n}\right)^2\right]^{3/2}$ کا حاصل ضرب ہے۔

اِس لیے اوپر بتائے گئے اصول سے درکار انتہا

$$= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx.$$

اب $x = \tan\theta$ رکھ کر یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ اِس تکملے کی قیمت $1/\sqrt{2}$ ہے۔

2۔ اگر $n \to \infty$ تو سلسلہ

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+4)^3}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+8)^3}}+\dots+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{[n+4(n-1)]^3}}$$

کی انتہا معلوم کیجیے

یہاں r واں رُکن

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{[n+4(r-1)]^3}} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{\sqrt{\left[1+\frac{4(r-1)}{n}\right]^3}}$$

چونکہ r ویں رُکن میں $r-1$ آتا ہے اِس لیے ہم $(r+1)$ واں رُکن لیتے ہیں

$(r+1)$ واں رُکن

$$= \frac{1}{n}\,\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{4r}{n}\right)^3}}.$$

اِس میں r/n کی جگہ x رکھنے پر دیکھتے ہیں کہ درکار انتہا

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+4x)^3}} = \int_0^1 (1+4x)^{-3/2}\,dx = \frac{1}{10}(5-\sqrt{5}).$$

3۔ ذیل کی قیمت حاصل کیجیے:۔

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)(n+2)\dots\dots(n+n)]^{1/n}}{n}$$

مان لیجیے کہ

$$y = \frac{[(n+1)(n+2)\dots\dots(2n)]^{1/n}}{n}$$

ہم پاتے ہیں

$$\log y = \frac{1}{n}\left\{ \log(n+1)+\log(n+2)+\ldots\ldots+\log 2n \right\} - \log n$$

$$= \frac{1}{n}\left\{ [\log(n+1)-\log n]+[\log(n+2)-\log n]+ \ldots\ldots +[\log(2n)-\log n]\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{ \log\left(1+\frac{1}{n}\right) +\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$$

r واں رکن

$$= \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{r}{n}\right).$$

اس لیے جب $n \to \infty$ ، تو ہم پاتے ہیں

$$\lim \log y = \int_0^1 \log(1+x)\,dx$$

$$= \Big| x\log(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx$$

$$= \log 2 - \Big| x - \log(1+x) \Big|_0^1$$

$$= \log 2 - (1-\log 2)$$

$$= 2\log 2 - 1 = \log 4 - \log e = \log(4/e),$$

اس لیے

$$\lim y = 4/e.$$

مشقیں

اگر $n \to \infty$ ، تو ذیل سلسلوں کی انتہائیں معلوم کیجیے

1۔

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}.$$

2۔
$$\frac{1}{n}+\frac{n^2}{(n+1)^3}+\frac{n^2}{(n+2)^3}+\cdots+\frac{1}{8n}.$$

3۔
$$\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{(n^2-1^2)}}+\frac{1}{\sqrt{(n^2-2^2)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{[n^2-(n-1)^2]}}.$$

4۔
$$\frac{\sqrt{n}}{(3+4\sqrt{n})^2}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}(3\sqrt{2}+4\sqrt{n})^2}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3}(3\sqrt{3}+4\sqrt{n})^2}+\cdots+\frac{1}{49n}$$

5۔
$$\frac{n+1}{n^2+1^2}+\frac{n+2}{n^2+2^2}+\frac{n+3}{n^2+3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}.$$

6۔
$$\frac{1}{\sqrt{(2n-1^2)}}+\frac{1}{\sqrt{(4n-2^2)}}+\frac{1}{\sqrt{(6n-3^2)}}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

7۔
$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{4n}.$$

8۔ ثابت کیجیے کہ

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]=\frac{\pi}{4}$$

اگر $n \to \infty$ تو ذیل کی انتہائیں معلوم کیجیے

9۔ $\displaystyle\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{(n^2-r^2)}}$

10۔ $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\frac{\sqrt{n}}{(9n+40r)^{3/2}}$

11۔ $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\frac{r^3}{r^4+n^4}$

12۔ $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\frac{n^3}{(n^2+r^2)(n^2+2r^2)}$

13۔ $\displaystyle\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{n}\sqrt{\left(\frac{n+r}{n-r}\right)}.$

14۔ $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\frac{n}{(n+r)\sqrt{\{r(2n+r)\}}}$

15- $\sum_{r=1}^{n} \frac{r}{n^2} \sec^2 \frac{r^2}{n^2}$ 16- $\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} \sin^{3k} \frac{r\pi}{2n}$ 17- $\sum_{r=1}^{3n} \frac{n^3}{(3n+r)^3}$

18- اگر $n \to \infty$ ، تو ذیل کی انتہا معلوم کیجیے۔

$$\left[\frac{(n^3+1^3)(n^3+2^3)(n^3+3^3)\ldots\ldots(n^3+n^3)}{n^{3n}}\right]^{1/n}$$

19- اگر $n \to \infty$ ، تو

$$\frac{(n\,!)^{1/n}}{n}$$

کی انتہا معلوم کیجیے۔

20- ثابت کیجیے کہ $n \to \infty$ ہونے پر ذیل کی انتہا $e^{\pi^2/48}$ ہوگی:-

$$\left[1+\left(\frac{1}{n}\right)^4\right]\left[1+\left(\frac{2}{n}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}}\left[1+\left(\frac{3}{n}\right)^4\right]^{\frac{1}{3}}\ldots\ldots\left[2\right]^{1/n}$$

21- ثابت کیجیے کہ $n \to \infty$ ہونے پر

$$\left[\phi(a)\,.\phi\left(a+\frac{h}{n}\right).\phi\left(a+\frac{2h}{n}\right)\ldots\ldots\phi\left(a+\frac{nh}{n}\right)\right]^{1/n}$$

کی انتہا e^t ہوگی، جہاں کہ

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+h} \log \phi(x)\, dx.$$

اس سے ذیل کی انتہا نکالیے

$$\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\ldots\ldots\ldots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{1/n}$$

22- اگر $n \to \infty$ ہو لیکن ہمیشہ $na = 1$ رہے تو

$$\prod_{r=1}^{n} [1+(ra)^2]^{1/r}$$

کی انتہائی قیمت معلوم کیجیے۔

جوابات

1. $\log 2$ 2. $3/8.$ 3. $\pi/2$ 4. $1/14.$

5. $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2.$ 6. $\frac{8}{3}.$ 7. $\log 4.$ 9. $\pi/2.$

10. $1/105.$ 11. $\frac{1}{2} \log 2.$ 12. $\sqrt{2} \tan^{-1} \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$

13. $\frac{8}{3} + 1.$ 14. $\frac{\pi}{4}$ 15. $\frac{1}{2} \tan 1.$

16. $(2k)!/(2^{2k})(k!)^2.$ 17. $1/24.$ 18. $4e^{\pi/\sqrt{3}} \quad e^{-3}$

19. $1/e.$ 21. $2e^{\frac{(\pi-4)}{2}}.$ 22. $e^{\pi^2/24}.$

استعمال

7
ہموار قطعوں کے رقبے
(Areas of Plane Regions)

ترتیع (Quadrature)

7·1۔ ہم نے § 1·4 میں دیکھا کہ منحنی $y = f(x)$ ، x - محور اور دو عرضول $x = a$ اور $x = b$ کے درمیان گھرے ہوئے رقبہ کو معین تکملہ

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ اسی طرح یہ بھی دکھایا جاتا ہے کہ منحنی $x = f(y)$ ، y - محور اور دو فصلوں $y = c$ اور $y = d$ کے درمیان گھرے ہوئے رقبہ کو معین تکملہ

$$\int_c^d f(y)\,dy.$$

سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

کبھی کبھی وہ رقبے جو ان دونوں طرح سے گھرے نہیں ہیں انھیں بھی ان دونوں طرح کے رقبوں کے مرکب (combination) کی طرح لکھ سکتے ہیں۔

ہموار قطعہ کا رقبہ نکالنے کے عمل کو ترتیع (Quadrature) کہتے ہیں

اب ہم کچھ مثالوں پر غور کریں گے۔

نوٹ: جس قطعہ کا رقبہ نکالنا ہے وہ جس منحنی سے متعلق ہے اُس کی ترسیم

(tracing) ہمیشہ ضروری ہوتی ہے۔ ترسیم سے رقبہ کو ایک معین تکملے یا معین تکملوں کے مرکب کے طور سے لکھ سکتے ہیں۔

اس باب اور اگلے ابواب میں جہاں ہم قوس کی لمبائی اور گردشی ٹھوس شکلوں کے حجم اور سطح نکالنا سیکھیں گے اُس کے لیے ضروری ہے کہ طالب علم تفاعلوں کی ترسیم کے ابتدائی اصول اچھی طرح سیکھ لیں اور خاص کر ذیل کے منحنی تو بہت اچھی طرح دیکھ لیں کیونکہ آگے ابواب میں ان سے اکثر سابقہ رہے گا۔

کارٹیزی مساواتیں (Cartesian Equations)

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	(*Ellipse*)	علیپس
$y^2=4ax,$	(*Parabola*)	مکافی
$y^2(a-x)=x^3.$	(*Cissoid*)	سیسائڈ
$x^3+y^3=3axy.$	(*Folium*)	فولیم
$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$	(*Astroid*)	اسٹرائڈ
$x=a\cos^3\theta,\ y=a\sin^3\theta$ یا		
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$	(*Hyperbola*)	زائد
$y=c\cosh(x/c).$	(*Catenary*)	کیٹنری (زنجیرہ)
$(x^2+y^2)\,x=a^2(x^2-y^2)$	(*Strophoid*)	اسٹروفائڈ
$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$	(*Lemniscate*)	لیمنسکیٹ
$x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta)$	(*Cycloid*)	سائیکلائڈ

• مصنف کی کتاب Differential Calculus کے ابواب *Some important curves* اور *'Curve Tracing'* دیکھ سکتے ہیں۔

اکثر سائیکلائڈ کی مساوات کو ذیل کی شکلوں میں بھی لکھتے ہیں:

I. $x = a(\theta+\sin\theta), \quad y = a(1+\cos\theta)$

II. $x = a(\theta+\sin\theta), \quad y = a(1-\cos\theta).$

مختلف مساواتوں والے یہ سائیکلائڈ، محاور (axes) کی نسبت سے مختلف شکلوں کے ہوتے ہیں۔

ٹریکٹرکس (Tractrix) $x = a(\cos t+\frac{1}{2}\log\tan^2\frac{1}{2}t), y = a\sin t$

قطبی مساواتیں

کارڈائڈ (Cardioid): $r = a(1 \pm \cos\theta).$

مساوی زاویہ اسپائرل (Equiangular Spiral): $r = ae^{b\theta}$

تین پتیہ گلاب (Three leaved Rose): $r = a\sin 3\theta.$

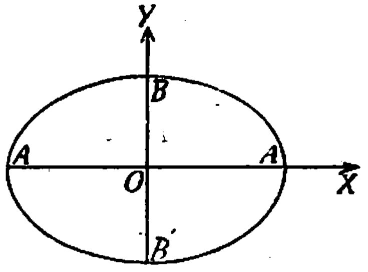
چار پتیہ گلاب (Four leaved Rose): $r = a\sin 2\theta.$

لیمنسکیٹ (Lemniscate): $r^2 = a^2\cos 2\theta.$

مخروطی (Conic): $l/r = 1+e\cos\theta.$

مثالیں

1- علیپس $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ کا رقبہ معلوم کیجیے۔



تصویر 10

علیپس دونوں محاور کی نسبت سے تشاکل (symmetric) ہے۔ اس لیے دونوں محاور اُسے چار ایسے حصوں میں تقسیم کرتے ہیں جن کے

رقبے برابر ہیں۔ ہم حصہ OAB کا رقبہ معلوم کریں گے جو کہ پہلے ربع (quadrant) میں ہے اور پھر اس رقبہ کو 4 سے ضرب دے کر علیپس کا رقبہ حاصل کرلیں گے۔

علیپس کی مساوات حل کرکے y کو x کے تفاعل کی حیثیت سے نکالنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ اگر (x, y) قوس AB پر کوئی نقطہ ہو تو

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$$

اس لیے

$$OAB \text{ رقبہ } = \int_0^a y\,dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{(a^2-x^2)}\,dx$$

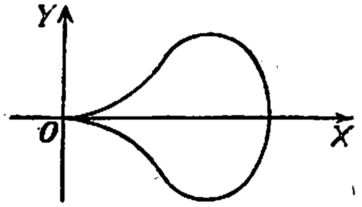
$$= \frac{b}{a}\left[\frac{x\sqrt{(a^2-x^2)}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right]=\frac{\pi}{4}ab$$

$$\text{اس لیے علیپس کا رقبہ } = \pi ab$$

2 - ثابت کیجیے کہ منحنی $a^4y^2 = x^5(2a-x)$ اور نصف قطر (radius) a والے دائرہ کے رقبوں کا تناسب 5 اور 4 کا ہے۔

منحنی ایک لوپ (loop) کی شکل میں ہے جو $x = 0$ اور $x = 2a$ کے درمیان ہے اور x - محور کے گرد متشاکل ہے۔



تصویر 11.

$$\text{منحنی کا رقبہ} = \frac{2}{a^2}\int_0^{2a} x^{5/2}\sqrt{(2a-x)}\,dx$$

اس تکملہ کو حاصل کرنے کے لیے ہم لکھتے ہیں

$$x = 2a\sin^2\theta$$

جب $x = 0$ ہے تو $\theta = 0$ اور جب $x = 2a$ ہے تو $\theta = \frac{\pi}{2}$ اس لیے

$$\text{درکار رقبہ} = \frac{2}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2a)^{5/2}\sin^5\theta \,.\, \sqrt{(2a)}\,.\,\cos\theta\,.\,4a\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= 64a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^6\theta \cos^2\theta \, d\theta$$

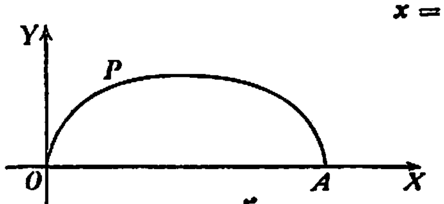
$$= 64a^2 \, \frac{5.3.1.1}{8.6.4.2.} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{5a^2\pi}{4} = \frac{5}{4} \times$$ (نصف قطر a والے دائرہ کا رقبہ)

3۔ وہ رقبہ حاصل کیجیے جو کہ سائیکلائڈ

$$x = a(\theta - \sin\theta), \; y = a(1 - \cos\theta)$$

کے ایک محراب (arch) اور x-محور کے درمیان ہے۔



تصویر 12

سائیکلائڈ کے پہلے محراب بننے میں θ صفر سے 2π تک جاتا ہے۔ نقطہ $A = (2a\pi, 0)$ ۔ اب درکار رقبہ

$$= \int_0^{2\pi a} y\,dx$$

ہم پاتے ہیں

$$dx = a(1 - \cos\theta)\, d\theta$$

اس لیے

$$\text{درکار رقبہ} = \int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta) \,.\, a(1-\cos\theta)\, d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= a^2 \left|\theta - 2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right|_0^{2\pi}$$

$$= 3a^2\pi.$$

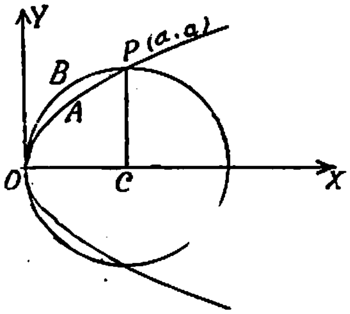
نوٹ: تکملے

$$\int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos\theta)^2\, d\theta$$

کو دوسری طرح سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم پاتے ہیں

$$\int_0^{2\pi} a^2 (1-\cos\theta)^2\, d\theta = 2a^2 \int_0^{\pi} (1-\cos\theta)^2\, d\theta$$
$$= 8a^2 \int_0^{\pi} \sin^4 \frac{\theta}{2}\, d\theta$$
$$= 16a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \phi\, d\phi, \text{ where } \frac{\theta}{2} = \phi,$$
$$= 16a^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 3a^2\pi.$$

4۔ وہ رقبہ معلوم کیجیے جو کہ x ۔محور کے اوپر پیرابولا $y^2 = ax$ اور دائرہ $x^2+y^2 = 2ax$ کے درمیان ہو۔



تصویر 13

دونوں منحنیوں کے مساوات ایک ساتھ حل کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ دونوں ایک دوسرے کو $(0, 0)$ ، (a, a) اور $(a, -a)$ پر کاٹتے ہیں۔ ہمیں قطعہ OABP کا رقبہ معلوم کرنا ہے جہاں کہ (a, a) نقطہ تقاطع (point of intersection) ہے۔ اس قطعہ کا رقبہ قطعوں OBPCO اور OAPCO کے رقبوں کے فرق کے برابر ہے۔

اب قطعہ OBPCO کا رقبہ

$$= \int_0^a \sqrt{(2ax - x^2)}\, dx$$

اور قطعہ OAPCO کا رقبہ

$$= \int_0^a \sqrt{(ax)}\, dx$$

اس لیے

$$\text{درکار رقبہ} = \int_0^a \sqrt{(2ax-x^2)}\, dx - \int_0^a \sqrt{(ax)}\, dx.$$

اب

$$\int_0^a \sqrt{(2ax-x^2)}dx = \int_0^a \sqrt{[a^2-(a-x)^2]}\,dx$$

اِس تکملہ کو حاصل کرنے کے لیے $a-x = a\sin\theta$ لکھنے پر ملتا ہے

$$\int_0^a \sqrt{(2ax-x^2)}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (a\cos\theta)(-a\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta\,d\theta = a^2 \cdot \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4}$$

ساتھ ہی

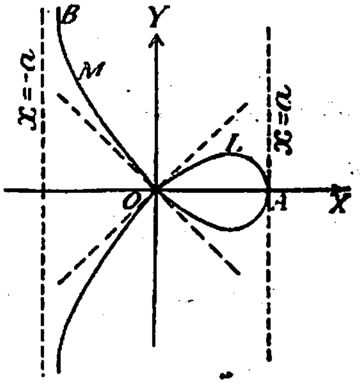
$$\int_0^a \sqrt{(ax)}\,dx = \left|\sqrt{a}\cdot\frac{2}{3}\,x^{3/2}\right|_0^a$$

$$= \frac{2a^2}{3}$$

اِس لیے درکار رقبہ

$$= a^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right)$$

5۔ منحنی $x(x^2+y^2) = a(x^2-y^2)$ اور اس کے لامتناہی مماس (asymptote) کے درمیان گھرا رقبہ معلوم کیجیے۔ اس کے لوپ کا رقبہ بھی معلوم کیجیے۔



تصویر 14

منحنی x ۔ محور کے گرد متشاکل ہے۔ اس کا لوپ خطوط $x = 0$ اور $x = a$ کے درمیان ہے۔ خط $x = -a$ منحنی کا لامتناہی مماس ہے۔

ہم پاتے ہیں

$$y = \pm x\sqrt{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}$$

اب قوس OLA پر کسی نقطہ کے لیے

$$y = x\sqrt{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}$$

اور قوس OMB پر کسی نقطہ کے لیے

$$y = -x\sqrt{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}$$

لوپ کا رقبہ

$$(1)\ \dots\dots\dots\dots = 2\int_0^a y\,dx = 2\int_0^a x\sqrt{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}\,dx$$

منحنی اور اُس کے لامتناہی مماس کے درمیان کا رقبہ

$$(2)\ \dots\dots\dots\dots = 2\int_{-a}^0 y\,dx = 2\int_{-a}^0 -x\sqrt{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}\,dx$$

تکملہ (1) حاصل کرنے کے لیے ہم لکھتے ہیں $x = a\sin\theta$ اور ہم پاتے ہیں

$$2\int_0^a x\sqrt{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}dx = 2\int_0^a \frac{x(a-x)}{\sqrt{(a^2-x^2)}}dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2(\sin\theta-\sin^2\theta)d\theta$$

$$= 2a^2\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4-\pi}{2}a^2$$

تکملہ (2) حاصل کرنے کے لیے ہم لکھتے ہیں $x = -a\sin\theta$ اور پاتے ہیں

$$2\int_{-a}^0 -x\sqrt{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}dx = -2\int_{-a}^0 \frac{x(a-x)}{\sqrt{(a^2-x^2)}}\,d\theta$$

$$= -2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a^2(\sin\theta+\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2(\sin\theta+\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{4+\pi}{2}a^2.$$

نوٹ: منحنی اور اُس کے لا متناہی مماس کے درمیان کے قطعہ (جو ∞ تک پھیلا ہے) کا رقبہ، نا واجب تکملہ

$$2\int_{-a}^{0} x\sqrt{[(a-x)/(a+x)]}dx$$

کے برابر ہے جس میں تکاملیہ $x = -a$ پر ∞ ہوتا ہے لیکن ہم نے دیکھا کہ تکملہ کی قیمت متناہی ہے اس لیے درکار رقبہ بھی متناہی ہے۔

7.2- زائد (hyperbola) کی تربیع (Quadrature)

اگر زائد

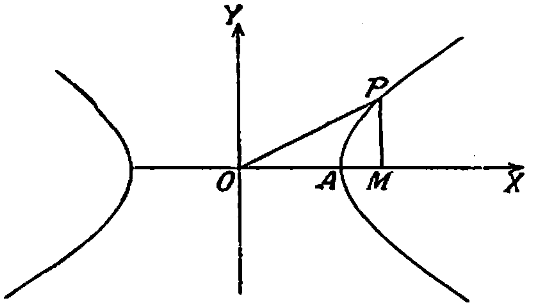
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

کا راس (vertex) A ہو، مرکز O ہو اور $P(x, y)$ اُس پر کوئی نقطہ ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$x = a \cosh \frac{2S}{ab}, \quad y = b \sinh \frac{2S}{ab}$$

جہاں کہ S رقبہ قطع (sectorial area) OPA ہے۔

مان لیجیے کہ P, PM کا عرض (ordinate) ہے۔



ہم پاتے ہیں

$$S = OAP \text{ رقبہ}$$

$$= (OMP \text{ رقبہ}) - (AMP \text{ رقبہ})$$

$$= \tfrac{1}{2}xy - (AMP \text{ رقبہ})$$

قوس (arc) AP پر کسی نقطہ $P\ (x, y)$ کے لیے ہم پاتے ہیں

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}$$

ساتھ ہی $OA = a$ اِس لیے

$$AMP \text{ رقبہ} = \int_a^x y\,dx$$

$$= \frac{b}{a}\int_a^x \sqrt{(x^2-a^2)}\,dx$$

$$= \frac{b}{a}\left|\frac{x\sqrt{(x^2-a^2)}}{2} - \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{a}\right|_0^x$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{x\sqrt{(x^2-a^2)}}{2} - \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{a}\right]$$

$$\therefore\ S = \tfrac{1}{2}x.\frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)} - \frac{b}{a}\left\{\frac{x\sqrt{(x^2-a^2)}}{2} - \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{a}\right\}$$

$$= \frac{ab}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\Rightarrow x = a\cosh\frac{2S}{ab}$$

اِس لیے

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)} = b\sinh\frac{2S}{ab}.$$

مشقیں

1۔ ثابت کیجیے کہ منحنی

$$x^4 = a^2(x^2-y^2)$$

کے لوپ کا رقبہ $2a^2/3$ ہے۔

2۔ ثابت کیجیے کہ منحنی

$$3ay^2 = x(x-a)^2$$

کے لوپ کا رقبہ $8a^2/15\sqrt{3}$ ہے۔

3 - Y – محور اور منحنی $xy^2 = 4(2-x)$ سے گھرا ہوا رقبہ معلوم کیجیے۔

4۔ ثابت کیجیے کہ مکافیوں

$$y^2 = 4a(x+a),\ y^2 = -4a(x-a)$$

کے درمیان گھرا ہوا رقبہ $16a^2/3$ ہے۔

5۔ منحنی $x^2y^2 = a^2(y^2-x^2)$ اور اُس کے لامتناہی مماسوں کے درمیان گھرا کل رقبہ معلوم کیجیے۔

6 - یہ ثابت کیجیے کہ منحنی $x^2(1-y)y = 1$ اور اُس کے لامتناہی مماسوں کے درمیان کے لامتناہی قطعہ کا رقبہ 2π ہے۔

7۔ منحنی $a^4y^2 = x^4(a^2-x^2)$ کے لوپ کا رقبہ نکالیے۔

8۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $y^2 = x^2(4-x^2)$ کے ایک لوپ کا رقبہ $16/3$ ہے۔

9 - منحنی $y^2(2a-x) = x^3$ اور اُس کے لامتناہی مماسوں کے درمیان لامتناہی قطعہ کا رقبہ نکالیے

10۔ منحنیوں $x^2 = 4ay$ اور $x^2+4a^2 = 8a^3/y$ کے درمیان گھرا رقبہ نکالیے۔

11۔ اُس منحنی نما مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے جو پہلے ربع میں ہے، جس کا راس (vertex) مبدا (origin) ہے، اور جو منحنیوں $y^2 = 4ax$ ، $x^2 = 4ay$ اور $x^2+y^2 = 5a^2$ کے درمیان گھرا ہوا ہے۔

12 - y – محور اور منحنی $xy^2 = a^2(a-x)$ کے درمیان گھرا رقبہ معلوم کیجیے۔

13۔ ثابت کیجیے کہ منحنیوں $xy^2 = a^2(a-x)$ اور $(a-x)y^2 = a^2x$ کے

درمیان گھرا ہوا رقبہ $(\pi-2)a^2$ ہے۔

14۔ سائیکلائڈ $x = a(\theta+\sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta)$ اور اس کے قاعدے (base) کے درمیان کا رقبہ معلوم کیجیے۔

15۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $a^2x^2 = y^3(2a-y)$ کا کل رقبہ πa^2 ہے۔

16۔ مساوات $x = a\cos^3\theta,\ y = b\sin^3\theta$ والے منحنی کا رقبہ معلوم کیجیے۔

17۔ منحنیوں $x^2+y^2 = 9$ اور $y^2 = 8x$ کے درمیان گھرے ہوئے قطعوں میں سے چھوٹے قطعہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

18۔ منحنی $y^2(a+x) = (a-x)^3$ اور اس کے لامتناہی مماس کے درمیان کا رقبہ نکالیے۔

19۔ منحنی $y^2x+(x+a)^2(x+2a) = 0$ کے لوپ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

20۔ منحنی $x^2(x^2+y^2) = a^2(x^2-y^2)$ کا کل رقبہ معلوم کیجیے۔

21۔ منحنی $y^2 = x(x-2)^2/(4-x)$ کی ترسیم کیجیے۔ اس کے لوپ کا رقبہ معلوم کیجیے اور اس منحنی اور اس کے لامتناہی مماس کے درمیان کا رقبہ بھی نکالیے۔

22۔ یہ دکھائیے کہ منحنی $a^6y^2 = x^6(a^2-x^2)$ کا رقبہ $8a^2/15$ ہے۔

23۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $ay^2 = (x-a)(x-5a)^2$ کے لوپ کا رقبہ $256a^2/15$ ہے۔

24۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $a^2y^2 = x^2(2a-x)(x-a)$ کے لوپ کا رقبہ $3a^2\pi/8$ ہے۔

25۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $y^2(a+x) = x^2(3a-x)$ کے لوپ کا رقبہ وہی ہے جو منحنی اور اس کے لامتناہی مماس کے درمیان کا رقبہ ہے۔

26۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $y^2 = x^2/(4-x)(x-2)$ کی دو شاخوں (branches) اور اس کے لامتناہی مماسوں کے درمیان کا کل رقبہ 6π ہے۔

27۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $c^2y^2 = (x-a)(x-b)^2$ کے لوپ کا رقبہ $8(b-a)^{5/2}/15c$ ہے۔

28۔ منحنی $y = \tanh x$ کی ترسیم کیجیے اور ثابت کیجیے کہ پہلے ربع میں منحنی اور اُس کے لامتناہی مماس $y = 1$ کے درمیان کا رقبہ $\log 2$ ہے۔

جوابات

3. 4π. 5. $4a^2$. 7. $\pi a^2/8$. 9. $3a^2\pi$.

10. $\frac{9}{8}(3\pi-2)a^2$. 11. $\frac{1}{8}[4+15\sin^{-1}\frac{4}{5}]a^2$. 12. πa^2. 14. $3a^2\pi$.

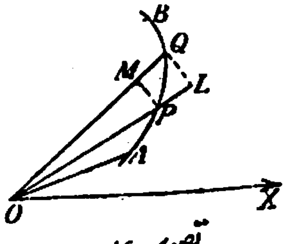
16. $\frac{3}{8}\pi ab$. 17. $2\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{9\pi}{4}-\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{1}{3}\right)$ 18. $3a^2\pi$.

19. $\frac{1}{2}a^2(4-\pi)$. 20. $a^2(\pi-2)$. 21. $2(4-\pi)$, $2(\pi+4)$

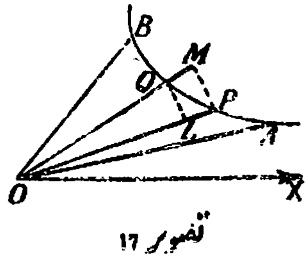
7·3 رقبہ قطع (Sectorial Area)

اگر کسی منحنی کی قطبی مساوات (polar equation) $r = f(\theta)$ ہو، تو منحنی اور دو نصف قطری سمتیوں (radii vectors) $\theta = \alpha$ اور $\theta = \beta$ سے گھرے ہوئے قطع کا رقبہ $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\theta$ ہوتا ہے۔

مان لیجیے $\angle XOA = \alpha$ اور $\angle XOB = \beta$ اور مان لیجیے کہ $P(r, \theta)$ منحنی پر کوئی نقطہ ہے۔ ہم قطع AOP کے رقبہ کو A سے ظاہر کرتے ہیں اس طرح A، θ کا تفاعل ہے۔



تصویر 16



تصویر 17

مان لیجیے کہ $Q(r+\Delta r,\ \theta+\Delta\theta)$ منحنی پر کوئی دوسرا نقطہ ہے جو P کے اتنا قریب ہے کہ جب منحنی پر کوئی نقطہ P سے Q تک جاتا ہے تو نصف قطری سمتیہ یا تو لگاتار بڑھتا ہے (جیسے تصویر 16 میں) یا لگاتار گھٹتا ہے (جیسے تصویر 17 میں)۔ θ میں $\Delta\theta$ کا اضافہ ہونے پر رقبہ A میں رقبہ POQ کا اضافہ ہوتا ہے جسے ہم ΔA سے ظاہر کرتے ہیں۔

اب O کو مرکز اور OP اور OQ کو نصف قطر (radii) لے کر دائروں کے قوس کھینچیے جو کہ OQ اور OP کو ترتیب وار M اور L پر کاٹیں۔ اب ظاہر ہے کہ ΔA دائری قطعوں (circular sectors) OPM اور OQL کے درمیان ہے۔

دائری قطع OPM کا رقبہ $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$ اور دائری قطع OQL کا رقبہ $\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\theta$ ہوگا۔

تصویر 16 کے لیے ہم پاتے ہیں

$$\tfrac{1}{2}r^2\,\Delta\theta < \Delta A < \tfrac{1}{2}(r+\Delta r)^2\,\Delta\theta$$

$$\Rightarrow\quad \tfrac{1}{2}r^2 < \frac{\Delta A}{\Delta\theta} < \tfrac{1}{2}(r+\Delta r)^2$$

مان لیجیے $Q \to P$ جس سے کہ $\Delta\theta$ اور Δr دونوں مائل بہ صفر ہوتے ہیں تو انتہا لینے پر ہم پاتے ہیں۔

$$\frac{dA}{d\theta} = \tfrac{1}{2}r^2$$

تصویر 17 کے لیے ہم پاتے ہیں

$$\tfrac{1}{2}(r+\Delta r)^2\,\Delta\theta < \Delta A < \tfrac{1}{2}r^2\,\Delta\theta$$

$$\Rightarrow\quad \tfrac{1}{2}(r+\Delta r)^2 < \frac{\Delta A}{\Delta\theta} < \tfrac{1}{2}r^2.$$

اس صورت میں بھی ہم پاتے ہیں

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{1}{2}r^2$$

اب

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \int_\alpha^\beta \frac{dA}{d\theta} \cdot d\theta = A \Big|_\alpha^\beta$$

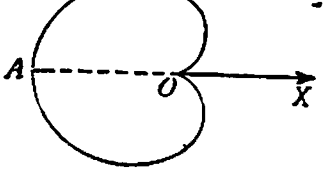
= ($\theta = \beta$ پر A کی قیمت) − ($\theta = \alpha$ پر A کی قیمت)

= (قطع AOB کا رقبہ) − 0 = قطع AOB کا رقبہ

مثالیں

1۔ کارڈائڈ $r = a(1-\cos\theta)$ کا رقبہ نکالیے

منحنی ابتدائی خط (initial line) کے گرد متشاکل ہے۔



تصویر 18

$$\text{درکار رقبہ} = 2\int_0^\pi \tfrac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

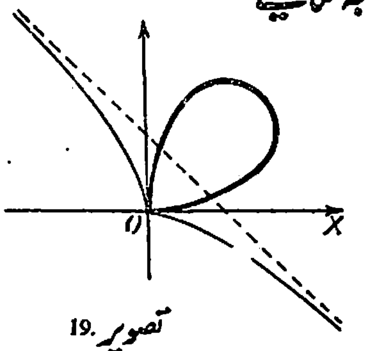
$$= a^2 \int_0^\pi (1-\cos\theta)^2 \, d\theta$$

$$= 4a^2 \int_0^\pi \sin^4 \frac{\theta}{2} \, d\theta$$

$$= 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi \, d\varphi, \quad (\text{جہاں } \frac{\theta}{2} = \varphi)$$

$$= 8a^2 \, \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3a^2\pi}{2}$$

2۔ منحنی $x^5+y^5 = 5ax^2y^2$ کے لوپ کا رقبہ نکالیے



تصویر 19.

لوپ کا رقبہ اُس قطع کا رقبہ ہوگا جو منحنی اور نصف قطری سمتیوں $\theta = 0$ اور $\theta = \pi/2$ سے گھرا ہوا ہے۔ دراصل لوپ کا رقبہ نصف قطری سمتیہ کے $\theta = 0$ سے $\theta = \pi/2$ تک جانے پر بنتا ہے۔

منحنی کی قطبی مساوات

$$r = \frac{5a \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\cos^5 \theta + \sin^5 \theta}$$

ہے۔ اس لیے لوپ کا درکار رقبہ

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{25a^2 \cos^4 \theta \sin^4 \theta}{(\cos^5 \theta + \sin^5 \theta)^2} d\theta$$

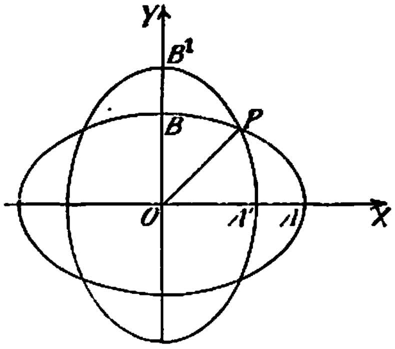
(شمار کنندہ و نسب نما کی $\cos^{10} \theta$ سے تقسیم پر)

$$= \frac{25a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^4 \theta \sec^2 \theta \, d\theta}{(1 + \tan^5 \theta)^2}$$

$$= \frac{25a^2}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{5} \cdot \frac{dt}{t^2} \quad (\text{جہاں } 1 + \tan^5 \theta = t)$$

$$= \frac{5a^2}{2} \left. -\frac{1}{t} \right|_1^{\infty} = \frac{5a^2}{2}$$

3۔ علیپسوں $x^2 + 2y^2 = a^2$ اور $2x^2 + y^2 = a^2$ کے درمیان مشترک رقبہ نکالیے۔



تصویر 20

دی ہوئی مساواتوں کو اگر یوں لکھیں

$$(1) \quad \cdots\cdots\cdots \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}a^2} = 1$$

$$(2) \quad \cdots\cdots\cdots \quad \frac{x^2}{\frac{1}{2}a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

تو ہم دیکھتے ہیں کہ (1) کا محور اکبر (major axis) x-محور پر ہے اور (2) کا محور اکبر y-محور پر ہے۔ ساتھ ہی درکار رقبہ، قطعہ $OA'PB$ کا چار گنا ہے۔ جہاں کہ P نقطہ تقاطع (point of intersection) ہے۔ دونوں مساواتیں حل کرنے پر نقطہ P کے مختصات (co-ordinates) $(a/\sqrt{3}, a/\sqrt{3})$ ملتے ہیں۔

لہٰذا $\angle XOP = \pi/4$ اور خط OP کی مساوات $x = y$ ہے۔ اگر ہم x اور y کو باہم بدل دیں تو دیکھتے ہیں کہ ایک علبس کی مساوات دوسرے علبس کی مساوات میں تبدیل ہوجاتی ہے اور اِس لیے قطعہ $OA'PB$ کا رقبہ، $OA'P$ کے رقبہ کا دُگنا ہے۔
اب ہم یہ مان سکتے ہیں کہ رقبہ $OA'P$ منحنی $A'P$ اور دو نصف قطری سمتیوں $\theta = 0$ اور $\theta = \pi/4$ سے گھرے ہوئے قطع کا رقبہ ہے۔

اب $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ رکھ کر قطبی مساوات میں بدلنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ علبس (2) کی مساوات (جس کا کہ $A'P$ ایک حصہ ہے)

$$r^2 = \frac{a^2}{2\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

ہے۔ اِس لیے

$$\text{رقبہ } OA'P = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{a^2}{2\cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{a^2\sec^2\theta}{2 + \tan^2\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{1} \frac{a^2\, dt}{2 + t^2} \quad (\text{جہاں } t = \tan\theta)$$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}}\right|_0^1 = \frac{a^2}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

اِس لیے درکار رقبہ

$$= 8\times\frac{a^2}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 2\sqrt{2}a^2\sin^{-1}\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

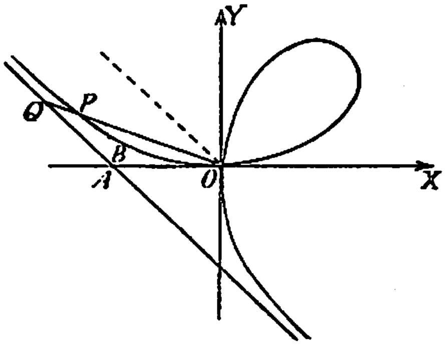
نوٹ :- x ۔محور پر عرض PM کھینچ کر اور دونوں قطعوں

$OBPM$ اور MPA

پر § 6·1 والا فارمولا لگا کر بھی یہ رقبہ معلوم کر سکتے ہیں۔

4۔ ثابت کیجیے کہ فولیم $x^3+y^3=3axy$ اور اس کے لامتناہی مماس کے درمیان کا رقبہ اس کے لوپ کے رقبہ کے برابر ہے۔

لامتناہی مماس کی مساوات $x+y+a=0$ ہے۔ منحنی اور لامتناہی مماس کے قطبی مساوات ترتیب وار



تصویر 21

$$r=\frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}$$

اور

$$r=\frac{a}{\sin\theta-\cos\theta}$$

ہیں۔ لوپ کا رقبہ

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{9a^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}\,d\theta$$

(نسب نما و شمار کنندہ کی $\cos^6\theta$ سے تقسیم پر)

$$=\frac{9}{2}a^2\int_0^{\pi/2}\frac{\tan^2\theta\sec^2\theta}{(1+\tan^3\theta)^2}\,d\theta$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2},$$ جہاں $1+\tan^3\theta=t$.

$$=\frac{3a^2}{2}\left.\frac{-1}{t}\right|_1^{\infty}=\frac{3a^2}{2}.$$

اب ہم منحنی اور لامتناہی مماس کے درمیان کا رقبہ نکالیں گے۔

لامتناہی مماس کے متوازی (parallel) کھینچی گئی نقطہ دار سطر OX سے زاویہ $3\pi/4$ (angle) بناتی ہے۔ ہم O سے کوئی ایسا خط کھینچتے ہیں جس کا سمتیہ زاویہ $3\pi/4$ اور π کے درمیان ہو۔ مان لیجیے یہ خط، منحنی اور لامتناہی مماس کو ترتیب وار P اور Q پر کاٹتا ہے۔

پہلے ہم منحنی اور لامتناہی مماس کے درمیان، دوسرے ربع والا رقبہ نکالیں گے۔

یہ رقبہ قطع OBPQAO کے رقبہ کی انتہا ہے جب کہ OA , OP سے چل کر نقطہ دار خط تک جائے۔

$$\triangle\, OAQ \text{ کا رقبہ } = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{a^2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}\, d\theta$$

منحنی اور خط OP کے درمیان کا رقبہ

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{9a^2 \sin^2\theta \cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}\, d\theta$$

اس لیے

$$OBQPAO \text{ رقبہ } = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\frac{a^2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2} - \frac{9a^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}\right] d\theta.$$

اب

$$\int \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}\, d\theta = \int \frac{\tan^2\theta \sec^2\theta}{(1+\tan^3\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \int \frac{dt}{3t^2} \quad (\text{جہاں } t = 1+\tan^3\theta)$$

$$= -\frac{1}{3t} = -\frac{1}{3(1+\tan^3\theta)}.$$

ساتھ ہی

$$\int \frac{1}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}\, d\theta = \int \frac{\sec^2\theta}{(1+\tan\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \int \frac{dt}{t^2} \quad (\text{جہاں } t = 1+\tan\theta)$$

$$= -\frac{1}{t} = -\frac{1}{1+\tan\theta}.$$

اس لیے

$$OBQPAO \text{ رقبہ } = \frac{a^2}{2}\left| -\frac{1}{1+\tan\theta} + \frac{3}{1+\tan^3\theta}\right|_0^{\pi}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[2 - \left(-\frac{1}{1+\tan\theta} + \frac{3}{1+\tan^3\theta}\right)\right].$$

ہمیں اس کی انتہا معلوم کرنا ہے جب کہ $\theta \to 3\pi/4$ ہو۔

اب

$$\frac{1}{1+\tan\theta}-\frac{3}{1+\tan^3\theta}=\frac{\tan^2\theta-\tan\theta-2}{1+\tan^3\theta}$$

$$=\frac{(\tan\theta+1)(\tan\theta-2)}{(\tan\theta+1)(\tan^2\theta-\tan\theta+1)}$$

$$=\frac{\tan\theta-2}{\tan^2\theta-\tan\theta+1}$$

جو کہ -1 کی طرف مائل ہوتا جب کہ $\theta \to 3\pi/4$ ہو یعنی جب $\tan\theta \to -1$ ہو۔
اس لیے رقبہ

$$=(a^2/2)(2-1)=a^2/2$$

خط $x=y$ کے گرد منحنی کے متشاکل ہونے کے باعث چوتھے ربع میں بھی منحنی اور لامتناہی مماس کے درمیان کا رقبہ $a^2/2$ ہے۔ تیسرے ربع والا رقبہ مثلثی رقبہ ہونے کے باعث $a^2/2$ ہے۔ اِس لیے منحنی اور اُس کے لامتناہی مماس کے درمیان کا رقبہ

$$=\tfrac{1}{2}a^2+\tfrac{1}{2}a^2+\tfrac{1}{2}a^2=\tfrac{3}{2}a^2$$

جس سے کہ نتیجہ ثابت ہو گیا۔

5۔ منحنی $x^4+3x^2y^2+2y^4=a^2x$ کے لوپ کا رقبہ معلوم کیجیے

یہ منحنی بالمقابل ربعوں (opposite quadrants) میں متشاکل ہے اور دونوں محاور $x=0$ اور $y=0$ مبدا (origin) پر اس کے مماس (tangents) ہیں۔ اس کا کوئی لامتناہی مماس (asymptote) نہیں۔

قطبی مختصات (polar co-ordinates) میں تبدیلی پر ہم پاتے ہیں

$$r^2=\frac{a^2\cos\theta\ \sin\theta}{\cos^4\theta+3\cos^2\theta\sin^2\theta+2\sin^4\theta}$$

اب θ کے صفر سے π/2 تک بڑھنے پر نقطہ (r, θ) منحنی کا لوپ OAPBO بناتا ہے۔

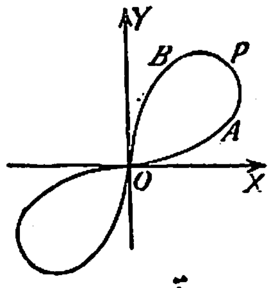
اس لیے لوپ کا رقبہ

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^4\theta+3\cos^2\theta\sin^2\theta+2\sin^4\theta}\, d\theta$$

(نسب نما و شمار کنندہ کی $\cos^4\theta$ سے تقسیم پر)

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta}{1+3\tan^2\theta+2\tan^4\theta}$$



تصویر 22

اب $t = \tan^2\theta$ رکھنے پر درکار رقبہ

$$= \frac{a^2}{4}\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+3t+2t^2}$$

$$= \frac{a^2}{4}\int_0^{\infty} \frac{dt}{(2t+1)(t+1)}$$

$$= \frac{a^2}{4}\int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{t+1}+\frac{2}{2t+1}\right) dt$$

$$= \frac{a^2}{4}\left|\log\frac{2t+1}{t+1}\right|_0^{\infty} = \frac{a^2}{4}\log 2,$$

کیونکہ $t \to \infty$ ہونے پر

$$\log\frac{2t+1}{t+1} = \log\frac{2+1/t}{1+1/t} \to \log 2.$$

مشقیں

1۔ منحنی $r = a\sin 2\theta$ کے لوپ کا رقبہ نکالیے۔

2۔ منحنی $r = a\sin 3\theta$ کے لوپ کا رقبہ نکالیے۔

3۔ لمکان $r=a+b\cos\theta$ کا رقبہ نکالیے $(a > b)$

4۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $x^3+y^3=3axy$ کے لوپ کا رقبہ منحنی $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ کے لوپ کے رقبہ کا دگنا ہے۔

5۔ منحنی $r = a\theta \cos\theta$ کے پہلے ربع والے لوپ کا رقبہ نکالیے۔

6۔ ثابت کیجیے کہ کارڈائڈوں (cardioids)

$$r = a(1+\cos\theta), r = a(1-\cos\theta)$$

کے درمیان مشترک رقبہ $a^2(3\pi-8)/2$ ہے۔

7۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $r\cos\theta = a\cos 2\theta$ کے لوپ کا رقبہ $a^2(4-\pi)/2$ ہے۔

8۔ دائروں $r = 2a\cos\theta, r = a\sqrt{2}$ کے درمیان مشترک (common) رقبہ معلوم کیجیے۔

9۔ منحنی $x^4+y^4 = 2a^2xy$ کے لوپ کا رقبہ نکالیے۔

10۔ منحنی $(x^2+y^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2$ کا کل رقبہ نکالیے۔

11۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $x^6+y^6=a^2x^2y^2$ کے لوپ کا رقبہ $\pi a^2/12$ ہے۔

12۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $(x^2+y^2)^3-4axy^2=0$ کے پہلے ربع والے لوپ کا رقبہ $\pi a^2/4$ ہے۔

13۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $(x+y)(x^2+y^2) = 2axy$ کے لوپ کا رقبہ $a^2(1-\pi/4)$ ہے۔ یہ بھی دکھائیے کہ منحنی اور اس کے لامتناہی مماس کے لوپ کا رقبہ $a^2(1+\pi/4)$ ہے۔

14۔ فولیم $x^3+y^3 = 3axy$ کے لوپ کے رقبہ کو خط $x+y = 2a$ جس تناسب (ratio) میں تقسیم کرتا وہ تناسب معلوم کیجیے۔

15۔ ثابت کیجیے کہ دوسرے ربع میں منحنی $x^5+y^5 = 5ax^2y^2$ اور اس کے لامتناہی مماس کے درمیان کا رقبہ a^2 ہے۔

16۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $r = \sqrt{3}\cos 3\theta+\sin 3\theta$ کے لوپ کا رقبہ $\pi/8$ ہے۔

17۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $r = \frac{1}{2}+\cos 2\theta$ کے بڑے اور چھوٹے لوپوں کے رقبوں کا

تناسب $(4\pi+3\sqrt{3})/(2\pi-3\sqrt{3})$

18- ثابت کیجیے کہ منحنی $r=a(1+2\cos\theta)$ کے دو لوپوں کے درمیان گھرا ہوا رقبہ $a^2(\pi+3\sqrt{3})$ ہے۔

19- علیپس $l/r=1+e\cos\theta$ کا رقبہ نکالیے۔

20- ثابت کیجیے کہ منحنی $r^2\cos\theta=a^2\sin 3\theta$ کے پہلے ربع والے لوپ کا رقبہ

$a^2/4\ \log(e^3/4)$ ہے۔

21- منحنی $r=a\theta/(\theta+1)$ کی ترسیم کیجیے جب کہ θ صفر سے 2π تک بڑھے۔
ثابت کیجیے کہ اس منحنی اور ابتدائی خط کے درمیان کا رقبہ

$$\frac{a^2}{2}\left[2\pi-(2\pi+1)^{-1}-2\log(2\pi+1)+1\right]$$

22- کارڈائڈ $r=a(1-\cos\theta)$ اور اس کے دُہرے مماس (double tangent) $x=a/4$ کے درمیان کا رقبہ نکالیے۔

جوابات

1. $\pi a^2/8$.	2. $\pi a^2/12$.	3. $\pi(2a^2+b^2)/2$.
8. $a^2(\pi-1)$	9. $\pi a^2/4$.	10. $\pi(a^2+b^2)/2$.
14. 2 : 1.	19. $\pi l^2/(1-e^2)^{3/2}$.	22. $a^2\left[\frac{15}{16}\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right]$

7·4- کسی بند منحنی (closed curve) سے گھرا ہوا رقبہ

ہم جانتے ہیں کہ معین تکملہ

$$\int_a^b y\,dx$$

منحنی $y=f(x)$، x- محور اور دو عرضوں $x=a$ اور $x=b$ سے گھرے ہوئے

رقبہ کو ظاہر کرتا ہے جو رقبہ اِس طور سے گھرا ہوا نہیں ہوتا اُسے پہلے ایسے قطعوں کے مرکب (combination) سے ظاہر کرتے ہیں جو یوں گھرے ہوئے ہوں اور پھر اُس پورے قطع کا رقبہ اِن چھوٹے قطعوں کے رقبوں کا مجموعہ ہوتا ہے۔ تکملوں

$$\int_c^d x\,dy,\ \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\theta.$$

پر بھی اِسی قسم کی پابندیاں ہوتی ہیں۔

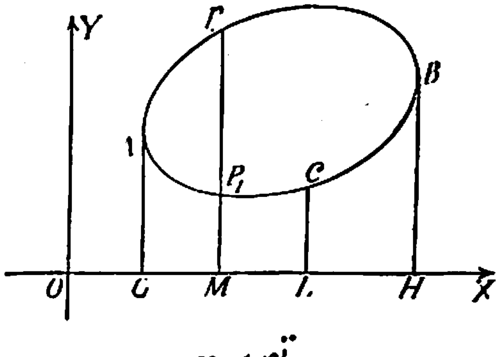
اب ہم ایسے فارمولوں پر غور کریں گے جن کی مدد سے کسی بھی بند منحنی سے گھرا ہوا رقبہ معلوم ہو سکے خواہ منحنی کیسا بھی ہو، بشرطیکہ وہ خود کو نہ کاٹے۔ اِس پر کوئی پابندی نہیں کہ محوروں کی نسبت سے منحنی کا کیا مقام ہے۔

پیرامیٹری مساوات (parametric equations)

$$x = f(t),\ y = \varphi(t)$$

والے بند منحنی پر غور کیجیے۔ یہاں 't' پیرامیٹر ہے۔

ہم مان لیتے ہیں کہ منحنی خود کو نہیں کاٹتا اور مان لیجیے کہ جب پیرامیٹر t_1 سے t_2 تک بڑھتا ہے تو نقطہ $P(x, y)$ خلاف ساعت وار (Anti-clock-wise) چل کر پورا منحنی بناتا ہے۔ چونکہ منحنی بند ہے اِس لیے منحنی پر پیرامیٹر کی قیمت t_2 اور t_1 رکھنے پر وہی نقطہ ملتا ہے۔ مان لیجیے وہ نقطہ C ہے۔



تصویر 23

یہ دکھایا جائے گا کہ ایسے منحنی سے گھرا ہوا رقبہ

$$= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt$$

مان لیجیے کہ منحنی کے کم ازکم اور زیادہ سے زیادہ فصلہ والے نقطے ترتیب وار A اور B ہیں۔

مان لیجیے کہ منحنی ایسا ہے کہ y محور کے متوازی parallel اور نقطوں A اور B کے عرضوں $x = a$، اور $x = b$ کے درمیان کوئی بھی خط منحنی کو دو اور صرف دو نقطوں P_1 اور P_2 پر کاٹتی ہے۔ P_1 قوس ACB پر اور P_2 قوس BP_2A. پر ہے۔

$$\text{قطعہ کا رقبہ} = (\text{رقبہ } AGHBCAG) - (\text{رقبہ } AGHBP_2AG)$$

$$= \int_a^b MP_2\, dx - \int_a^b MP_1\, dx$$

$$= -\int_b^a MP_2\, dx - \int_a^b MP_1\, dx.$$

اب ہم ان تکملوں کو متغیر t کی ارقام میں رکھیں گے۔

مان لیجیے کہ t_a اور t_b نقطوں A اور B پر پیرامیٹر t کی قیمتیں ہیں۔ جب P (x, y) قوس BP_2A پر B سے A کو جاتا ہے تو پیرامیٹر t، t_b سے t_a تک بڑھتا ہے۔ جب P(x, y) قوس AC پر A سے C کو جاتا ہے تو پیرامیٹر t، t_a سے t_1 تک بڑھتا ہے۔ جب P(x, y) قوس CB پر C سے B کو جاتا ہے تو پیرامیٹر t، t_1 سے t_b تک بڑھتا ہے۔

$$\therefore \int_b^a MP_2\, dx = \int_{t_b}^{t_a} y\frac{dx}{dt}\, dt,$$

اور

$$\int_a^b MP_1\, dx = \int_a^{OL} MP_1\, dx + \int_{OL}^b MP_1\, dx$$

$$= \int_{t_a}^{t_1} y\frac{dx}{dt}\, dt + \int_{t_1}^{t_b} y\frac{dx}{dt}\, dt$$

$$\therefore \text{قطع کا رقبہ} = -\int_{t_b}^{t_a} y\frac{dx}{dt}\, dt - \int_{t_a}^{t_1} y\frac{dx}{dt}\, dt - \int_{t_1}^{t_b} y\frac{dx}{dt}\, dt$$

$$= -\int_{t_1}^{t_0} y\frac{dx}{dt}\,dt - \int_{t_0}^{t_0} y\frac{dx}{dt}\,dt - \int_{t_0}^{t_2} y\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} y\frac{dx}{dt}\,dt. \quad \ldots\ldots (i)$$

اسی طرح یہ دکھایا جاتا ہے کہ اسی قطع کا رقبہ

$$= \int_{t_1}^{t_2} x\frac{dy}{dt}\,dt \quad \ldots\ldots (ii)$$

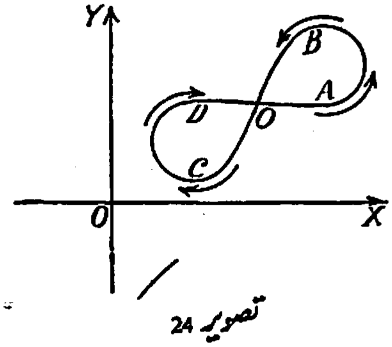
ان دونوں کو جوڑ کر آدھا کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ اس قطع کا رقبہ

$$= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt \quad \ldots\ldots (iii)$$

یہ نتیجہ اُس منحنی کے لیے بھی صحیح ہے جسے محوروں کے متوازی کوئی خط دو سے زیادہ نقطوں پر کاٹے، لیکن اس وسعت (extension) کی تفصیل یہاں نہیں دی جائے گی۔

نوٹ 1 : تشاکل (symmetry) کی وجہ سے (i) اور (ii) کے بجائے فارمولا (iii) عموماً زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

نوٹ 2 : مان لیجیے کہ منحنی خود کو ایک بار کاٹتا ہے جیسا کہ تصویر 24 میں دکھایا گیا ہے۔



تصویر 24

مان لیجیے کہ جیسے جیسے $P(x, y)$ منحنی OAB پر چل کر واپس ہوتا ہے ویسے t، t_1 سے t_0 تک بدلتا ہے۔ ساتھ ہی، یہ بھی مان لیجیے کہ جیسے جیسے $P(x, y)$ منحنی OCD پر O سے چل کر وہیں واپس آتا ہے ویسے t، t_0 سے t_2 تک بدلتا ہے۔

قوس $OABO$ کو خلاف ساعت وار طے کیا جاتا ہے اور قوس OCD کو خلاف

ساعت وار طے کیا جاتا ہے۔

لوپ OABO کا رقبہ

$$= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_1'}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt$$

لوپ OCDO کا رقبہ

$$=-\frac{1}{2}\int_{t_1'}^{t_2}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt$$

$$(\text{OABO رقبہ}) - (\text{OCDO رقبہ}) = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt$$

اِس فارمولے سے دونوں رقبوں کا فرق ملتا ہے، نہ کہ کُل رقبہ۔
کُل رقبہ پانے کے لیے، ہمیں ہر رقبہ علاحدہ علاحدہ نکال کر اُن کو جوڑنا چاہیے۔

نوٹ 3 : معین تکملہ

$$\frac{1}{2}\int\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt$$

کو اکثر مختصراً ایسے لکھ دیتے ہیں :-

$$\frac{1}{2}\int (xdy-ydx)$$

مثالیں

1۔ علیپس $x = a\cos t,\ y = b\sin t$ کا رقبہ نکالیے

ہم پاتے ہیں

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt} = ab\,(\cos^2 t+\sin^2 t) = ab$$

اِس لیے درکار رقبہ

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \pi ab$$

2۔ منحنی

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{t-t^3}{1+t^2} \quad (-1 \leqslant t \leqslant 1)$$

کی ترسیم کیجیے اور اُس کے لوپ کا رقبہ نکالیے۔

t کا اسقاط (eliminatin) کر کے منحنی کی ترسیم ہو سکتی ہے۔ لیکن ہم t کے -1 سے 1 تک بڑھنے پر جو حصہ بنتا ہے۔ اس کی* براہِ راست ترسیم کریں گے۔

ہم پاتے ہیں

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{t^4+4t^2-1}{(t^2+1)^2}$$

t منفی $\Rightarrow$ dx/dt مثبت

t مثبت $\Rightarrow$ dx/dt منفی

لہٰذا ہم دیکھتے ہیں کہ

t کے -1 سے 0 تک بڑھنے پر x بڑھتا ہے۔

اور t کے 0 سے 1 تک بڑھنے پر x گھٹتا ہے۔

اب dy/dt کی علامت میں تبدیلی دیکھنے کے لیے مساوات

$$t^4+4t^2-1 = 0$$

پر غور کیجیے۔ اِس سے ملتا ہے

$$t^2 = \sqrt{5}-2, -\sqrt{5}-2$$

اِس لیے

$$\begin{aligned}(t^4+4t^2-1) &= [t^2-(\sqrt{5}-2)][t^2-(-\sqrt{5}-2)] \\ &= [t^2-(\sqrt{5}-2)][t^2+(\sqrt{5}+2)]\end{aligned}$$

---

* جن منحنیوں کی پیرامیٹری مساوات دی ہوتی ہیں ان کی ترسیم میں یہ طریقہ کارآمد ہوتا ہے۔ اِس طریقے سے خاص طور پر اسٹرائڈ اور سائیکلائڈ بہت آسانی سے ترسیم ہو سکتے ہیں۔

پھر $t^2 = \sqrt{5}-2$

$$t = \pm\sqrt{(\sqrt{5}-2)} = \pm\,{\cdot}4\ldots\ldots$$

اس لیے ہم پاتے ہیں

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{(t^2+\sqrt{5}+2)(t+{\cdot}4\ldots)(t-{\cdot}4\ldots)}{(t^2+1)^2}$$

اس لیے اگر

t، -1 سے بدلتا ہے $-{\cdot}4$ تک $\Rightarrow$ dy/dt نفی ہے۔

t، ${\cdot}4$ سے بدلتا ہے 1 تک $\Rightarrow$ dy/dt نفی ہے۔

t، $-{\cdot}4$ سے بدلتا ہے ${\cdot}4$ تک $\Rightarrow$ dy/dt مثبت ہے۔

لہٰذا

t کے -1 سے $-{\cdot}4$ تک بدلنے پر $dy/dt < 0$ یعنی y گھٹتا ہے۔

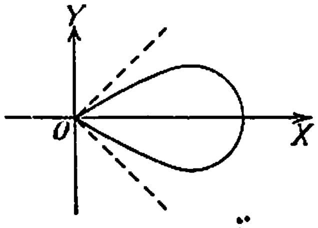
t کے $-{\cdot}4$ سے ${\cdot}4$ تک بدلنے پر $dy/dt > 0$ یعنی y بڑھتا ہے۔

t کے ${\cdot}4$ سے 1 تک بدلنے پر $dy/dt < 0$ یعنی y گھٹتا ہے۔

ساتھ ہی

$$t = -1 \Rightarrow x = 0,\ y = 0,\ dy/dx = -1$$

$$t = 1 \Rightarrow x = 0,\ y = 0,\ dy/dx = 1$$



تصویر 25.

اس طرح لوپ کی ترسیم ہو گئی۔

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \frac{1-t^2-t^4+t^6}{(1+t^2)^3} = \frac{(1+t^2)(1-t^2)^2}{(1+t^2)^3} = \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

اب

$$\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1 - \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$= 1 - \frac{4(t^2+1-1)}{(t^2+1)^2} = 1 - \frac{4}{t^2+1} + \frac{4}{(t^2+1)^2}$$

درکار رقبہ $= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1.dt - 2\int_{-1}^{1}\frac{dt}{t^2+1} + 2\int_{-1}^{1}\frac{dt}{(t^2+1)^2}$

$$= 1 - \pi + 2\int_{-1}^{1}\frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

داہنی طرف کا تکملہ حاصل کرنے کے لیے $t = \tan\theta$ رکھیں تو

$$\int_{-1}^{1}\frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\Big|\theta + \sin\theta\cos\theta\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\pi + 1\right\}$$

اس لیے

رقبہ $= 1 - \pi + (\frac{\pi}{2} + 1) = 2 - \frac{\pi}{2}$

نوٹ: دیے ہوئے پیرامیٹری مساوات سے t اسقاط (eliminate) کرنے پر ہم کو منحنی کی کارٹیزی مساوات

$$x(x^2+y^2) = x^2 \quad y^2$$

ملتی ہے۔ اس کی مدد سے بھی منحنی کی ترسیم بہ آسانی ہو سکتی ہے (§ 7·1 کی مثال 5 کی تصویر دیکھیے)

مشقیں

1۔ منحنی

$$x = a(1-t^2),\ y = at(1-t^2), \qquad -1 \leqslant t \leqslant 1$$

کی ترسیم کیجیے اور ثابت کیجیے کہ اِس کے لوپ کا رقبہ $8a^2/15$ ہے۔

2- t کی ہر قیمت کے لیے منحنی

$$x = t - t^3, \; y = 1 - t^4$$

کی ترسیم کیجیے کہ اِس میں بننے والے لوپ کا رقبہ 16/35 ہے۔

3- ثابت کیجیے کہ منحنی

$$x = (t-1)e^{-t}, \; y = tx$$

کا ایک لوپ ہے اور اُس کا رقبہ معلوم کیجیے۔

4- منحنی $x = a \cos^3 t, \; y = b \sin^3 t$ کا رقبہ نکالیے۔

5- منحنی $x = a \sin 2t, \; y = a \sin t$ کی ترسیم کیجیے اور اُس کے ایک لوپ کا رقبہ نکالیے۔

6- منحنی

$$x = a \cos t + b \sin t + c,$$
$$y = a' \cos t + b' \sin t + c'.$$

کا رقبہ نکالیے۔

7- منحنی

$$x = a(3 \cos \theta - \cos^3 \theta)$$
$$y = a(3 \sin \theta - \sin^3 \theta)$$

کی ترسیم کیجیے اور اس کا رقبہ معلوم کیجیے۔

8- منحنی

$$x = a(3 \sin \theta - \sin^3 \theta), \; y = a \cos^3 \theta$$

کا رقبہ معلوم نکالیے۔

9- ثابت کیجیے کہ منحنی

$$x = a \sin 2\theta \, (1 + \cos 2\theta)$$
$$y = a \cos 2\theta (1 - \cos 2\theta)$$

سے گھرا ہوا رقبہ $a^2\pi/2$ ہے۔

10- منحنی

$$x = a(\sin\theta + \tfrac{1}{3}\sin 3\theta).$$
$$y = a(\cos\theta \;\; \tfrac{1}{3}\cos 3\theta)$$

کی ترسیم کیجیے اور ثابت کیجیے کہ اِس کا رقبہ $\frac{3}{8}a^2\pi$ ہے۔

جوابات

3. $1/e$. 4. $3\pi ab/8$. 5. $4a^2/3$. 6. $\pi(ab' - a'b)$.

7. $39a^2\pi/8$. 8. $15a^2\pi/8$.

7.5- معین تکملوں اور رقبوں کا تخمینہ لگانے کے لیے سمسَن کا اصول (Simpson's rule)

رقبہ نکالنے کا جو طریقہ اوپر بتایا گیا ہے اُس کے لیے ضروری ہے کہ

(i) منحنی کی مساوات $y = f(x)$ معلوم ہو

(ii) ایسا فنکشن حاصل کرنا ممکن ہو جس کا تفرقی سر $f(x)$ ہو یعنی دیے ہوئے فنکشن کا غیر معین (indefinite) تکملہ نکالنا ممکن ہو۔

عملاً، منحنی کی ترسیم کچھ محدود تعداد میں الگ الگ نقطوں کی مدد سے کرتے ہیں اِس لیے ہم اُس کی مساوات نہیں جانتے۔ پھر اگرچہ اُس کی مساوات معلوم بھی ہو تو ضروری نہیں کہ درکار غیر معین تکملہ نکالنا ہمیشہ ممکن ہی ہو۔

مثال کے طور پر مان لیجیے

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\, dx$$

کی قیمت درکار ہے۔

چونکہ $\sqrt{\sin x}$ کا غیر معین تکملہ ابتدائی تفاعلوں سے نہیں مل سکتا اِس لیے ہم معین تکملہ کی صحیح قیمت نہیں نکال سکتے. لیکن سمسن کے اصول (Simpson's rule) اور دوسرے اصولوں سے اِس کی قیمت کا تخمینہ حاصل کرنا ممکن ہے۔

یہاں صرف سمسن کے اصول پر غور کریں گے۔

لیما (Lemma) مکافی

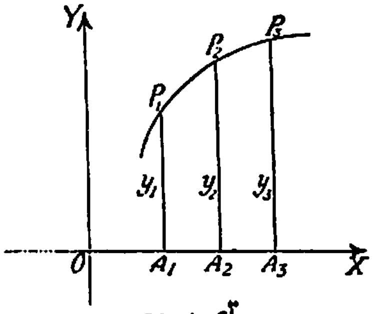
$$y = l+mx+nx^2$$

پر غور کیجیے اور اُس پر تین نقطے P_1, P_2 اور P_3 ایسے لیجیے کہ P_1 اور P_3 پر کے عرض P_1A_1 اور P_3A_3 , P_2 کے عرض P_2A_2 سے برابر دوری پر ہوں۔

مان لیجیے کہ $A_1A_2 = A_2A_3 = h$

ساتھ ہی مان لیجیے کہ $OA_2 = a$ تاکہ $OA_1 = a-h$ اور $OA_3 = a+h$

اب قطع $P_1A_1A_3P_3P_1$ کا رقبہ



تصویر 26

$$= \int_{a-h}^{a+h} (l+mx+nx^2)\, dx$$

$$= \left| lx + \frac{m}{2}x^2 + \frac{n}{3}x^3 \right|_{a-h}^{a+h}$$

$$(i) \ldots\ldots = 2h\left(l+ma+na^2+\tfrac{1}{3}nh^2\right)$$

اِس رقبہ کو ہم P_1, P_2 اور P_3 کے عرضوں y_1, y_2 اور y_3 کی ارقام میں رکھیں گے۔ ہم پاتے ہیں

$$(ii) \ldots\ldots\ldots\ldots\ y_1 = P_1A_1 = l+m(a-h)+n(a-h)^2,$$

$$(iii) \ldots\ldots\ldots\ y_2 = P_2A_2 = l+ma+na^2,$$

$$(iv) \ldots\ldots\ldots\ y_3 = P_3A_3 = l+m(a+h)+n(a+h)^2.$$

$$\therefore \quad y_1+y_3 = 2(l+ma+na^2+nh^2) = 2(y_2+nh^2)$$

$$(v) \ldots\ldots \Rightarrow \frac{y_1+y_3-2y_2}{2} = nh^2$$

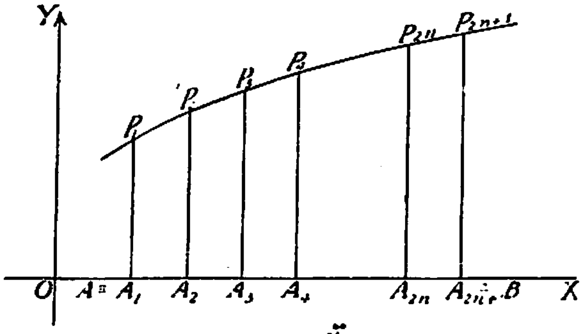
اب (i), (iii) اور (v) سے ہم دیکھتے ہیں کہ قطع کا رقبہ

$$= 2h\left[y_2 + \frac{y_1 + y_3 - 2y_2}{6}\right] = \frac{1}{3}h\,(y_1 + y_3 + 4y_2)$$

سمسن کا اصول حاصل کرنا

اب قطع $P_1A_1BP_{2n+1}$ پر غور کیجیے جو کہ منحنی $y = f(x)$ ، X-محور اور دو عرضوں P_1A اور $P_{2n+1}B$ سے گھرا ہوا ہے۔

ہم وقفہ AB کو $2n$ برابر حصوں میں بانٹتے ہیں جہاں کہ n ایک کافی بڑا مثبت کامل عدد ہے۔ مان لیجیے کہ AB کے اِن نقاط تقسیم سے متعلق منحنی پر نقطے P_1 ، P_2 ، ..... P_{2n+1} ہیں۔ ہم منحنی کے قوس $P_1P_2P_3$ کے بجائے اِن نقطوں سے گزرنے والا



تصویر 27

مکافی لے لیتے ہیں۔ چونکہ یہ نقطے ایک دوسرے سے بہت قریب ہیں اِس لیے ہم مان سکتے ہیں کہ دیے ہوئے منحنی کے قوس $P_1\ P_2\ P_3$ سے محدود (bounded) رقبہ تقریباً اُس رقبہ کے برابر ہے جو کہ P_1 ، P_2 اور P_3 سے ہو کر جانے والے مکافیہ قوس سے محدود ہے۔ قوسوں $P_3P_4P_5$ ، $P_5P_6P_7$ ... $P_{2n-1}P_{2n}P_{2n+1}$ کی جگہ بھی اسی طرح کے مکافیہ قوس لینے ہوتے ہیں۔

اوپر کے لیما کے نتیجے کا استعمال ترتیب وار عرضوں y_1, y_3 ؛ y_3, y_5 ؛ ...

y_{2n-1}، y_{2n+1} کے درمیان والے رقبوں پر کرنے پر کُل رقبہ کی قیمت کا تخمینہ ....تو

$$= \frac{1}{3}h[(y_1+4y_2+y_3)+(y_3+4y_4+y_5)+(y_5+4y_6+y_7)+\ldots\ldots$$
$$+(y_{2n-1}+4y_{2n}+y_{2n+1})]$$
$$= \frac{1}{3}h[(y_1+y_{2n+1})+2(y_3+y_5+\ldots\ldots+y_{2n-1})+4(y_2+y_4+\ldots+y_{2n})].$$

آتا ہے۔ یہ سمسن کا اصول ہے جسے یوں بتا سکتے ہیں :۔

کسی رقبہ کی (یا کسی معین تکملہ) کی قیمت کا تخمینہ لگانے کے لیے اُس رقبہ کو برابر دوری پر عرض کھینچ کر جفت تعداد پٹیوں میں بانٹیے اور دو پڑوسی عرضوں کے درمیان فاصلے کی تہائی کو اُس جوڑ سے ضرب دیجیے جو کہ ذیل کا جوڑ ہو :۔

(i) پہلا اور آخری عرض

(ii) اور سبھی طاق عرضوں کا دُگنا

(iii) اور سبھی جفت عرضوں کا چار گُنا

مثال

1۔ معین تکملہ

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}$$

کی قیمت سمسن اصول کی مدد سے گیارہ معین لے کر نکالیے اور اس طرح log 2 کی قیمت کا تخمینہ لگائیے۔

ہم پاتے ہیں

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \log 2$$

ہم وقفہ [1, 2] کو دس برابر حصّوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

مان لیجیے کہ

$$f(x) = 1/x$$

ہم پاتے ہیں

$y_1 = f(1{\cdot}0) = 1{\cdot}00000$; $y_2 = f(1{\cdot}1) \doteq {\cdot}90909$,

$y_3 = f(1{\cdot}2) = {\cdot}83333$; $y_4 = f(1{\cdot}3) = {\cdot}76923$,

$y_5 = f(1{\cdot}4) = {\cdot}71429$; $y_6 = f(1{\cdot}5) = {\cdot}66667$,

$y_7 = f(1{\cdot}6) = 62500$; $y_8 = f(1{\cdot}7) = {\cdot}58824$,

$y_9 = f(1{\cdot}8) = 55556$; $y_{10} = f(1{\cdot}9) = {\cdot}52632$,

$y_{11} = f(2{\cdot}0) = {\cdot}50000$;

$1{\cdot}50000 = S_1$ — پہلے اور آخری معینوں کا جوڑ

$2{\cdot}72818 = S_2$ = سبھی طاق معینوں کا جوڑ

$3{\cdot}45955 = S_3$ = سبھی جفت معینوں کا جوڑ

اس لیے

$$\log 2 = \tfrac{1}{30}(S_1+2S_2+4S_3)$$

$$= \tfrac{1}{30}(20{\cdot}79456) = {\cdot}69315$$

در اصل لوگارتمی فہرست دیکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$\log 2 = {\cdot}693147$$

مشقیں

1۔ اُس منحنی کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے لیے 2 اِنچ کی دوریوں پر عرضوں کی قیمتیں ترتیب وار

3·8, 3·5, 3·2, 2·8, 3·3, 3·6, 4

اِنچ ہوں۔

2۔ ایک منحنی نقطوں

(1, 2), (1·5, 2·4), (2, 2·7), (2·5, 2·8), (3, 3), (3·5, 2·6), (4, 2·1)

سے ہوکر گزرتا ہے۔ اُسی منحنی، x-محور اور عرضوں $x = 1$، $x = 4$ کے درمیان گھرے ہوئے رقبہ کا تخمینہ لگائیے۔

3۔ ایک ریل گاڑی جو رکی تھی چلنا شروع کرتی ہے اور مختلف اوقات پر اُس کی رفتار ذیل کی جدول میں دی ہوئی ہے۔ وقت تب سے گنا گیا جب سے گاڑی چلنا شروع ہوئی اور رفتار میل فی گھنٹہ میں ہے:۔

منٹ:	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
رفتار:	10	18	25	29	32	20	11	5	2	0

20 منٹ میں گاڑی نے جو فاصلہ طے کیا اُس کا تخمینہ لگائیے۔

4۔ ایک ندی کی چوڑائی 80 فٹ ہے۔ اُس کے ایک کنارے سے مختلف فاصلوں x پر ندی کی گہرائیاں d یہ ہیں:۔

x :	0	10	20	30	40	50	60	70	80
d :	0	4	7	9	12	15	14	8	3

متقاطع سیکشن (cross-section) کے رقبہ کا تخمینہ لگائیے۔

5۔ نو عرضوں کو لیتے ہوئے سمسن کے اصول سے

$$\int_2^{10} \frac{dx}{1+x}$$

کی قیمت کا تخمینہ لگائیے۔

6۔ سمسن کے اصول سے، $h = 0·1$ لے کر π کی قیمت کا تخمینہ فارمولے

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

کی مدد سے حاصل کیجیے۔

7- پانچ عرضوں کو لے کر تکملہ

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

سے π کی قیمت کا تخمینہ لگائیے۔

8- چار برابر کے وقفے لے کر $\int_4^8 \frac{dx}{x}$ کی قیمت نکالیے۔

9- تکمل کے لیے سمسن کا اصول بتائیے۔ اِس اصول سے، پانچ عرضوں کی مدد سے تکملہ

$$\int_1^3 \sqrt{(x-1/x)}\, dx$$

کی قیمت دو اعشاریہ تک صحیح نکالیے۔

10- یہ دیا ہوا ہے کہ

$$e^0 = 1,\ e^1 = 2{\cdot}72,\ e^2 = 7{\cdot}39,\ e^3 = 20{\cdot}09,\ e^4 = 54{\cdot}60$$

اب سمسن کے اصول کی جانچ کے لیے تکملہ

$$\int_0^4 e^x\, dx$$

کی قیمت کا تخمینہ لگائیے اور اس کی بالکل صحیح قیمت سے اس کا موازنہ کیجیے (compare)۔

11- اگر x کی قیمتیں a, $a+h$, $a+2h$, $a+3h$ لے کر ایک تیسری ڈگری کے کثیر رُکنی (polynomial) y کی قیمتوں کو ترتیب وار y_1، y_2، y_3 اور y_4 سے ظاہر کریں تو ثابت کیجیے کہ

$$\int_a^{a+3h} y\, dx = \tfrac{3}{8}h\,(y_1+3y_2+3y_3+y_4)$$

اِس سے تکملہ

$$\int_0^{0{\cdot}3} (1-8x^3)^{1/2}\, dx.$$

کی قیمت کا تخمینہ نکالیے۔

12۔ برابر دوری پر تین عرضوں کے لیے سمسن کا اصول حاصل کیجیے۔ یعنی

$$\frac{1}{3}h(y_1+4y_2+y_3)$$

اگر درمیانی عرض سے کنارے والے عرضوں y_1 اور y_3 کی دوریاں ترتیب وار h اور k ہوتیں تو ثابت کیجیے کہ فارمولا

$$\frac{1}{6}(h+k)(y_1+4y_2+y_3)+\frac{1}{6}(h^2-k^2)\left(\frac{y_1-y_2}{h}+\frac{y_3-y_2}{k}\right)$$ ہو جاتا۔

جوابات

1. 4·03 مربع انچ	2. 7·78	3. 232/45 میل
4. 710 مربع فٹ	5. 1·299	8. ·693.
9. 0·84	10. 53·87, 54·60	11. 0·29159.

باب 7 پر مشقیں

1۔ ایک سائیکلائڈ کے کسی نقطہ کے مختصات (co-ordinates)

$$x = a(\theta+\sin\theta),\ y = a(1+\cos\theta)$$

ہیں اور $\theta = -\frac{\pi}{2}$ اور $\theta = \frac{\pi}{2}$ والے نقطے ترتیب وار P اور Q ہیں۔ سائیکلائڈ کے وتر PQ اور مبدا (origin) سے P, Q کو ملانے والے خطوط کے درمیان گھرا ہوا رقبہ معلوم کیجیے۔

2۔ منحنی $r = a(\theta+\sin\theta)$ اور ابتدائی خط سے 90 ڈگری زاویہ بنانے والے خط کے درمیان گھرے ہوئے کمترین (smallest) قطع کا رقبہ نکالیے۔

3۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $x^4-2xya^2+a^2y^2=0$ کے ہر لوپ کا رقبہ $\frac{2}{3}a^2$ ہے۔

4۔ منحنی $r\cos\theta = a\sin 3\theta$ کی ترسیم کیجیے اور ثابت کیجیے کہ اس کے ایک لوپ

کا رقبہ $\frac{3}{2}a^2(9\sqrt{3}-4\pi)$ ہے۔

5۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $r = a(\sec\theta+\tan\theta)$ اور اُس کے لامتناہی مماس کے درمیان کا رقبہ $(\pi/2+2)a^2$ ہے۔ یہ بھی ثابت کیجیے کہ اِس کے لوپ کا رقبہ $(2-\pi/2)a^2$ ہے۔

6۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $r = a(1+2\sin\frac{1}{2}\theta)$ کے تین لوپ ہیں اور ہر لوپ کا رقبہ نکالیے۔

7۔ مکافی $2a = r(1+\cos\theta)$ کارڈائڈ $r = 2a(1+\cos\theta)$ کو جن دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے اُن کے رقبوں کا تناسب نکالیے۔

8۔ ثابت کیجیے کہ منحنی

$$x^4-3ax^3+a^2(2x^2+y^2) = 0$$

کا رقبہ $\frac{5}{8}\pi a^2$ ہے۔

9۔ ثابت کیجیے کہ منحنی

$$4y^2+x^2(x^2-6x+8) = 0$$

کا رقبہ $3\pi/2$ ہے۔

10۔ منحنی $ay^2 = x(x-a)^2$ کے لوپ کو خط $x+2y = a$ جن دو حصوں میں بانٹتا ہے اُن کے رقبوں کا تناسب نکالیے۔

11۔ مکافی $x^2 = 4ay+4a^2$ اور خط $3x+4y=0$ کے درمیان کا رقبہ نکالیے۔

12۔ پہلے ربع میں منحنیوں

$$r = 2a\cos\theta \text{ اور } r = a\sin\theta\ ,\ r = a(1+\cos\theta)$$

کے درمیان گھرا ہوا رقبہ نکالیے۔

13۔ لیمنسکیٹ $r^2 = a^2\cos 2\theta$ کا قطب O ہے اور اُس کے دونوں لوپوں کا مشترک مماس (common tangent) PQ ہے۔ خطوط OP, PQ اور OQ کے درمیان گھرا ہوا رقبہ معلوم کیجیے۔

14- یہ دکھائیے کہ علیپسوں

$$a^2x^2+b^2y^2 = 1,\ b^2x^2+a^2y^2 = 1,\ (0 < a < b)$$

میں مشترک قطعہ کا رقبہ $4/ab \tan^{-1}(a/b)$ ہے۔

15- ثابت کیجیے کہ منحنی

$$r = ae^{\theta} \sin \theta$$

کے لوپوں کے رقبے ترتیب وار ایک جیومٹریائی سلسلہ بناتے ہیں جس کا مشترک تناسب (common ratio) $e^{2\pi}$ ہے۔

16- ثابت کیجیے کہ منحنیوں

$$r = a \sin \theta,\ r = a \sin 2\theta$$

میں مشترک قطعہ کا رقبہ $(4\pi-3\sqrt{3})a^2/16$ ہے۔

17- منحنی $r = a \log \theta$ کی ترسیم کیجیے جب کہ θ صفر سے 1 تک بڑھتا ہو۔ ثابت کیجیے کہ اس کے اور لامتناہی مماس کے درمیان کے قطعہ کا رقبہ a^2 ہوگا۔

18- ثابت کیجیے کہ ٹریکٹرکس (*tractrix*)

$$x = a\left(\cos t+\tfrac{1}{2} \log \tan^2 \tfrac{1}{2}t\right),\ y = a \sin t$$

کی چاروں لامتناہی شاخوں کے درمیان کا کُل رقبہ πa^2 ہوتا ہے۔

19- ثابت کیجیے کہ کسی بند منحنی

$$f\left(\frac{x}{m},\ \frac{y}{n}\right) = 0.$$

کا رقبہ منحنی $f(x, y) = 0$ کے رقبے کا mn گنا ہوتا ہے۔

اس نتیجہ کی مدد سے ذیل کے منحنیوں کے رقبے نکالو:۔

(i) $(m^2x^2+n^2y^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2.$

(ii) $(m^2x^2+n^2y^2)^5 = (a^2x^2+b^2y^2)^2$

(iii) $(x^2+2y^2)^3 = axy^4.$

جوابات

1. $(\pi+3)\, a^2$.

2. $a^2(\pi^3+6\pi+48)/48$

6. $a^2(3\pi+8)$, $\frac{a^2}{2}(3\pi-8)$, $\frac{a^2}{2}(3\pi-8)$

7. $(9\pi+16)/(9\pi-16)$.

10. $53a^2/960$, $153a^2/320$.

11. $125a^2/24$.

12. $a^2[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\pi-\frac{3}{4}\tan^{-1} 2]$.

13. $a^2(3\sqrt{3}-4)/8$.

19. (*i*) $(a^2n^3+b^2m^3)\pi/2m^3n^3$.

(*ii*) $4(a^2n^3+b^2m^3)/3m^4n^4$.

(*iii*) $7\sqrt{2}\pi a^2/2^{13}$.

8

قوسی اصلاح (Rectification)

ہموار منحنیوں کی لمبائیاں

8·1۔ تمہید (Introduction) اِس باب میں ہم ایسے ہموار منحنیوں کے قوسوں (arcs) کی لمبائیاں نکالنا سیکھیں گے جن کی کارٹیزی (Cartesian) یا قطبی (Polar) مساواتیں معلوم ہوں۔ اِس عمل کو قوسی اصلاح (Rectification) کہتے ہیں۔

پڑھنے والوں کو یہ معلوم ہے کہ کسی رقبہ کے لیے فارمولا حاصل کرنے کی غرض سے ہم نے پہلے ایسا فارمولا ثابت کیا تھا جس سے رقبہ تفاعل (area function) کا مشتق (Derivative) مل جائے۔ مثلاً ہم نے دکھایا تھا کہ

$$dA/dx = y \text{ اور } dA/d\theta = r^2/2$$

منحنیوں کی لمبائیاں معلوم کرنے کے لیے بھی ایسا ہی کرنا ہوگا۔

قوسوں کے تفرقی سروں کے فارمولے مصنف کی کتاب Differential Calculus میں ثابت کیے گئے ہیں۔ یہاں ہم صرف اُن کا حوالہ ہی دیں گے، دوبارہ ثابت نہ کریں گے۔

8·2۔ کارٹیزی مساواتیں y = f(x)

منحنی $y = f(x)$ پر فصلہ (abscissae) a اور b والے دو نقطوں کے درمیان

توس کی لمبائی

$$\int_a^b \sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}\,dx = \int_a^b \sqrt{[1+f'^2(x)]}\,dx$$

ہوتی ہے۔

مان لیجیے منحنی $y = f(x)$ پر A اور B دو ایسے نقطے ہیں جن کے فصلے ترتیب وار a اور b ہیں۔

اگر کسی ثابت نقطہ (fixed point) A اور متغیر نقطہ (variable point) P کے درمیان کے قوس کی لمبائی s کہیں، جو کہ P کے فصلہ x کا تفاعل ہوگا، تو ہم پاتے ہیں

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}.$$

$$\int_a^b \sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}dx = \int_a^b \frac{ds}{dx}dx = \Big| s \Big|_a^b$$

$= (x = b$ پر s کی قیمت$) - (x = a$ پر s کی قیمت$) =$

$= ($قوس $AB) - 0 =$ قوس AB

اس سے نتیجہ ثابت ہوگیا۔

8.3۔ قوسوں کی لمبائیوں کے دوسرے فارمولے۔ مصنف کی کتاب Differential Calculus میں ذیل فارمولے حاصل کیے گئے تھے۔

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]};$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]}.$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]};$$

ان سے ہمیں قوسوں کی لمبائیاں نکالنے کے ذیل فارمولے ملتے ہیں۔

8.31۔ کارٹیزی مساواتیں $x = f(y)$: منحنی $x = f(y)$ پر عرض c اور d والے

نقطوں کے درمیان قوس کی لمبائی

$$\int_c^d \sqrt{\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]}\,dy = \int_c^d \sqrt{[1+f'^2(y)]}\,dy.$$

ہوتی ہے۔

8.32- پیرامیٹری کارٹیزی $x = f(t), y = \varphi(t)$. منحنی $x = f(t), y = \varphi(t)$
کے پیرامیٹری قیمتوں α اور β والے نقطوں کے درمیان قوس کی لمبائی

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]}\,d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'^2(t)+\varphi'^2(t)]}\,dt.$$

ہوتی ہے۔

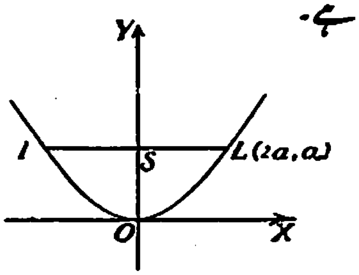
8.33 قطبی مساواتیں $r = f(\theta)$ منحنی $r = f(\theta)$ کے سمتیہ زاویوں α اور
β. والے نقطوں کے درمیان قوس کی لمبائی

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]}\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f^2(\theta)+f'^2(\theta)]}\,d\theta.$$

ہوتی ہے۔

مثالیں

1۔ مکافی $x^2 = 4ay$ کے راس (vertex) سے وتر خاص (latus rectum) کے
قوس کی لمبائی نکالو۔ وتر خاص کے سرے L کا فصلہ $2a$ ہے۔



تصویر 2B

اب

$$y = \frac{x^2}{4a} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2a}.$$

اس لیے درکار لمبائی

$$= \int_0^{2a} \sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}\,dx$$

$$= \frac{1}{2a}\int_0^{2a} \sqrt{(4a^2+x^2)}dx$$

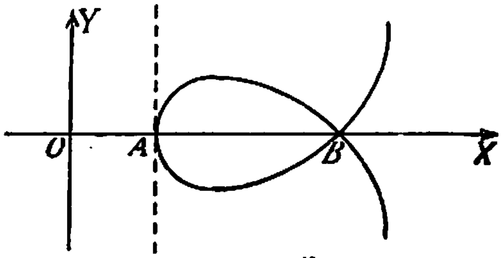
$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{x\sqrt{(x^2+4a^2)}}{2} + 2a^2 \sinh^{-1}\frac{x}{2a}\right]_0^{2a}$$

$$= \frac{1}{2a}[2\sqrt{2}a^2+2a^2 \sinh^{-1} 1]$$

$$= a[\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})],$$

کیونکہ $\sinh^{-1}x = \log[x+\sqrt{(1+x^2)}]$

2۔ منحنی $9ay^2 = (x-2a)(x-5a)^2$ کے لوپ کا محیط (perimeter) نکالیے۔
اِس کا لوپ $x = 2a$ اور $x = 5a$ کے درمیان ہے منحنی x-محور کے گرد متشاکل ہے لہٰذا لوپ کا محیط x-محور کے اوپر والے لوپ کے حصہ کا دُگنا ہے۔



تصویر 29

x-محور کے اوپر لوپ کے کسی بھی نقطہ کے لیے

$$y = -\frac{(x-5a)\sqrt{(x-2a)}}{3\sqrt{a}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{(x-2a)}+\dfrac{x-5a}{2\sqrt{(x-2a)}}}{3\sqrt{a}} = -\frac{x-3a}{2\sqrt{a}\sqrt{(x-2a)}}$$

اِس لیے درکار محیط

$$= 2\int_{2a}^{5a}\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}dx$$

$$= 2\int_{2a}^{5a}\sqrt{\left[1+\frac{(x-3a)^2}{4a(x-2a)}\right]}dx$$

$$= 2\int_{2a}^{5a}\frac{x-a}{2\sqrt{a}\sqrt{(x-2a)}}\,dx$$

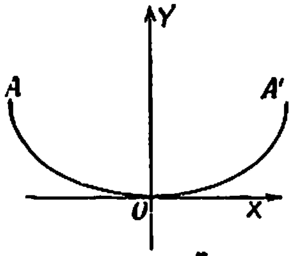
$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{2a}^{5a}\frac{x-2a+a}{\sqrt{(x-2a)}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\left|\frac{2}{3}(x-2a)^{3/2}+2a\sqrt{(x-2a)}\right|_{2a}^{5a}$$

$$= 4\sqrt{3a}.$$

3۔ منحنی $x = a(\theta+\sin\theta), y = a(1-\cos\theta)$ کی قوسی اصلاح کیجیے۔

کسی نقطہ کے منحنی کے ایک سرے A' سے دوسرے سرے A تک چلنے پر θ، $-\pi$ سے π تک بڑھتا ہے۔ راس O کے لیے θ صفر ہے۔ چونکہ قوس OY کے گرد متشاکل ہے اس لیے



تصویر 30

$$\text{قوس } AOA' = 2\cdot(\text{قوس } OA)$$

ہم پاتے ہیں

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1+\cos\theta), \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta.$$

$$\therefore \sqrt{\left[\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right]} = \sqrt{[2a^2(1+\cos\theta)]}$$

$$= \sqrt{\left(4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)} = 2a\cos\frac{\theta}{2}$$

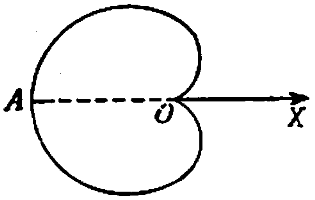
اس لیے درکار قوس

$$= 2\int_0^{\pi} 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2\left|4a\sin\frac{\theta}{2}\right|_0^{\pi} = 8a.$$

نوٹ۔ یہاں ہم $\sqrt{[4a^2\cos^2(\theta/2)]} = 2a\cos(\theta/2)$ لیتے ہیں نہ کہ $-2a\cos(\theta/2)$

کیونکہ θ کے صفر سے π تک بڑھنے پر $\cos(\theta/2)$ مثبت رہتا ہے)

4۔ کارڈائڈ $r = a(1-\cos\theta)$ کا محیط نکالیے



تصویر 31

منحنی ابتدائی خط کے گرد متشاکل ہے اِس لیے اُس کا محیط اُس قوس کی لمبائی کا دُگنا ہے جو ابتدائی خط کے اوپر ہے۔

اب

$$\frac{dr}{d\theta} = a\sin\theta$$

$$\therefore \sqrt{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]} = \sqrt{[a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta]}$$

$$= \sqrt{[2a^2(1-\cos\theta)]} = 2a\sin(\theta/2)$$

اِس لیے درکار محیط

$$= 2\int_0^\pi 2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta = 2\left|-4a\cos\frac{\theta}{2}\right|_0^\pi = 8a.$$

مشقیں

1۔ منحنی $y = \log\sec x$ کے $x = 0$ سے $x = \pi/3$ تک کے درمیان والے قوس کی لمبائی نکالیے۔

2۔ منحنی $y = \log\tanh(x/2)$ کے $x = 1$ اور $x = 2$ کے درمیان والے قوس کی لمبائی نکالیے۔

3۔ مکافی $y^2 = 4ax$ کے اُس قوس کی لمبائی نکالیے جوکہ اُس کے وترِ خاص سے راس کی طرف کٹتا ہے۔

4۔ زنجیرہ $y = c\cosh(x/c)$ کے راس $(0, c)$ سے کسی نقطہ (x, y) تک کے قوس کی لمبائی نکالیے۔

5۔ ثابت کیجیے کہ منحنی

$$x = a \sin 2\theta\,(1+\cos 2\theta),$$
$$y = a \cos 2\theta\,(1-\cos 2\theta),$$

کے مبدا (0, 0) سے نقطہ (x, y) تک کے قوس کی لمبائی $\frac{4}{3}a \sin 3\theta$. ہے۔

6 (a) ۔ اسٹرائڈ

$$x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}$$
$$x = a \cos^3\theta,\ y = a \sin^3\theta \text{ یعنی}$$

کی کُل لمبائی معلوم کیجیے۔

(b) یہ ثابت کیجیے کہ منحنی $x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}$ کے نقطہ $(0, a)$ سے (x, y) تک کی لمبائی s ذیل ہے:۔

$$s = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{ax^2}$$

7۔ منحنی

$$x = a\,(\cos\theta+\theta\sin\theta),\ y = a\,(\sin\theta-\theta\cos\theta)$$

کے $\theta = 0$ اور $\theta = \alpha$ والے نقطوں کے درمیان قوس کی لمبائی نکالیے۔

8۔ ثابت کیجیے کہ $\theta = 2\pi/3$ والا نقطہ منحنی $r = a(1-\cos\theta)$ کے اوپری حصہ کے قوس کو دو برابر حصوں میں بانٹتا ہے۔

9 - $\theta = 0$ پر $s = 0$ لیتے ہوئے منحنی $r = ae^{\theta\cot\alpha}$ کے کسی قوس کی لمبائی نکالیے۔

10۔ منحنی $r = a\cos^3(\theta/3)$ کی لمبائی نکالیے۔

11۔ منحنی $r = a\,(\theta^2-1)$ کے لوپ کی لمبائی نکالیے۔

12۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $3ay^2 = x\,(x-a)^2$ کے لوپ کی لمبائی $4a/\sqrt{3}$ ہے۔

13- ثابت کیجیے کہ منحنی $x^2(a^2-x^2) = 8a^2y^2$ کی کُل لمبائی $\pi a\sqrt{2}$ ہے۔

14- منحنی $x = t^2 \cos t, y = t^2 \sin t$ کے مبدا (origin) سے کسی نقطہ t تک کے قوس کی لمبائی نکالیے۔

15- منحنی $y = -\log (1-x^2)$ کی ترسیم کیجیے اور ثابت کیجیے کہ مبدا سے فصلہ x والے نقطہ تک کے قوس کی لمبائی

$$\log [(1+x)/(1-x)]-x$$ ہے۔

16- منحنی $y = \log\left[(e^x-1)/(e^x+1)\right]$ کے $x = 1$ سے $x = 2$ تک کے قوس کی لمبائی نکالیے۔

17- منحنی $y = x(2-x)$ کے $x = 0$ سے $x = 2$ تک کے قوس کی لمبائی نکالیے۔

18- ثابت کیجیے کہ منحنی $x = t^2, y = t-\frac{1}{3}t^3$ کے لوپ کی لمبائی $4\sqrt{3}$ ہے۔

19- ثابت کیجیے کہ زائدکمانی (hyperbolic spiral) $r\theta = a$ کے $r = a$ اور $r = 2a$ والے نقطوں کے درمیان قوس کی لمبائی

$$a\left\{\sqrt{5}-\sqrt{2}+\log \frac{2+\sqrt{8}}{1+\sqrt{5}}\right\}$$ ہے۔

20- مکافی $l/r = 1+\cos\theta$ کے وترِ خاص سے کٹے ہوئے قوس کی لمبائی نکالیے۔

21- ثابت کیجیے کہ منحنی

$$x = a(3\sin\theta-\sin^3\theta),\ y = a\cos^3\theta$$

کے نقطہ $(0, a)$ سے نقطہ (x, y) تک کے قوس کی لمبائی $\frac{3}{2}a(\theta+\sin\theta\cos\theta)$ ہے۔

22- منحنی

$$x = e^\theta \sin\theta,\ y = e^\theta \cos\theta$$

کے $\theta = 0$ سے $\theta = \pi/2$ تک کے قوس کی لمبائی نکالیے۔

23- ثابت کیجیے کہ منحنی

$$x = e^{\theta}\left(\sin \theta/2+2 \cos \theta/2\right),\ y = e^{\theta}\left(\cos\theta/2-2 \sin \theta/2\right)$$

کے $\theta = 0$ سے $\theta = \pi$ تک کے قوس کی لمبائی $5\,(e^{\pi}-1)/2$ ہے۔

24۔ اگر منحنی

$$x = a\,(\theta+\sin \theta \cos \theta),\ y = a(1+\sin \theta)^2$$

کے $\theta = -\pi/2$ سے نقطہ θ تک کے قوس کی لمبائی 's' ہو تو ثابت کیجیے کہ s^4، y^3 کی طرح بدلتا ہے۔

25۔ منحنی

$$x = a(\theta-\sin \theta),\ y = a\,(1-\cos \theta)$$

کی ترسیم کیجیے جب کہ θ صفر سے 2π تک بڑھتا ہو اور ثابت کیجیے کہ نقطہ $\theta = \frac{2}{3}\pi$ سے $\theta = $ ... 1 اور 3 کے تناسب میں تقسیم کرتا ہے۔

جوابات

1. $\log(2+\sqrt{3})$.
2. $\log[(e^2+1)/e]$.
3. $2a[\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})]$.
4. $c \sinh(x/c)$.
6. $6a$.
7. $\frac{1}{2}a\alpha^2$.
9. $a \sec\alpha\,(e^{\theta \cot\alpha}-1)$.
10. $\frac{8}{3}\,a\pi$.
11. $8a/3$.
14. $\frac{1}{3}[(4+t^2)^{3/2}-8]$.
16. $\log(e+e^{-1})$.
17. $\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{5})+\sqrt{5}$.
20. $l[\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})]$.
22. $\sqrt{2}(e^{\pi/2}-1)$.

8.4۔ منحنی کی نجی مساوات (Intrinsic Equation)

تعریف: کسی منحنی کے ایک ثابت نقطہ A (fixed point) سے ایک متغیر نقطہ P (variable point) تک کے قوس کی لمبائی کو اگر s کہیں اور A اور P پر کھینچے گئے

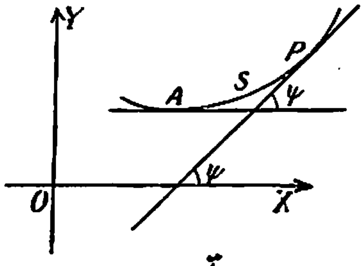
مماسوں (tangents) کے درمیان زاویہ کو اگر ψ کہیں، تو s اور ψ کے درمیان رشتہ (relation) کو اُس منحنی کی **نجی مساوات** (Intrinsic Equation) کہتے ہیں۔
s اور ψ **نجی مختصات** (intrinsic co-ordinates) کہلاتے ہیں۔

"نجی" نام اس لیے دیا گیا ہے کہ کسی بھی نقطہ کے لیے s اور ψ اُس منحنی کی شکل پر منحصر ہیں نہ کہ اس پر کہ ہموار سطح میں منحنی کس مقام پر ہے۔ لہٰذا ان کا منحنی سے ذاتی (inherent) رشتہ ہے۔

اگر منحنی ہموار سطح میں اپنی جگہ بدل دے تب بھی منحنی کے کسی نقطہ کے نجی مختصات نہیں بدلتے۔ کارٹیزی یا قطبی مختصات میں یہ خوبی نہیں۔

8.41 کارٹیزی مساوات سے نجی مساوات حاصل کرنا

مان لیجیے $y = f(x)$ کسی دیے ہوئے منحنی کی کارٹیزی مساوات ہے۔



تصویر 32

ہم مان لیتے ہیں کہ ثابت نقطہ A کا فصلہ a ہے اور A پر کھینچا گیا مماس x - محور کے متوازی ہے۔ مان لیجیے کہ $P(x, y)$ منحنی پر کوئی متغیر نقطہ ہے اور مان لیجیے کہ قوس $AP = s$. مان لیجیے کہ P پر کھینچا گیا مماس x - محور سے زاویہ ψ بناتا ہے۔ ہم پاتے ہیں

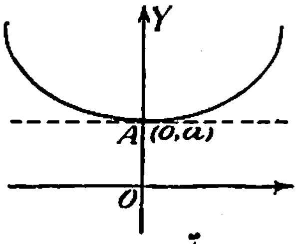
$$(i) \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; s = \int_a^x \sqrt{[1 + f'^2(x)]}\, dx,$$

$$(ii) \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; \tan\psi = f'(x).$$

اب (i) اور (ii) سے x اسقاط (Eliminate) کرنے پر درکار نجی مساوات مل جاتی ہے۔

مثالیں

1۔ راس (vertex) $(0, a)$ کو ثابت نقطہ لیتے ہوئے زنجیرہ $y = a \cosh (x/a)$ کی نجی مساوات حاصل کیجیے



تصویر 33

نقطہ $A = (0, a)$ پر مماس X ۔محور کے متوازی ہے۔

ہم پاتے ہیں

$$s = \int_0^x \sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}dx$$

$$= \int_0^x \cosh \frac{x}{a} dx$$

$$(i) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad = \left| a \sinh \frac{x}{a} \right|_0^x = a \sinh \frac{x}{a}$$

ساتھ ہی

$$(ii) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \tan \psi = \frac{dy}{dx} = \sinh \frac{x}{a}$$

اب (i) اور (ii) سے ہم پاتے ہیں

$$s = a \tan \psi$$

جو کہ دیے ہوئے منحنی کی نجی مساوات ہے۔

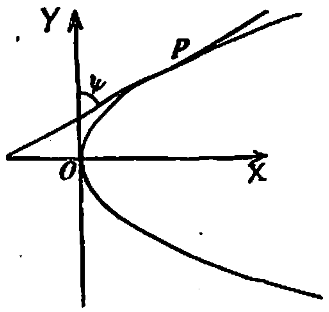
2۔ مبدا (origin) کو ثابت نقطہ لیتے ہوئے مکافی $y^2 = 4ax$ کی نجی مساوات نکالو۔

مان لیجیے $P(x, y)$ منحنی پر کوئی نقطہ ہے۔ Y ۔محور O پر مماس ہے۔ مان لیجیے

توس $s = OP$

دی ہوئی مساوات سے ہم پاتے ہیں

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$$



34

$$(i)\ldots \quad \therefore \tan\psi = \frac{dx}{dy} = \frac{y}{2a}$$

جہاں ψ وہ زاویہ ہے جو کہ Y ۔محور اور کسی نقطہ P پر مماس کے درمیان بنتا ہے

ساتھ ہی،

$$s = \int_0^y \sqrt{\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]}dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^y \sqrt{(4a^2+y^2)}\, dy$$

$$(ii)\ldots\ldots = \frac{1}{2a}\left[\frac{y\sqrt{(4a^2+y^2)}}{2} + \frac{4a}{2}\log\frac{\{y+\sqrt{(y^2+4a^2)}\}}{2a}\right]$$

اب (i) اور (ii) سے y اسقاط کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$s = a\,[\tan\psi\sec\psi + \log(\tan\psi + \sec\psi)],$$

جو کہ درکار نجی مساوات ہے۔

3 ۔ مبدا کو ثابت نقطہ لیتے ہوئے سائیکلائڈ

$$x = a(\theta + \sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta)$$

کی نجی مساوات حاصل کیجیے (تصویر 30 دیکھیے)

ثابت نقطہ O پر مماس X ۔محور ہے۔ مان لیجیے P (θ) سائیکلائڈ پر کوئی متغیر نقطہ ہے۔ ہم پاتے ہیں

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1+\cos\theta),\ \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta.$$

$$\therefore \tan\psi = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

$$(i)\ \ldots\ldots\ldots \Rightarrow \quad \psi = \frac{\theta}{2}.$$

ساتھ ہی

$$s = \int_0^\theta \sqrt{\left[\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right]}\, d\theta$$

$$= 2a\int_0^\theta \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$(ii) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots = 4a \left| \sin\frac{\theta}{2}\right|_0^\theta = 4a \sin\frac{\theta}{2}$$

اب (i) اور (ii) سے ہم پاتے ہیں۔

$$s = 4a \sin\psi$$

جو کہ سائیکلائڈ کی درکار نجی مساوات ہے۔

مشقیں

1۔ ثابت کیجیے کہ نصف۔ کعبی (semi-cubic) مکافی

$$ay^2 = x^3$$

کی نجی مساوات، نوک (cusp) کو ثابت نقطہ لینے پر

$$27s = 8a(\sec^3\psi - 1)$$

ہوتی ہے۔

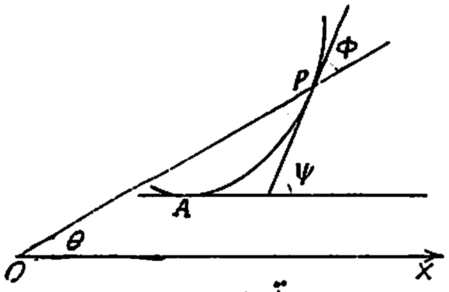
2۔ ثابت کیجیے کہ نقطہ $(a, 0)$ کو ثابت نقطہ لینے پر اسٹرائڈ

$$x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}$$

کی نجی مساوات $s = 3/2a \sin^2\psi$ ہوتی ہے۔

8.42۔ قطبی مساوات سے نجی مساوات حاصل کرنا

مان لیجیے $r = f(\theta)$ کسی دیے ہوئے منحنی کی قطبی مساوات ہے اور ثابت نقطہ A کا سمتیہ زاویہ (vectorial angle) α ہے۔ ہم مان لیتے ہیں کہ A پر مماس ابتدائی خط کے



تصویر 35

متوازی ہے اور P منحنی پر کوئی ایسا نقطہ ہے جس کا سمتیہ زاویہ θ ہے۔
مان لیجیے قوس $s = AP$
ہم پاتے ہیں

$$(i)\cdots \tan\varphi = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}$$

جہاں φ نصف قطری سمتیہ (radius vector) اور مماس کے بیچ کا زاویہ ہے۔
ساتھ ہی

$$(ii)\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \psi = \theta+\varphi.$$

$$s = \int_\alpha^\theta \sqrt{\left\{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}}\,d\theta$$

$$(iii)\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad = \int_\alpha^\theta \sqrt{[f^2(\theta)+f'^2(\theta)]}\,d\theta$$

اب (i) , (ii) اور (iii) سے θ اور φ اسقاط کرنے پر درکار نجی مساوات ملتی ہے۔

مثال

قطب (pole) کو ثابت نقطہ لیتے ہوئے کارڈائڈ

$$r = a(1-\cos\theta)$$

کی نجی مساوات نکالیے۔ (تصویر 31 دیکھیے)
ابتدائی خط قطب پر مماس ہے۔ ہم پاتے ہیں

$$\frac{dr}{d\theta} = a\sin\theta$$

$$\therefore \quad \tan\varphi = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \varphi = \frac{\theta}{2}$$

پھر

$$\psi = \varphi + \theta = \frac{3\theta}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (i)$$

ساتھ ہی

$$s = \int_0^\theta \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]}\, d\theta$$

$$= 2a\int_0^\theta \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= -4a \left| \cos\frac{\theta}{2} \right|_0^\theta = 4a\left[1 - \cos\frac{\theta}{2}\right] \qquad \cdots\cdots \quad (ii)$$

اب (i) اور (ii) سے ہم پاتے ہیں

$$s = 4a\left[1 - \cos\frac{\psi}{3}\right]$$

جو کہ درکار نجی مساوات ہے۔

مشق: ثابت کیجیے کہ $\theta = 0$ کو ثابت نقطہ لینے پر کارڈائڈ

$$r = a(1+\cos\theta)$$

کی نجی مساوات $s = 4a \sin(\psi/3)$ ہے۔

8.5- علپس کی قوسی اصلاح (Rectification) $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$

ہم پاتے ہیں:

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$$

$$= a^2\sin^2\theta + a^2(1-e^2)\cos^2\theta$$

$$= a^2(1 - e^2\cos^2\theta)$$

جہاں e علپس کا خروج المرکز (eccentricity) ہے۔ اس طرح علپس کی لمبائی

$$4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-e^2\cos^2\theta)}\, d\theta$$ ہے۔

اس تکملہ کو جبری، لوگارتمی، قوتی (exponential)، مثلثاتی یا معکوس مثلثاتی تفاعلوں کے محدود تعداد کے مرکب (combination) کی طرح نہیں رکھا جا سکتا۔ ایسے ایک نئے قسم کے تفاعلوں کی ارقام میں رکھ سکتے ہیں جن کو علیسی تفاعل (Elliptic Functions) کہتے ہیں۔ لیکن ہم ذیل طریقہ اختیار کر سکتے ہیں:-

دو رُکنی فارمولے سے ہم پاتے ہیں

$$*(1-e^2\cos^2\theta)^{1/2} = 1-\tfrac{1}{2}e^2\cos^2\theta-\tfrac{1}{8}e^4\cos^4\theta-\tfrac{1}{16}e^6\cos^6\theta-\dots\dots$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2}\sqrt{(1-e^2\cos^2\theta)}\,d\theta$$

$$= 1-\frac{1}{2}e^2\,\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}-\frac{1}{8}e^4\,\frac{3.1.\pi}{4.2.2}-\frac{1}{16}e^6\,\frac{5.3.1.\pi}{6.4.2.2}-\dots$$

$$= 1-\frac{1}{8}e^2\pi-\frac{3}{128}e^4\pi-\frac{5}{512}e^6\pi-\dots\dots$$

اس طرح علیس کا محیط ہم کتنے ہی اعشاریہ تک معلوم کر سکتے ہیں۔

باب 8 پر مشقیں

1. کارڈائڈ $r = a(1-\cos\theta)$ کے اس حصے کی لمبائی نکالو جو دائرہ $r=a\cos\theta$ کے باہر ہو۔

2. ثابت کیجیے کہ خط $4r\cos\theta = 3a$ کارڈائڈ $r = a(1+\cos\theta)$ کے دو ایسے حصوں میں کاٹتا ہے کہ دونوں حصوں کے قوسوں کی لمبائیاں برابر ہوں۔

3. ثابت کیجیے کہ منحنی $r = a(1+\cos 2\theta)$ کے لوپ کی لمبائی

---

* یاد رہے کہ یہ ممکن ہے کہ مسئلہ
فنکشنوں کے جوڑ کا تکملہ تکملوں کے جوڑ کے برابر ہوتا ہے
لامتناہی سلسلے کے لیے درست نہ ہو لیکن جو صورت زیرِ غور ہے اس میں یہ مسئلہ درست ہے لیکن اس کا ثبوت کتاب کے معیار سے باہر ہے۔

$\frac{3}{8}\sqrt{3}[2\sqrt{3}+\log(\sqrt{3}+2)]a$ ہے۔

4۔ ثابت کیجیے کہ $\theta = \pi/6$ والا نقطہ منحنی $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$ کے پہلے ربع والے قوس کو دو ایسے حصوں میں بانٹتا ہے جن کی لمبائیوں کا تناسب ایک اور 3 کا ہو۔

5۔ منحنی

$$x\cos\theta = a\cos(\tan\theta-\theta).$$
$$y\cos\theta = a\sin(\tan\theta-\theta)$$

کے لیے $\theta = 0$ اور $\theta = \alpha < \frac{\pi}{2}$ والے نقطوں کے درمیان قوس کی لمبائی نکالیے۔

6۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $4(x^2+y^2)-a^2 = 3a^{4/3}y^{2/3}$ کی کل لمبائی $6a$ ہے۔

[یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ $\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = \frac{a^{4/3}}{4y^{2/3}(a^{2/3}-y^{2/3})}$]

7۔ منحنی

$$x = a(\sin\theta+\tfrac{1}{3}\sin 3\theta),\ y = a(\cos\theta-\tfrac{1}{3}\cos 3\theta)$$

کی ترسیم کیجیے اور یہ ثابت کیجیے کہ اس کی لمبائی $8a$ ہے۔

8۔ منحنی

$$x = a(\theta+\cos\theta\sin\theta-\sin\theta)$$
$$y = a(\cos^2\theta-\cos\theta)$$

کی ترسیم کیجیے اور $\theta = 0$ سے $\theta = 2\pi$ تک کے قوس کی لمبائی نکالیے۔

9۔ منحنی $y = e^x$ کے $x = 0$ اور $x = 1$ والے نقطوں کے درمیان کے قوس کی لمبائی نکالیے۔

10۔ منحنی $r = a/\theta^2$ کے $\theta = 1$ سے $\theta = 2$ تک کے قوس کی لمبائی نکالیے۔

11۔ خط $y = mx$ منحنی $y^2 = ax^2$ کا جو حصہ کاٹتا ہے اس کے قوس کی لمبائی

اور اُس حصہ کا رقبہ نکالیے۔

12۔ اگر منحنی $r = a \tan \theta/2$ کے لیے مبدا اور $\theta = 2\pi$ والے نقطے کے درمیان کے قوس کی لمبائی 's' ہو اور اِن نقطوں کے درمیان منحنی کے تحت رقبہ Δ ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$\Delta = a(s - a\pi)$$

13۔ اگر $r=a$ اور $r = 2a$ والے نقطوں کے درمیان منحنی

$$a\theta = \sqrt{(r^2 - a^2)} - a \sec^{-1}(r/a)$$

کے قوس کی لمبائی s ہو اور اِس سے قطب پر بنے قطع کا رقبہ A ہو تو ثابت کیجیے کہ $\sqrt{3}A = as$

14۔ ثابت کیجیے کہ منحنی

$$x = a \sin \theta - b \sin 2\theta, \; y = a \cos \theta - b \cos 2\theta$$

کا محیط (perimeter) اُس علیپس کے محیط کے برابر ہے جس کے نصف۔ محاور (semi-axes) $a+2b$ اور $a-2b$ ہوں۔

15۔ ثابت کیجیے کہ $\theta = \frac{\pi}{4}$ کو ساکت نقطہ لینے پر منحنی

$$x = e^{\theta} \sin \theta, \; y = e^{\theta} \cos \theta$$

کی نجی مساوات

$$se^{(-\pi/4)} + \sqrt{2} = \sqrt{2}(\cosh\psi - \sinh\psi),$$ ہے۔

16۔ نقطہ $(1, 0)$ کو ثابت نقطہ لیتے ہوئے منحنی $y = \log x$ کی نجی مساوات معلوم کیجیے۔

17۔ عام علامتوں (usual notation) میں ثابت کیجیے کہ

$$s = \int_{r_1}^{r_2} \frac{r\,dr}{\sqrt{(r^2 - p^2)}},$$

اور ثابت کیجیے کہ حدود $r = b$ اور $r = c$ کے درمیان منحنی $p^2(a^4 + r^4) = a^4 r^2$

کے قوس کی لمبائی، حدود $x = b$ اور $x = c.$ کے درمیان زاید $xy = a^2$ کے قوس کی لمبائی کے برابر ہے۔

[تفرقی حساب سے

$$\left[\frac{ds}{dr} = \sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{r}{\sqrt{(r^2-p^2)}}\right.$$

جوابات

1. $4a\sqrt{3}$.   5. $\frac{1}{2}\, a \tan^2 \alpha$.   8. $a\,(4\sqrt{3}+\frac{8}{3}\pi)$.

9. $\sqrt{(e^2+1)}-\log\{[1+\sqrt{(1+e^2)}]/(\sqrt{2}+1)\}-(\sqrt{2}-1)$

10. $\frac{a}{4}\{2\sqrt{5}-\sqrt{2}+\log[(\sqrt{2}-1)/(\sqrt{5}-2)]\}$.

11. $\frac{a}{27\, m^2}\,[(4m^2+9)^{3/2}-8m^3]$, $\frac{a^2}{10\, m^3}$.

16. $s = \frac{\sqrt{2}}{\cos\psi-\sin\psi}-\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)-\log\frac{\sqrt{2}+\cos\psi-\sin\psi}{\cos\psi+\sin\psi}$.

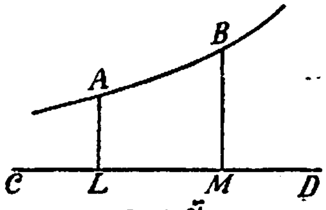
9

گردشی ٹھوس کے حجم (Volumes) اور سطح (Surfaces)

9.1 - مان لیجیے AB کسی منحنی کا قوس ہے اور CD ایسا خط ہے جو کہ منحنی کو نہیں کاٹتا۔

خط CD پر دو عمود (perpendiculars) AL اور BM ڈالیے۔

اب قطعہ ALMBA کو خط CD کے گرد گھمانے پر ایک گردشی ٹھوس (solid of revolution) ملتا ہے۔ اس ٹھوس کو قوس AB کو CD کے گرد گھمانے پر بنا ہوا گردشی ٹھوس کہتے ہیں۔



تصویر 36

اس سبق میں ہم پڑھیں گے کہ ایسے گردشی ٹھوس کا حجم اور اُس کی سطح کا رقبہ کیسے نکالا جاتا ہے۔

منحنی جس خط CD کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ اُس خط کو **گردش کا محور** (axis of revolution) کہتے ہیں۔

پہلے ہم x-محور کو ہی گردش کا مرکز لیتے ہوئے گردشی ٹھوس کے حجم اور سطح کے فارمولے حاصل کریں گے۔ بعد میں کسی بھی خط کو گردش کا مرکز لے کر گردشی ٹھوس کے حجم اور سطح کے فارمولے نکالیں گے۔

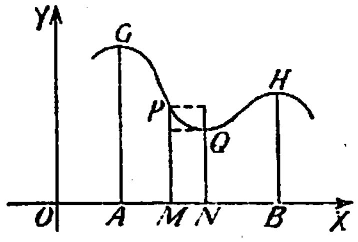
9.2 - **گردشی ٹھوس کا حجم** (Volume): یہ ثابت کرنا کہ منحنی $y = f(x)$ کے

$x = a$ اور $x = b$ کے درمیان والے قوس کو x-محور کے گرد گھمانے پر
بنے ہوئے گردشی ٹھوس کا حجم

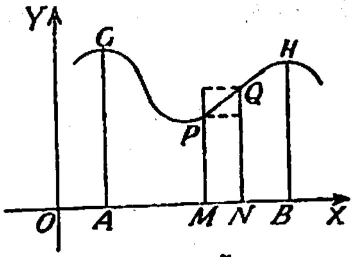
$$\int_a^b \pi y^2\,dx, \text{ یعنی } \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$$

ہوتا ہے۔ اگرچہ قوس x-محور کو نہ کاٹتا ہو۔

مان لیجیے $y = f(x)$ پر فصلہ a اور b والے نقطے ترتیب وار G اور H ہیں اور
$P\ (x, y)$ منحنی پر کوئی متغیر (variable) نقطہ ہے۔



تصویر 37



تصویر 38

مان لیجیے قوس GP کو x-محور کے گرد گھمانے پر بنے ہوئے گردشی ٹھوس کا حجم
V ہے۔ اس طرح V، x کا فنکشن ہے۔ ہم P کے قریب منحنی پر ایک ایسا نقطہ
$Q\ (x + \Delta x, y + \Delta y)$ لیتے ہیں کہ کسی نقطہ کے منحنی پر P سے Q تک چلنے پر عرض
ordinate یا تو لگاتار بڑھتا ہو (جیسے تصویر 37 میں) یا لگاتار گھٹتا ہو (جیسے تصویر
38 میں)۔ اب مستطیل (rectangles) NP اور MQ مکمل کر لیجیے۔

اب قوس PQ کو x-محور کے گرد گھمانے پر بنے ہوئے ٹھوس کا حجم ΔV اُن
دونوں ٹکیوں (discs) کے حجموں کے درمیان ہے جو کہ مستطیلوں NP اور MQ کو
x-محور کے گرد گھمانے پر بنتیں۔

تصویر 37 کے لیے ہم پاتے ہیں

$$\pi y^2 \triangle x < \triangle V < \pi(y+\triangle y)^2 \triangle x$$

$$\Rightarrow \quad \pi y^2 < \frac{\triangle V}{\triangle x} < \pi(y+\triangle y)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dV}{dx} = \pi y^2$$

تصویر 38 کے لیے ہم پاتے ہیں

$$\pi(y+\triangle y^2)\ \triangle x < \triangle V < \pi y^2\ \triangle x$$

$$\Rightarrow \quad \pi(y+\triangle y)^2 < \frac{\triangle V}{\triangle x} < \pi y^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dV}{dx} = \pi y^2$$ (پہلے کی طرح)

اس لیے

$$\int_a^b \pi y^2\, dx = \int_a^b \frac{dV}{dx}\, dx = \left| V \right|_a^b$$

= ($x = b$ پر V کی قیمت) - ($x = a$ پر V کی قیمت)

= ($x = b$ پر V کی قیمت) $- 0$

= (قوس GH کو X-محور کے گرد گھمانے پر بنے ٹھوس کا حجم)

نوٹ : اوپر کی بحث سے یہ نتیجہ نکلتا ہے منحنی $x = f(y)$ کے $y = a$ اور $y = b$ والے نقطوں کے درمیان والے قوس کو y-محور کے گرد گھمانے پر بنے ہوئے گردشی ٹھوس کا حجم

$$\int_a^b \pi x^2\, dy$$

ہوتا ہے، جب کہ قوس y-محور کو کاٹتا نہ ہو۔

مثالیں

1. علیپس $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$ کو x-محور کے گرد گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم نکالیے۔ (تصویر 10 دیکھیے)

یہ آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ قوس ABA' کو x-محور کے گرد گھمانے پر وہی گردشی ٹھوس ملے گا جو کہ پورے علیلس کو x-محور کے گرد گھمانے پر بنتا ہے۔ ساتھ ہی، یہ حجم اسی گردشی ٹھوس کے حجم کا دُگنا ہے جو کہ قوس AB کو x-محور کے گرد گھمانے پر بنتا ہے

لہٰذا درکار حجم

$$= 2\pi \int_0^a y^2 dx = 2\pi \frac{b^2}{a^2}\int_0^a (a^2-x^2)\, dx$$

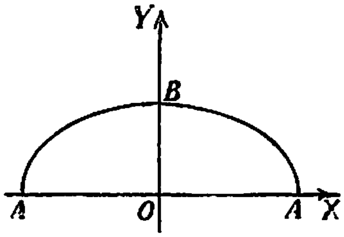
$$= 2\pi\frac{b^2}{a^2}\left|a^2x-\frac{x^3}{3}\right|_0^a = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

2۔ سائیکلائڈ

$$x = a(\theta+\sin\theta),\ y = a(1+\cos\theta)$$

کے ایک قوس کو x-محور کے گرد گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم نکالیے۔

قوس $A'BA$ کو گھمانے پر بنے ہوئے گردشی ٹھوس کا حجم اُس ٹھوس کے حجم کا دُگنا ہے جو قوس AB کو گھمانے پر بنتا ہے۔ جیسے جیسے کوئی نقطہ منحنی BA پر B سے A کی



تصویر 39

طرف بڑھتا ہے، θ کی قیمت 0 سے π تک بڑھتی ہے۔

اس لیے درکار حجم

$$= 2\pi\int_0^{\pi a} y^2\, dx, \quad (\text{جہاں } OA = \pi a.)$$

متغیر x کی تبدیلی کرکے θ لانے پر، درکار حجم

$$= 2\pi\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\, a(1+\cos\theta)\, d\theta$$

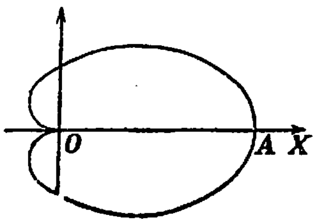
$$= 2\pi a^3 \int_0^{\pi} 8\cos^6\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 32\pi a^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^6\varphi\, d\varphi, \quad (\varphi = \frac{\theta}{2}$$ جہاں

$$= 32\pi a^3 \cdot \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= 5\pi^2 a^3.$$

3۔ کارڈائڈ $r = (l+\cos\theta)$ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم نکالیے۔



تصویر 40

درکار حجم

$$= \pi\int_0^{2a} y^2\, dx \quad (OA = 2a.$$ کیونکہ)

متغیر x کی تبدیلی کرکے θ لانے پر ہم پاتے ہیں

$$x = r\cos\theta = a\cos\theta\,(1+\cos\theta)$$

$$y = r\sin\theta = a\sin\theta\,(1+\cos\theta)$$

$$dx = -a\,(\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta)\, d\theta$$

ساتھ ہی $x = 0$ پر $\theta = \pi$ اور $x = 2a$ پر $\theta = 0$ ہے۔

$$\therefore V = -\pi\int_{\pi}^{0} a^2\sin^2\theta\,(1+\cos\theta)^2\, a\sin\theta\,(1+2\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \pi a^2\int_0^{\pi} \sin^3\theta\,(1+\cos\theta)^2\,(1+2\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \pi a^3\int_0^{\pi} 8\sin^3\frac{\theta}{2}\cos^3\frac{\theta}{2}\cdot 4\cos^4\frac{\theta}{2}\left(4\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right) d\theta$$

$$= 128\,\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^3 \frac{\theta}{2} \cos^9 \frac{\theta}{2}\, d\theta - 32\,\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^3 \frac{\theta}{2} \cos^7 \frac{\theta}{2}\, d\theta$$

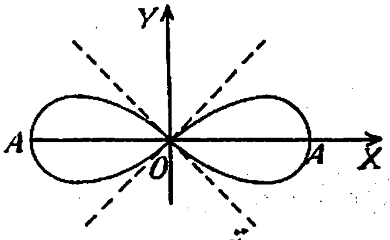
$$= 256\,\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos^9 \varphi\, d\varphi - 64\,\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos^7 \varphi\, d\varphi$$

(جہاں $\varphi = \theta/2$)

$$= 256\,\pi a^3 \frac{2.8.6.4.2}{12.10.8.6.4.2} - 64\,\pi a^3 \frac{2.6.4.2}{10.8.6.4.2}$$

$$= \frac{64\pi a^3}{25} - \frac{8\pi a^3}{5} = \frac{8\pi a^3}{5}$$

4. لیمنسکیٹ $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم نکالیے۔



تصویر 41

کُل منحنی کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم اُس گردشی ٹھوس کے حجم کا دُگنا ہے جو کہ پہلے ربع والے قوس کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے پر بنتا ہے۔

لہٰذا درکار حجم

$$= 2\pi \int_0^a y^2\, dx$$ کیونکہ $OA = a$

متغیر x کی تبدیلی کرکے θ لانے پر ہم پاتے ہیں

$$x = r\cos\theta = a\sqrt{(\cos 2\theta)}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad dx = \left(-a\sqrt{\cos 2\theta}.\sin\theta - \frac{a\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\cos\theta\right)d\theta$$

$$= -a\frac{\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\, d\theta$$

ساتھ ہی

$$y^2 = r^2 \sin^2\theta = a^2 \cos 2\theta \sin^2\theta$$

پھر $x=0$ پر $\theta=\pi/4$ اور $x=a$ پر $\theta=0$، اس لیے

$$\text{حجم} = -2\pi a\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} a^2\cos 2\theta \sin^3\theta \frac{\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta$$

$$= 2\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta \sin 3\theta \sqrt{\cos 2\theta}\, d\theta$$

$$= 2\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta\,(3\sin\theta-4\sin^3\theta)\sqrt{\cos 2\theta}\, d\theta$$

ہم رکھتے ہیں

$$\cos\theta = t \Rightarrow -\sin\theta\, d\theta = dt$$

اس لیے

$$\text{حجم} = -2\pi a^3\int_1^{\sqrt{\frac{1}{2}}}(1-t^2)(4t^2-1).\sqrt{(2t^2-1)}\,dt$$

ہم لکھتے ہیں

$$(1-t^2)(4t^2-1)\sqrt{(2t^2-1)} = \frac{(1-t^2)(4t^2-1)(2t^2-1)}{\sqrt{(2t^2-1)}}$$

$$= \frac{-8t^6+14t^4-7t^2+1}{\sqrt{(2t^2-1)}}$$

مان لیجیے (§5·4 دیکھیے)

$$\int\frac{-8t^6+14t^4-7t^2+1}{\sqrt{(2t^2-1)}}dt = (at^5+bt^4+ct^3+dt^2+et+f)\sqrt{(2t^2-1)}$$

$$+g\int\frac{dt}{\sqrt{(2t^2-1)}}$$

تفرق کرنے اور $\sqrt{(2t^2-1)}$ سے ضرب دینے پر ہم پاتے ہیں

$$-8t^6+14t^4-7t^2+1 = (5at^4+4bt^3+3ct^2+2dt+e)(2t^2-1)$$

$$+2t(at^5+bt^4+ct^3+dt^2+et+f)+g.$$

اب t کی یکساں قوتوں کے ضریبوں کی برابری پر ہم پاتے ہیں

$12a=-8$; $10b=0$; $8c-5a=14$;
$6d-4b=0$; $4e-3c=-7$; $-2d+2f=0$;
$-e+g=1$.

اِس لیے

$$a = \tfrac{2}{3}, b = 0, c = \tfrac{4}{3}, d = 0, e = -\tfrac{3}{4}, f = 0, g = \tfrac{1}{4}.$$

$$\therefore \int_1^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{-8t^6+14t^4-7t^2+1}{\sqrt{(2t^2-1)}}\, dt = \left|\left(-\frac{2}{3}t^5+\frac{4}{3}t^3-\frac{3}{4}t\right)\sqrt{(2t^2-1)}\right|_1^{\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$+\frac{1}{4}\int_1^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{dt}{\sqrt{(2t^2-1)}}$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{1}{4}\left|\frac{\log[\sqrt{2}t+\sqrt{(2t^2-1)}]}{\sqrt{2}}\right|_1^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1).$$

$$\therefore \quad V = \frac{\pi a^3}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1) - \frac{1}{3}\right]$$

مشقیں

1- منحنی $2ay^2 = x(x-a)^2$ کے لوپ کو X-محور کے گرد گھمانے پر بنے ہوئے گردشی ٹھوس کا حجم نکالیے۔

2- منحنی $a^2y^2 = x^2(2a-x)(x-a)$ کے لوپ کو X-محور کے گرد گھمانے پر بنے ہوئے گردشی ٹھوس کا حجم نکالیے۔

3- منحنی $xy^2 = 4(2-x)$ اور Y-محور سے گھرا ہوا رقبہ نکالیے اور اس گردشی ٹھوس کا حجم نکالیے جو منحنی کو y-محور کے گرد $360°$ گھمانے پر بنتا ہو۔

4- یہ ثابت کیجیے کہ ایک علیس کو اُسکے محور اصغر (minor axis) کے گرد گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم اُن گردشی ٹھوسوں کے حجموں کا اوسط نسبتی (mean proportional) ہوتا ہے جو کہ علیس اور اُس کے امدادی دائرے (auxiliary circle) کو علیس کے محور اکبر کے گرد گھمانے پر بنتے ہیں

5- ہائپر سائیکلائڈ $x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}$ کو X-محور کے گرد گھمانے پر بنے تکلی نما

(spindle shaped) گردشی ٹھوس کا حجم نکالیے۔

6۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $y = a^3/(a^2+x^2)$ کو اُس کے لامتناہی مماس (asymptote) کے گرد گھمانے پر بنے ٹھوس کا حجم $\pi^2 a^3/2$ ہوتا ہے۔

7 ثابت کیجیے کہ منحنیوں $y^2 = x^3$ اور $y^3 = x^2$ کے درمیان گھرے ہوئے رقبے کو X۔محور کے گرد گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم $5\pi/28$ ہوتا ہے۔

8۔ منحنی $y^2 = x^2(a-x)/(a+x)$ کے لوپ کو X۔محور کے گرد گھمانے پر بنے ٹھوس کا حجم نکالیے۔

9۔ ثابت کیجیے کہ سائیکلائڈ $x = a(\theta+\sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta)$ کو X۔محور کے گرد گھمانے پر بنی چرخی (reel) کا حجم $\pi^2 a^3$ ہوتا ہے۔

10۔ ثابت کیجیے کہ سائیکلائڈ

$$x = a(\theta+\sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta)$$

کو y۔محور کے گرد گھمانے پر بنے ٹھوس کا حجم $\pi a^3(\frac{3}{2}\pi^2-\frac{8}{3})$ ہوتا ہے۔

11۔ منحنی $y = \sqrt{(1+x^2)}$ کے $x = 0$ اور $x = 4$ کے بیچ والے قوس کو x۔محور کے گرد گھمانے پر بنے ٹھوس کا حجم نکالیے۔

12۔ منحنی $y = e^x \sin x$ کی ترسیم کیجیے جب کہ x صفر سے π تک بڑھے اور اس قوس کو X۔محور کے گرد گھمانے پر بنے ٹھوس کا حجم $\pi(e^{2\pi}-1)/8$ ثابت کیجیے۔

13۔ منحنیوں $y = \sin x$ اور $y = \cos x$ کی ترسیم کیجیے جبکہ x 0 سے $\pi/2$ تک بڑھے۔ ثابت کیجیے کہ ان دونوں منحنیوں کے درمیان گھرے رقبے کو x۔محور کے گرد گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم $\pi(\pi-2)/4$ ہوتا ہے۔

14۔ منحنی $y^2 = x^3+5x$ اور دو خطوط $x = 2$ اور $x = 4$ کے درمیان گھرے ہوئے رقبے کو X۔محور کے گرد گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم نکالیے۔

1۔ کیٹنری $y = c\cosh(x/c)$ کے $x = a$ اور $x = b$ والے نقطوں کے درمیان کے قوس کو x۔محور کے گرد گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم نکالیے۔

16 ثابت کیجیے کہ مکافی $y^2 = 4ax$ اور اُس کے برپیچہ (evolute)

$$27ay^3 = 4(x-2a)^3$$

کے درمیان گھرے رقبے کو x-محور کے گرد گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم $80\pi a^3$

17۔ ثابت کیجیے کہ مکافی اور اُس کے وترِ خاص کے سِروں پر کھینچے گئے مماسوں کے درمیان گھرے رقبے کو مکافی کے محور کے گرد گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم $2a^3\pi/3$ ہوتا ہے، جہاں $4a$ مکافی کے وترِ خاص کی لمبائی ہے۔

18۔ منحنی $y = x \sin mx$ ، $x = 0$ اور $x = 2\pi/m$ کے درمیان گھرے رقبے کو x-محور کے گرد گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم نکالیے۔

19 ثابت کیجیے کہ منحنی $r = a \cos 3\theta$ کے $\theta = -\pi/6$ اور $\theta = \pi/6$ کے درمیان والے لوپ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے پر گردشی ٹھوس کا حجم $19\pi a^3/960$ ہوتا ہے۔

20 ثابت کیجیے کہ لمکان $r = a+b \cos \theta$ $(a > b)$ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے پر بنے ٹھوس کا حجم $4\pi a(a^2+b^2)/3$ ہوتا ہے۔

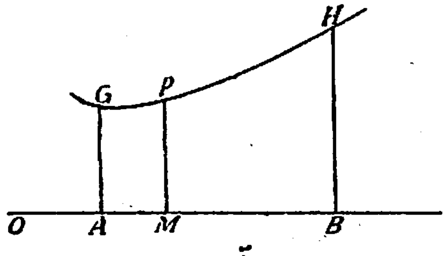
جوابات

1. $\pi a^3/24$. 2. $23a^3\pi/60$. 3. $4\pi, 4\pi^2$. 5. $32\pi a^3/105$.

8. $\frac{2}{3}\pi a^3 \log (8/e^2)$. 11. $76\pi/3$. 14. 90π.

15. $\left[\frac{\pi c^2}{4}\left(2x+\sinh\frac{2x}{c}\right)\right]_a^b$. 18. $\pi^2(8\pi^2-3)/6m^3$.

9·3 گردش کا محور:



تصویر 42

ہم §9·2 میں حاصل ہوئے نتیجے کو ذیل معنی دے سکتے ہیں:- منحنی کے کسی بھی نقطہ P سے y گردش کے محور پر ڈالے گئے عمود PM

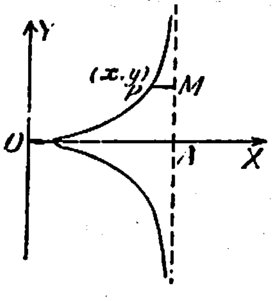
کی لمبائی ہے، جہاں M وہ نقطہ ہے جس پر عمود گردش کے محور کو کاٹتا ہے۔ X-محور کے کسی ساکت نقطہ O سے M تک کی دوری ہے۔ قوس کے کناروں G اور H سے محور پر ڈالے گئے عمود جن نقطوں A اور B پر محور کو کاٹتے ہیں اُن کے O سے فاصلے a اور b ہیں۔

اِس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ قوس GH کو خط AB کے گرد گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم

$$\int_{OA}^{OB} \pi (MP^2)\, d\,(OM).$$

ہوتا ہے۔

1۔ سیسائڈ $y^2(2a-x) = x^3$ کو اُس کے لامتناہی مماس (asymptote) کے گرد گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم نکالیے۔



تصویر 43

منحنی کا لامتناہی مماس $x = 2a$ ہے۔ منحنی پر واقع کسی نقطہ $P(x, y)$ سے لامتناہی مماس پر ڈالے گئے عمود MP کی لمبائی $(2a-x)$ ہے۔ لامتناہی مماس جس نقطہ پر X-محور کو کاٹتا ہے اُس نقطہ A کو ہم گردش کے محور کا ثابت نقطہ لے لیتے ہیں۔ تشاکل کی وجہ سے، پورے منحنی کو لامتناہی مماس کے گرد گھمانے پر بنے ہوئے گردشی ٹھوس کا حجم اُس حجم کا دُگنا ہوگا جو کہ منحنی کے پہلے ربع والے حصے کو لامتناہی مماس کے گرد گھمانے پر بنتا ہے۔

اِس لیے درکار حجم

$$= 2\pi\int_0^\infty (MP)^2\, d(AM) = 2\pi \int_0^\infty (2a-x)^2\, dy$$

ہم متغیر y کے بجائے x لاتے ہیں۔ ہم پاتے ہیں

$$dy = \frac{(3a-x)\sqrt{x}\,\sqrt{(2a-x)}}{(2a-x)^2}\,d\cdot$$

اِس لیے

$$\text{حجم} = 2\pi \int_0^{2a} (3a-x)\,\sqrt{(2a-x)}\sqrt{x}\,dx.$$

تکملہ نکالنے کے لیے ہم رکھتے ہیں

$$x = 2a\sin^2\theta.$$

اور تب

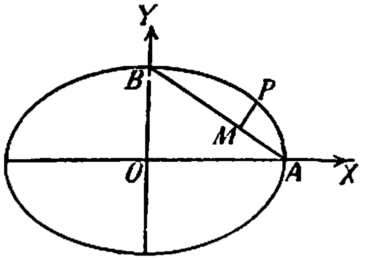
$$\text{تکملہ} = 16\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3-2\sin^2\theta)\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= 16\pi a^3\left[3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta\right]$$

$$= 16\pi a^3\left[\frac{3\cdot1\cdot1}{4\cdot2}\quad\frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= 2\pi^2 a^3$$

-2 ثابت کیجیے کہ علیبس $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ کے وتر $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ سے کٹے ہوئے چھوٹے والے قطع کو اِس وتر کے گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم $\frac{\pi}{6}(10-3\pi)\,a^2b^2(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}$ ہوگا۔



تصویر 44

وتر $x/a+y/b=1$ نقطوں A اور B کو ملانے والا خط ہے۔ کوئی بھی نقطہ $P(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ علیبس کے چھوٹے والے قوس پر لیجیے۔ عمود MP کی لمبائی $\frac{ab(\cos\theta+\sin\theta-1)}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ ہے۔

ہم گردش کے محور AB پر نقطہ A کو ثابت نقطہ لے لیتے ہیں۔ اب ہمیں لمبائی AM معلوم کرنا ہے۔ اب

$$AM^2 = AP^2 - PM^2$$

$$= (a\cos\theta - a)^2 + (b\sin\theta)^2 - \frac{a^2b^2(\cos\theta+\sin\theta-1)^2}{a^2+b^2}$$

$$= a^2(\cos\theta-1)^2 + b^2\sin^2\theta$$

$$- \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left[(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta+2\sin\theta(\cos\theta-1)\right]$$

$$= \frac{a^4(\cos\theta-1)^2+b^4\sin^2\theta-2a^2b^2\sin\theta(\cos\theta-1)}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{[a^2(\cos\theta-1)-b^2\sin\theta]^2}{a^2+b^2}.$$

$$\Rightarrow \quad AM = \frac{a^2(1-\cos\theta)+b^2\sin\theta}{\sqrt{(a^2+b^2)}}.$$

$$\Rightarrow \quad d(AM) = \frac{a^2\sin\theta+b^2\cos\theta}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\,d\theta.$$

اس لیے درکار حجم

$$= \pi\int_0^{AB}(MP)^2\,d(AM)$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2b^2(\cos\theta+\sin\theta-1)^2}{(a^2+b^2)}\cdot\frac{a^2\sin\theta+b^2\cos\theta}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\,d\theta$$

$$= \frac{\pi a^2b^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2\sin\theta+b^2\cos\theta)$$

$$\times(2+2\sin\theta\cos\theta-2\sin\theta-2\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{2\pi a^2b^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[(a^2\sin\theta+b^2\cos\theta)+a^2\sin^2\theta\cos\theta$$

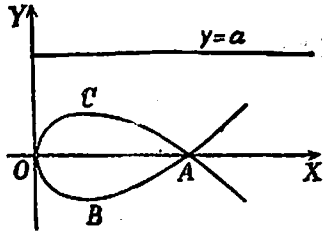
$$+b^2\cos^2\theta\sin\theta-(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)-(a^2+b^2)\sin\theta\cos\theta\Big]d\theta$$

$$= \frac{2\pi a^2b^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}\left[(a^2+b^2)+\frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{3}-\left(\frac{a^2\pi}{4}+\frac{b^2\pi}{4}\right)-\frac{(a^2+b^2)}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi a^2 b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\left(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}\ (10-3\pi)a^2b^2(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}$$

3۔ منحنی $2ay^2 = x(x-a)^2$ کے لوپ کو خط $y = a$ کے گرد گھمانے پر بنے ٹھوس کا حجم نکالیے۔



تصویر 45

اِس کا لوپ $x = 0$ اور $x = a$ کے درمیان ہے۔ لوپ کو گردش کے محور $y = a$ کے گرد گھمانے پر بنے ہوئے گردشی ٹھوس کا حجم، قوسوں OBA اور OCA کو $y = a$ کے گرد گھمانے پر بنے ہوئے گردشی ٹھوسوں کے حجموں کے فرق کے برابر ہوگا۔

اب قوس OBA کے کسی نقطے کے لیے

$$y = \frac{\sqrt{x(x-a)}}{\sqrt{(2a)}} = -\frac{\sqrt{x(a-x)}}{\sqrt{(2a)}}$$

اور قوس OCA کے کسی نقطے کے لیے

$$y = -\frac{\sqrt{x(x-a)}}{\sqrt{(2a)}} = \frac{\sqrt{x(a-x)}}{\sqrt{(2a)}}$$

قوس OBA کی گردش سے بنے ٹھوس کا حجم

$$= \pi \int_0^a \left(a + \frac{\sqrt{x(a-x)}}{\sqrt{(2a)}}\right)^2 dx.$$

اور قوس OCA کی گردش سے بنے ٹھوس کا حجم

$$= \pi \int_0^a \left(a - \frac{\sqrt{x(a-x)}}{\sqrt{(2a)}}\right)^2 dx.$$

اِس لیے درکار حجم، جو کہ اِن دونوں کا فرق ہے، وہ

$$= \frac{4a\pi}{\sqrt{(2a)}}\int_0^a \sqrt{x}(a-x)\,dx$$

$$= \frac{4a\pi}{\sqrt{(2a)}}\left|\frac{2}{3}\ ax^{3/2}-\frac{2}{5}\ x^{5/2}\right|_0^a = \frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{15}$$

مشقیں

1۔ ثابت کیجیے کہ y-محور اور علیپس $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$ کے $x < 0$ والے قوس سے گھرے ہوئے رقبے کو گردش کے محور $x = -2a$ کے گرد گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم $2\pi(\pi-\frac{4}{3})a^2b$ ہوگا۔

2۔ ثابت کیجیے کہ خط $x = a/2$، علیپس $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$ کو جن دو حصوں میں کاٹتا ہے، اُن میں سے چھوٹے حصے کو اِسی خط کے گرد $360°$ گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم $\pi a^2b(\frac{3}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3})$ ہوگا۔

3۔ ثابت کیجیے کہ منحنیوں $xy^2 = a^2(a-x)$، $(a-x)\,y^2 = a^2x$ کے درمیان کے رقبے کو خط $x = a/2$ کے گرد گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم $\pi a^3(4-\pi)/4$ ہوگا۔

4۔ دو مکافیوں $x^2 = 4ay$ اور $x^2 = 4a(2a-y)$ کے درمیان گھرے رقبے کو خط $y = a$ کے گرد گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم نکالیے۔

5۔ ثابت کیجیے کہ نصف قطر (radius.) a والے دائرے کے ایک ربع کو اُس کے وتر کے گرد گھمانے پر بنے ہوئے تکلی نما (spindle) ٹھوس کا حجم $(\pi/6\sqrt{2})\,(10-3\pi)a^3$ ہوگا۔

6۔ ثابت کیجیے کہ مکافی $y^2 = 4ax$ کے راس (vertex) کو وتر خاص کے ایک سرے سے ملانے والے وتر مکافی کا جو حصہ کاٹتا ہے اُسے اِس وتر کے گرد $360°$ گھمانے پر بنے ہوئے گردشی ٹھوس کا حجم $(2\sqrt{5})\pi a^3/75$ ہوگا۔

7۔ ثابت کیجیے کہ علیپس $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$ $(a > b)$ کو اُس کے چھوٹے محور کے

ایک سرے پر کھینچے گئے مماس کے گرد گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم $2\pi^2ab^2$ ہوگا۔

8۔ منحنی $(a-x)y^2 = a^2x$ کو اس کے لامتناہی مماس کے گرد گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم نکالیے۔

9۔ مکافی $y^2 = 4ax$ کے اُس قوس کو جو راس سے وترِ خاص کے ایک سرے کو ملانے والے وتر سے کٹتا ہے، اگر اسی سرے پر کھینچے گئے مماس کے گرد گھمایا جائے تو ثابت کیجیے کہ اس طرح بنے گردشی ٹھوس کا حجم $7\sqrt{2}\pi a^3/60$ ہوگا۔

10۔ مکافی کے وترِ خاص کے ایک سرے اور راس کو ملانے والے وتر کے گرد اگر اِس وتر سے کٹے ہوئے مکافی کے قوس کو گھمایا جائے تو بنے ہوئے گردشی ٹھوس کا حجم نکالیے۔

11۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $y = x^2e^{-x}$ کے $x > 0$ والے قوس کو x-محور کے گرد گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم $3\pi/4$ ہوگا۔

12۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $r = a+b\sec\theta$ کو اُس کے لامتناہی مماس کے گرد گھمانے پر بنے ہوئے گردشی ٹھوس کا حجم $2\pi a^2(\frac{2}{3}a+\frac{1}{2}b\pi)$ ہوگا۔

جوابات

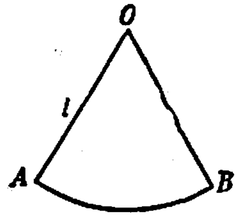
4. $32\pi a^3/15$. 8. $\frac{1}{2}\pi^2a^3$ 10. $(2/15\sqrt{5})\pi a^3$

9·4۔ مخروط کے فرسٹم (frustum of a cone) کی سطح کا رقبہ

ہم بہ آسانی دیکھ سکتے ہیں کہ جس قائم دائری مخروط (right circular cone) کے دائری قاعدے (circular base) کا نصف قطر (radius) r ہو اور جس کی ترچھی اونچائی (slant height) l ہو، اُس کی سطح کا رقبہ $\pi r l$ ہوتا ہے

ایسے مخروط کو پھاڑ کر اگر اِس کے کسی مولّد خط (generator) کے سہارے پھیلا دیں

تو ایک ایسا دائری قطع (circular sector) بنے گا جس کا نصف قطر OA ترچھی اونچائی کے برابر ہوگا اور جس کا قوس AB مخروط کے قاعدے (base) کے محیط (circumference) کے برابر ہوگا۔



تصویر 46

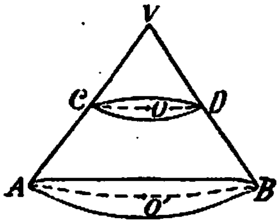
اس دائری قطع اور ساتھ ہی مخروط کی سطح کا رقبہ بھی πrl ہوتا ہے۔

اگر مخروط کا نصف۔ راسی۔ زاویہ (semi-vertical angle) α ہو تو ہم پاتے ہیں

$$r/l = \sin\alpha$$

لہذا مخروط کی سطح کا رقبہ $\pi l^2 \sin\alpha$ ہوگا۔

اب مخروط VAB کے فرسٹم $CABD$ پر غور کیجیے۔ مان لیجیے اُس کے دائری قاعدوں (circular bases) کے نصف قطر $O'A$ اور OC ترتیب وار r_1 اور r_2 ہیں اور اس کی ترچھی اونچائی CA, l_1 ہے۔



تصویر 47

فرسٹم کی سطح کا رقبہ

$$= \pi(AV^2 - CV^2)\sin\alpha$$

$$= \pi(AV - CV)(AV\sin\alpha + CV\sin\alpha)$$

$$= \pi AC(O'A + OC)$$

$$= \pi l(r_1 + r_2)$$

$= \pi \times$ (ترچھی اونچائی) $\times$ (دونوں قاعدوں کے نصف قطروں کا جوڑ)

9.5- گردشی سطح (Surface of revolution)

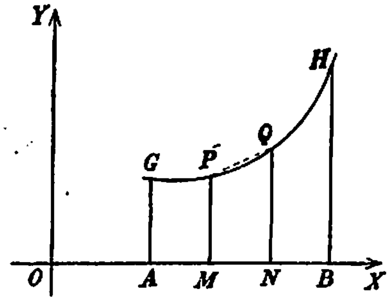
یہ ثابت کرنا کہ منحنی $y = f(x)$ کے فصلہ a اور b والے نقطوں کے درمیان والے قوس کو x - محور کے گرد گھمانے پر بنی ہوئی گردشی

سطح کا رقبہ

$$\int_a^b 2\pi y \frac{ds}{dx}\, dx = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{[1 + f'^2(x)]}\, dx$$

ہوتا ہے۔

مان لیجیے قوس پر $G[a, f(a)]$ کوئی ثابت نقطہ ہے اور $P(x, y)$ متغیر نقطہ ہے۔ مان لیجیے کہ قوس پر واقع نقطہ H کے مختصات $[b, f(b)]$ ہیں۔ قوس GP کو x-محور کے گرد گھمانے پر بنی گردشی سطح کے رقبے کو اگر σ کہیں، تو σ , x کا تفاعل ہے۔



تصویر 48

ہم قوس پر P کے قریب ایک نقطہ $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ لیتے ہیں۔ قوس PQ کے x-محور کے گرد گھمانے پر بنی گردش سطح کا رقبہ $\Delta\sigma$ ہے۔

مان لیجیے (قوس GP) $= s$ اور (قوس PQ) $= \Delta s$

وتر PQ کو x-محور کے گرد گھمانے پر ہمیں ایک ایسے مخروط کا فرسٹم ملتا ہے جس کی ترچھی اونچائی PQ ہے اور جس کے دائری قاعدوں کے نصف قطر MP اور NQ ہیں۔ اس فرسٹم کی سطح کا رقبہ

$$= \pi(PM + QN)\, PQ = \pi(y + y + \Delta y)\, PQ$$

مان لیجیے یہ $\Delta\Sigma$ ہے۔

اب ہم یہ مفروضہ (axiom) لے لیتے ہیں کہ

$$\lim \frac{\Delta \Sigma}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta \sigma}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{d\Sigma}{dx} = \frac{d\sigma}{dx}$$

اب

$$\frac{\Delta \Sigma}{\Delta x} = \pi(2y + \Delta y)\, \frac{PQ}{\Delta x}$$

$$= \pi(2y + \Delta y) \times \frac{PQ \text{ وتر}}{PQ \text{ قوس}} \times \frac{PQ \text{ قوس}}{\Delta x}$$

انتہائیں لینے پر ہم پاتے ہیں

$$\frac{d\Sigma}{dx} = 2\pi y \,.\, 1 \,.\, \frac{ds}{dx} = 2\pi y \frac{ds}{dx},$$

$$\therefore \quad \frac{d\sigma}{dx} = 2\pi y \,\frac{ds}{dx}\,.$$

اب

$$\int_a^b 2\pi y \,\frac{ds}{dx}\, dx = \int_a^b \frac{d\sigma}{dx}\, dx = \Big| \sigma \Big|_a^b$$

$= ($ پر σ کی قیمت $x = b) - ($ پر σ کی قیمت $x = a) =$

قوس GH سے بنی گردشی سطح کا رقبہ $=$

نوٹ : s کو غیر تابع متغیر لینے پر ہم دیکھتے ہیں کہ گردشی سطح کا رقبہ

$$= \int 2\pi y\, ds.$$

منحنی کی قطبی مساوات $r = f(\theta)$ کے لیے، جہاں کہ θ غیر تابع متغیر ہے، گردشی سطح کا رقبہ

$$= \int 2\pi y \,\frac{ds}{d\theta}\, d\theta.$$

منحنی کی پیرامیٹری مساوات $x = f(t),\ y = \varphi(t)$ کے لیے، جہاں t پیرامیٹر ہے، گردشی سطح کا رقبہ

$$= \int 2\pi y \,\frac{ds}{dt}\, dt.$$

مثالیں

1۔ ابتدائی خط کے گرد کارڈائڈ $r = a(1+\cos\theta)$ کو گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کی سطح کا رقبہ نکالیے۔

(تصویر 31 دیکھیے)

درکار سطح

$$= \int_0^{\pi} 2\pi y \frac{ds}{d\theta} d\theta.$$

اب

$$y = r\sin\theta = a\sin\theta(1+\cos\theta)$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]}$$

$$= \sqrt{[a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta]}$$

$$= 2a\cos\frac{\theta}{2}$$

اس لیے

$$\text{سطح} = \int_0^{\pi} 2\pi a\sin\theta(1+\cos\theta)\, 2a\cos\frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin\theta(1+\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \,.\, 2\cos^2\frac{\theta}{2} \,.\, \cos\frac{\theta}{2} d\theta$$

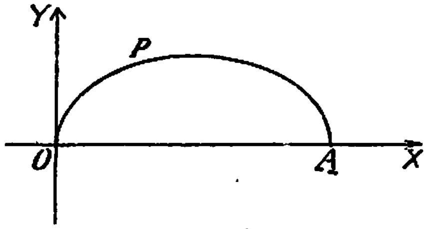
$$= 32\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos^4\varphi\, d\varphi, \quad (\text{جہاں } \varphi = \frac{\theta}{2})$$

$$= 32\pi a^2 \left| -\frac{\cos^5\varphi}{5} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{5}\pi a^2.$$

2۔ سائیکلائڈ

$$x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta)$$

کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے پر بنی گردشی سطح کا رقبہ نکالیے



تصویر 49

ہم پاتے ہیں

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left[\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right]}$$

$$= \sqrt{[a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta]}$$

$$= 2a\sin\frac{\theta}{2}$$

حصہ OPA کے لیے θ صفر سے 2π تک بدلتا ہے

$$\text{درکار سطح} = \int_0^{2\pi} 2\pi y\,\frac{ds}{d\theta}.\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\pi a(1-\cos\theta)\,.\,2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$= 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{\theta}{2}d\theta$$

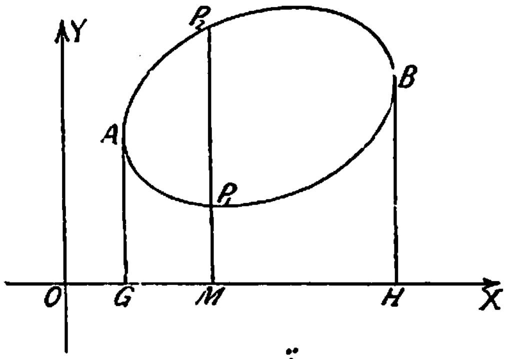
$$= 16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi,\ (\text{جہاں } \varphi = \frac{\theta}{2})$$

$$= 32\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\,d\varphi = 32\pi a^2\,.\,\frac{2}{3} = \frac{64\pi a^2}{3}$$

9·6 - پاپس کے مسئلے (Theorems of Pappus)

9·61 - گردشی حجم: کسی بند ہموار منحنی کو اُسی ہموار (plane) کے کسی خط کے گرد (جو منحنی کو نہ کاٹے) گھمانے پر بنے ٹھوس کا حجم، اُس منحنی سے گھرے رقبے کو اُس رقبے کے مرکز وسطانی (centroid) کے طے کیے راستے کی لمبائی سے ضرب دے کر حاصل ہوتا ہے۔

ہم x-محور کو گردش کا محور لے لیتے ہیں۔ مان لیجیے منحنی ایسا ہے کہ منحنی پر فصلہ a اور b والے نقطوں کے درمیان y-محور کے متوازی کوئی بھی خط اُسے صرف دو نقطوں P_1 اور P_2 پر کاٹتا ہے۔



تصویر 50

مان لیجیے $MP_1 = y_1$ ، $MP_2 = y_2$ اور یہ دونوں x کے تفاعل ہیں۔ x کی قیمت a سے b تک بدلتی ہے۔

اب گردشی ٹھوس کا حجم V

$$V = \pi\int_a^b y_2^2dx - \pi\int_a^b y_1^2dx$$

$$= \pi\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx \qquad \text{(1)}$$

ساتھ ہی منحنی سے گھرے رقبے کے مرکزِ وسطانی (centroid) کا عرض $\bar{y}$ ذیل ہے:-

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}(y_1+y_2)\,(y_2-y_1)\,dx}{A}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\int_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx}{A}, \qquad \text{(2)}$$

جہاں A اُس قطعہ کا رقبہ ہے۔

اب (1) اور (2) سے ہم پاتے ہیں

$$V = 2\pi\bar{y}A$$

جس سے کہ نتیجہ ثابت ہوگیا کیونکہ مرکز وسطانی کے طے کیے ہوئے راستے کی لمبائی $2\pi\bar{y}$ ہے۔

9.7 ۔ **گردشی سطح:** کسی بند ہموار منحنی کو اس ہموار کے کسی خط کے گرد (جو منحنی کو نہ کاٹے) گھمانے پر بنی ہوئی گردشی سطح کا رقبہ، منحنی کی لمبائی کو منحنی کے مرکز وسطانی کے طے کیے ہوئے راستے کی لمبائی سے ضرب دے کر حاصل ہوتا ہے۔

ہم x-محور کو گردش کا محور لے لیتے ہیں

(تصویر 50 دیکھیے)

گردشی سطح S

$$S = \int_0^l 2\pi y\, ds. \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

جہاں l منحنی کے قوس کی لمبائی ہے۔ یہاں ہم نے y کو s کا تفاعل مانا ہے۔

مرکز وسطانی کا عرض $\bar{y}$ ذیل ہے:-

$$\bar{y} = \frac{\int_0^l y\, ds}{l} \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

اب (1) اور (2) سے

$$S = 2\pi\bar{y}l$$

جس سے نتیجہ ثابت ہوجاتا ہے کیونکہ $2\pi\bar{y}$ مرکز وسطانی کے طے کیے ہوئے راستے کی لمبائی ہے۔

مشقیں

1۔ نصف قطر a والے کرہ (sphere) کا حجم نکالیے۔

2- پیرابولا $y^2 = 4ax$ کے وتر خاص سے کٹنے والے مبدا کی طرف والے حصہ کو x-محور کے گرد گھمانے پر بنی گردشی سطح کا رقبہ نکالیے۔

3- مکافی $y^2 = 4ax$ کے وتر خاص سے کٹنے والے مبدا کی طرف والے قوس کو مبدا پر والے مماس کے گرد گھمانے پر بنی چرخی نما گردشی سطح کا رقبہ نکالیے۔

4. ایسٹرائڈ $x = a\cos^3 t\ ,\ y = a\sin^3 t$ کو x-محور کے گرد گھمانے پر بنی ہوئی گردشی سطح کا رقبہ نکالیے۔

5. لیمنسکیٹ $r^2 = a^2\cos 2\theta$ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے پر بنی ہوئی گردشی سطح کا رقبہ نکالیے۔

6. کارڈائڈ $r = a(1-\cos\theta)$ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے پر بنی گردشی سطح کا رقبہ نکالیے۔

7- منحنی $r = 2a\cos\theta$ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے پر بنی گردشی سطح کا رقبہ نکالیے۔

8- ثابت کیجیے کہ سائکلائڈ

$$x = a(\theta+\sin\theta)\ ,\ y = a(1+\cos\theta)$$

کے دو متواتر (cusps) کو x-محور کے گرد گھمانے پر بنے رقبے کا سائیکلائڈ اور x محور کے گرد گھرے رقبے سے تناسب 64 اور 9 کا ہے۔

9- منحنی $8a^2y^2 = x^2(a^2-2x^2)$ کا پہلے ربع والا قوس X-محور اور Y-محور کے گرد گھمائے جانے پر سطحیں A اور B بناتا ہے۔ یہ ثابت کیجیے کہ A اور B کے رقبوں میں $3\sqrt{2}$ اور 2 کا تناسب ہے۔

یہ بھی دکھائیے کہ پہلے ربع والے قوس کو y-محور کے گرد گھمانے پر بنے ٹھوس کا حجم وہی ہوگا جو کہ اس قائم اسطوانہ (right cylinder) B کا ہے جس کے دائری قاعدے کا نصف قطر $a/4$ ہو اور اونچائی پہلے ربع والے قوس کی لمبائی کے برابر ہو۔

10- ثابت کیجیے کہ علیپس $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$ کو x-محور کے گرد گھمانے پر بنی گردشی سطح کا رقبہ

$$2\pi ab[\sqrt{(1-e^2)}+(1/e)\sin^{-1} e]$$

ہوگا، جہاں e علیپس کا خروج المرکز (eccentricity) ہے۔

11۔ نصف قطر a والے دائرے کا ایک قوس اپنے وتر خاص کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ اگر قوس کی لمبائی $2a\alpha$ ہو $(\alpha < \pi/2)$ تو ثابت کیجیے کہ گردشی سطح کا رقبہ

$$4\pi a^2 (\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$$ ہوگا۔

12۔ منحنی $y = \sin x$ کے $x = 0$ اور $x = \pi$ کے درمیان کے قوس کو اگر x۔محور کے گرد گھمائیں تو ثابت کیجیے کہ گردشی سطح کا رقبہ

$$\pi^2 [\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})]$$ ہوگا۔

13۔ ثابت کیجیے کہ ٹریکٹرکس (Tractrix)

$$x = a\cos t + \tfrac{1}{2}a \log\tan^2\frac{t}{2}, \quad y = a\sin t$$

کو اُس کے لامتناہی مماس کے گرد گھمانے پر بنی سطح کا رقبہ نصف قطر a والے کرہ (sphere) کے رقبے کے برابر ہوگا۔

جوابات

1. $4a^2\pi$.
2. $8a^2\pi(2\sqrt{2}-1)/3$.
3. $a^2\pi[3\sqrt{2}-\log(\sqrt{2}+1)]$.
4. $12\pi a^2/5$.
5. $2\sqrt{2}\pi a^2(\sqrt{2}-1)$.
6. $32\pi a^2/5$.
7. $4\pi a^2$.

باب 9 پر مشقیں

1۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $x = t^2,\ y = t - \frac{t^3}{3}$ کے لوپ کو x۔محور کے گرد گھمانے پر بنے ٹھوس کی سطح کا رقبہ 3π اور اُس کا حجم $3\pi/4$ ہوگا۔

2۔ نصف قطر a والے دائرے کے ایک ربع اور اُس کے کنارے پر مماس کے درمیان گھرا ہوا رقبہ اُن مماسوں میں سے کسی ایک کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ

(i) گردشی ٹھوس کا حجم $\pi a^3/6\ (10-3\pi)$ ہوگا۔

(ii) گردشی سطح کا رقبہ $\pi(\pi-2)\ a^2$ ہوگا۔

3۔ سائیکلائڈ

$$x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta)$$

کا نقطوں $(0, 0)$ اور $(a\pi, 2a)$ کے درمیان والا قوس ان نقطوں کو ملانے والے وتر کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ گردشی سطح کا رقبہ

$$\frac{32\,a^2\pi\,(\pi-2)}{3\sqrt{(\pi^2+4)}}$$ ہوگا۔

4۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $x^2y^2 = a(x-a)(x-b)^2$ کے لوپ کو x۔محور کے گرد گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کا حجم

$$\pi a\{\tfrac{1}{2}a^2+2ab-\tfrac{3}{2}b^2+b(2a+b)\log(b/a)\}.$$

5۔ علیپس $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$ کو محور اکبر کے گرد گھمانے پر بنے ٹھوس میں ایک دائری کاٹ والا اسطوانہ نما (cylindrical) سوراخ بنایا گیا ہے جس کا محور خود محور اکبر (major axis) ہے۔ ثابت کیجیے کہ باقی بچے ٹھوس کا حجم

$$4\pi b^2l^3/3a^2$$

ہے جہاں کہ $2l$ سوراخ کی لمبائی ہے۔

6۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $y = c\cosh(x/c)$ کے $(0, c)$ اور (x, y) نقطوں کے درمیان والے قوس کو x۔محور کے گرد گھمانے پر بنے ہوئے گردشی سطح کا رقبہ

$$\pi c\left(x+c\sinh\frac{x}{c}\cosh\frac{x}{c}\right)$$ ہوگا۔

7۔ ثابت کیجیے کہ علیپس $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$ کے پہلے ربع والے قوس کو خط $y = b$ کے گرد گھمانے پر بنے ٹھوس کا حجم $\pi ab^2\left(\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$ ہوگا۔

8۔ منحنی $y^2 = b^2\log(a/x)$ کے $x = a$ اور $x = b$ والے حصے کو (جہاں

$0 < a < b$) x-محور کے گرد گھمانے پر بنے ٹھوس کا حجم نکالیے۔

9۔ اگر مکافی $2a = r(1+\cos\theta)$ کے باہر لیکن کارڈائڈ $r = 2a(1+\cos\theta)$ کے اندر کا رقبہ ابتدائی خط کے گرد گھمایا جائے تو ثابت کیجیے کہ گردشی ٹھوس کا حجم $18\pi a^3$ ہوگا۔

10۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $r^2 = a^2\cos 2\theta$ کے ایک لوپ کو خط $\theta = \frac{1}{2}\pi$ کے گرد گھمانے پر بنے ٹھوس کا حجم $\pi^2 a^3/4\sqrt{2}$ ہوگا۔

11۔ ثابت کیجیے کہ ٹریکٹرکس (Tractrix)

$$x = a\left[\cos t + \tfrac{1}{2}\log\tan^2 \tfrac{1}{2}t\right], \quad y = a\sin t$$

کو اس کے لامتناہی مماس کے گرد گھمانے پر ٹھوس کا حجم $2\pi a^3/3$ ہوگا۔

12۔ ثابت کیجیے کہ ٹریکٹرس

$$x = a\,(u - \tanh u) \quad y = a\,\text{sech}\, u$$

کو OX کے گرد گھمانے پر بنی سطح کا رقبہ نصف قطر a والے کرہ کی سطح کے رقبے کے برابر ہوگا۔

13۔ منحنی $y = \tanh x$، اس کے لامتناہی مماس $y = 1$ اور y-محور کے گرد گھرا ہوا رقبہ اگر لامتناہی مماس کے گرد گھمایا جائے تو ثابت کیجیے کہ گردشی ٹھوس کا حجم $\pi\log(4/e)$ ہوگا۔

14۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $r = a\,(1+2\cos\theta)$ ایک بیرونی اور ایک اندرونی لوپ سے مل کر بنا ہے۔ اگر اندرونی لوپ کو ابتدائی خط کے گرد $180°$ گھمائیں تو ثابت کیجیے کہ بنے ہوئے ٹھوس کا حجم $\pi/12$ ہوگا۔

15۔ منحنی $r = a\,(1+\cos\theta)$ کا $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ کے درمیان والا قوس اگر خط $\theta = 0$ کے گرد گھمایا جائے تو ثابت کیجیے کہ گردشی ٹھوس کا حجم $\frac{5}{4}a^3\pi$ اور گردشی سطح کا رقبہ $\frac{4}{5}(8-\sqrt{2})\,a^2\pi$ ہوگا۔

16۔ کارڈائڈ $r = a\,(1+\cos\theta)$ کے $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ والے قوس کو خط

17 ـ a کے گرد گھمانے پر بنی گردشی سطح کا رقبہ نکالیے۔

جوابات

8. $\pi b^2 [a-b-b \log (a/b)]$.   16. $48\sqrt{2}\pi a^2/5$.

متفرق مشقیں 3

1 ـ ثابت کیجیے کہ منحنی $y = c \cosh (x/c)$ پر کوئی دو نقطوں کے درمیان کے قوس اُن نقطوں کے عرضوں اور x-محور کے درمیان گھرا ہوا رقبہ، اُس قوس کی لمبائی کے تناسب سے بدلتا ہے۔

2 ـ ثابت کیجیے کہ منحنی $y^2 (a+x) = x^2 (3a-x)$ کے کسی بھی نقطہ کو

$$x = a \sin 3\theta \operatorname{cosec} \theta, \quad y = a \sin 3\theta \sec \theta$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہ بھی ثابت کیجیے کہ منحنی کے لوپ کا رقبہ اور منحنی اور اُس کے لامتناہی مماس کے درمیان گھرا ہوا رقبہ دونوں $3\sqrt{3}a^2$ ہیں۔

3 ـ ثابت کیجیے کہ اسٹرائڈ میں کوئی بھی مماس منحنی کے دو کناروں کے درمیان کے قوس کو ایسے قوسوں میں تقسیم کرتا ہے جن کی لمبائیوں کا وہی تناسب ہے جو محاور کے درمیان کٹے ہوئے مماس کے حصّوں کا۔

4 ـ منحنی $y = a \cosh (x/a)$ پر دو نقطے $A (0, a)$ اور $P (x, y)$ ہیں اور s قوس AP کی لمبائی ہے۔ اگر منحنی x-محور کے گرد گردش کرے تو ثابت کیجیے کہ گردشی ٹھوس کا وہ حصہ جو کہ A اور P سے جانے والی x-محور کے عمود ہموار سطحوں کے درمیان آتا ہے، اُس کی گردشی سطح کا رقبہ S اور حجم V میں یہ رشتہ ہے:—

$$aS = 2V = \pi a (ax+sy)$$

5 ـ منحنی $6xy = x^4+3$ کے $x = 1$ اور $x = 4$ والے نقطوں کے درمیان کے

قوس کی لمبائی نکالیے۔ اگر اِس قوس کو OY کے گرد گھمائیں تو بنے ہوئے گردشی سطح کا رقبہ نکالیے۔

6۔ منحنی $9y^2 = x(3-x)^2$ کے مبدا سے لے کر نقطہ (x, y) تک کے قوس کی لمبائی اگر s ہو تو ثابت کیجیے کہ $3s^2 = 3y^2+4x^2$.

اگر اِس منحنی کے لوپ کا محیط S ہو، اُس کا رقبہ A ہو اور لوپ کی زیادہ سے زیادہ چوڑائی B ہو، تو ثابت کیجیے کہ

$$A = \frac{3}{10} BS$$

7۔ منحنی $25a^2xy^2 = (x^2+5a^2)^2$ کے $x = a$ اور $x = 4a$ والے نقطوں کے درمیان قوس کی لمبائی۔

8۔ $y = e^{-kx} \sin px$ اور $y = 0$ کے درمیان کے سبھی لوپوں کے رقبوں کا جوڑ نکالیے۔

9۔ $x = 0$ اور $x = \pi$ کے درمیان، x-محور اور منحنی

$$y = a(\sin x+\tfrac{1}{3}\sin 3x+\tfrac{1}{5}\sin 5x)$$

سے گھرا ہوا رقبہ A نکالیے اور اِسے x-محور کے گرد گھمانے پر بنے ٹھوس کا حجم نکالیے اور دکھائیے کہ $4V = \pi^2 aA$

10۔ ثابت کیجیے کہ مکافی کے کسی قطع (segment) کا رقبہ اُس مثلث کے رقبے کا دو تہائی ہوتا ہے جو قطع کو قاعدہ (base) لے کر اُسے کے سروں پر کھینچے گئے مماسوں سے بنا ہو۔

11۔ اگر کسی مکافی کے لمبائی c والے ماسکی وتر (focal chord) سے کٹے ہوئے قطع کا رقبہ A ہو تو ثابت کیجیے کہ وترِ خاص $36A^2/c^3$ ہوگا۔

12۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $x^5+2a^2x^2y-a^3y^2 = 0$ کے لوپ کا رقبہ $32a^2/105$ ہے۔

13۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $r = 3\,\text{cosec}\,\theta-5$ کے لوپ کا رقبہ

$12-30\log 3+25(\tfrac{1}{2}\pi-\tan^{-1}\tfrac{3}{4})$ ہے۔

14- منحنی $r^2 = a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta$. (جبکہ $a^2 > b^2$) کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے پر بنے ٹھوس کا حجم اور گردشی سطح کا رقبہ نکالیے۔

15- علیس $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$ کا وتر خاص سے کٹا ہوا قطع اگر قریبی سرے پر کھینچے گئے مماس کے گرد گھمایا جائے تو بنی ہوئی چرخی کا حجم معلوم کیجیے۔

16- ذیل کے لوسائی (loci) کے درمیان گھرے رقبوں کو OX کے گرد گھمانے پر بنے ٹھوس کے حجم نکالیے:

(i) $x^2+y^2 = 25$, $3x-4y = 0$, $y = 0$ کے درمیان پہلے ربع والا۔

(ii) $y^2 = 4ax$, $x^2+y^2-12a^2 = 0$

17- ثابت کیجیے کہ $y = \log x$, $y = 0$ اور $x = 2$ کے درمیان گھرے رقبے کو X- محور کے گرد گھمانے پر بنے ٹھوس کا حجم $2\pi(1-\log 2)^2$ ہوگا۔

18- زنجیرہ $y = c\cosh(x/c)$ اُس کے برپیچ (evolute) اور اُس involute کو لیجیے جو کہ $x = 0$ پر زنجیرہ سے ملتا ہے۔ اگر ان سے متعلق قوسوں کی لمبائیاں نقطہ $x=0$ سے ناپنے پر ترتیب وار s, s_1 اور s_2 ہوں تو ثابت کیجیے کہ

$$\frac{2s_1s_2}{s^2} = \log\left(1+\frac{s_1^2}{s^2}\right)$$

اشارہ: اس سوال میں involute ذیل ہے:-

$$x = c(\cos t+\log\tan\tfrac{1}{2}t),\ y = c$$

19- علیس $l/r = 1+e\cos\theta$ کا رقبہ نکالیے۔ نصف قطر a کا کسی اندرونی نقطے کی نسبت سے، جس کا مرکز سے فاصلہ c ہو، پیڈل (pedal) کھینچیے اور ثابت کیجیے کہ اُس کا رقبہ $\frac{\pi}{2}(2a^2+c^2)$ ہے

(کسی منحنی کا پیڈل (pedal) کسی نقطہ کی نسبت سے، اُن نقطوں کا طریق (Locus) ہوتا ہے جن پر اُس نقطے سے ڈالے گئے عمود منحنی کے مماسوں سے ملتے ہوں۔

20 ثابت کیجیے کہ نصف قطر a والے دائرے کے لیے ایسے نقطے کی نسبت سے جس کی

مرکز سے دوری $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ہو، پیڈل کے سب سے چھوٹے لوپ کا رقبہ $\frac{1}{2}(2\pi-3\sqrt{3})a^2$ ہوگا۔

21۔ قطبی مساوات

$$r = a(2\cos\theta+\cos 3\theta)$$

والے منحنی کی ترسیم کیجیے

ثابت کیجیے کہ نصف قطری سمتیہ کے اعلیٰ ترین قیمتیں $3a$ اور $a/3\sqrt{3}$ ہیں

بڑے لوپ کا رقبہ

$$(\tfrac{5}{8}\pi+\tfrac{9}{8}\sqrt{3})\,a^2$$

اور چھوٹے لوپ کا رقبہ

$$(\tfrac{5}{16}\pi-\tfrac{9}{16}\sqrt{3})\,a^2.$$ ہے۔

22۔ منحنی $y^4-2axy^2+x^4 = 0$ کی ترسیم کیجیے اور ثابت کیجیے کہ اس کو x۔محور کے گرد گھمانے پر بنی گردشی سطح کا رقبہ $\pi a^2 / 2\sqrt{2}$ ہوگا اور گردشی ٹھوس کا حجم $2\pi a^3 / 3$ ہوگا۔

23۔ منحنی $r = a(\sec\theta-\cos\theta)$ اور خط $r = a\sec\theta$ کے درمیان گھرا ہوا رقبہ نکالیے۔

24۔ ثابت کیجیے کہ منحنی

$$x = a\sqrt{(1-t^2)},\quad y = at\sqrt{(1-t^2)}$$

کے لوپ کا رقبہ $2a^2/3$ ہوگا، جہاں کہ جذر کی (square root) مثبت علامت ہے۔

25۔ ذیل قطع کا رقبہ نکالیے :۔

$$x^2+y^2 \leqslant 9,\ y^2 \leqslant 8x$$

26۔ نقطہ $(a, 0)$ کو ثابت نقطہ لیتے ہوئے منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{a}$ کی نجی مساوات حاصل کیجیے۔

27۔ اگر A کسی پیرابولا کا راس ہو، P اس پر کوئی بھی نقطہ ہو اور P, PN کا معین ہو تو ثابت کیجیے کہ P کے لا انتہا بڑھنے پر

$$\frac{(\text{قوس } AP) - AN}{PN}$$

مائل بہ صفر ہوتا ہے۔

ثابت کیجیے کہ لیماسن $r = a+b\cos\theta$ کا محیط (perimeter) اُس علیلس کے محیط کے برابر ہے جس کے نصف محاور (semi-axes) $a+b$ ، $a-b$ ہوں۔

29۔ PQ مکافی $y^2=4ax$ کا ایک متغیر وتر ہے جس کی مستقل لمبائی $2c$ ہے۔ ثابت کیجیے کہ P اور Q پر کھینچے گئے مماسوں کے نقطہ تقاطع کا لوکس

$$x=\frac{y^2}{4a}-\frac{c^2a}{4a^2+y^2}$$

ہوگا۔ یہ بھی ثابت کیجیے کہ اِس منحنی اور دیے ہوئے پیرابولا کے درمیان کا رقبہ $\frac{\pi}{2}c^2$ ہوگا۔

30۔ ثابت کیجیے کہ منحنی

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-h^2x^2}$$

کو y-محور کے گرد گھمانے پر بنے ٹھوس کا حجم $\sqrt{\pi}/h$. ہوگا۔

31۔ ثابت کیجیے کہ $t=\frac{\pi}{2}$ کو ثابت نقطہ لینے پر ٹریکٹرکس

$$x=a\cos t+a\log\tan\tfrac{1}{2}t,\ y=a\sin t,$$

کی نجی مساوات

$s=a\log\cos\psi.$ ہے

32۔ ثابت کیجیے کہ منحنی

$$y=a\log\sec(x/a)$$

کی نجی مساوات

$s=a\log(\tan\psi+\cos\psi)$ ہے۔

33۔ $(a, 0)$ کو ثابت نقطہ لے کر مساوی زاویائی کمانی (equiangular spiral)

$$r=ae^{\theta\cot\alpha}$$

کی نجی مساوات نکالیے۔

34۔ کارڈائڈ $r = a(1+\cos\theta)$ کی کارٹیزی پیرامیٹری مساوات حاصل کیجیے جبکہ $\theta = 0$ سے ناپے گئے قوس کی لمبائی کو پیرامیٹر لیا جائے۔

35۔ ثابت کیجیے کہ لیمنسکیٹ $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ کو قطب پر کے ایک مماس کے گرد گھمانے پر بنی گردشی شکل کی سطح کا رقبہ $4\pi a^2$ ہوگا اور گردشی حجم $\pi^2 a^3/4$ ہوگا۔

36۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $r \cos\theta = a \cos 2\theta$ کے لوپ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے پر بنے ٹھوس کا حجم $2\pi a^3 (\log_e 2 - \frac{2}{3})$ ہوگا۔

37۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $x^7 + y^7 = 7ax^3y^3$ کے لوپ کا رقبہ اس منحنی کی لامتناہی شاخ اور اس کے لامتناہی مماس کے درمیان کے رقبے کے برابر ہے۔

38۔ منحنی $x^4 = ay^3 - axy^2$ کی ترسیم کیجیے اور ثابت کیجیے کہ اس کے لوپ کا رقبہ $a^2/210$ ہے۔

39۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $y^4 - 2c^2y^2 + a^2x^2 = 0$ کے کسی بھی لوپ کا رقبہ $4\sqrt{2}c^3/3a$. ہے۔

40۔ منحنی

$$x = a(\cos\varphi + \log\tan \tfrac{1}{2}\varphi),\ y = a \sin\varphi.$$

کے لیے اگر s سے اُس قوس کی لمبائی ظاہر کریں جسے y-محور سے ناپا گیا ہو تو ثابت کیجیے کہ x کے لامتناہی ہونے پر

$$\lim (s - x) = a(1 - \log 2)$$

41۔ منحنی $x^2y^2 = a^2(x^2+y^2)$ اور اُس کے لامتناہی مماسوں کے درمیان گھرا ہوا کل رقبہ نکالیے۔

42۔ منحنی $x^2(x^2+y^2) = a^2(y^2-x^2)$ اور اُس کے لامتناہی مماسوں کے درمیان گھرا ہوا کل رقبہ نکالیے۔

43-اگر کسی منحنی کے لیے

$$x \sin \theta + y \cos \theta = f'(\theta)$$
$$x \cos \theta - y \sin \theta = f''(\theta)$$

ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$s = f(\theta) + f''(\theta) + c.$$

جوابات

2. $a^3 \log (250/e^3)$.

5. $87/8$, $(255 + 8 \log 2)/4$.

7. $67a/10$.

8. $p(e^{k\pi/p}+1)/(p^2+k^2)(e^{k\pi/p}-1)$.

9. $518a^2/525$; $259\pi^2a^3/450$

14. $\pi\left[\dfrac{b^2a}{2}+\dfrac{a^3}{3}+\dfrac{b^4}{4\sqrt{(a^2-b^2)}}\log\dfrac{2a^2-b^2+2a\sqrt{(a^2-b^2)}}{b^2}\right]$;

$\pi\left[a^2+\dfrac{b^4}{\sqrt{(a^4-b^4)}}\log\dfrac{a^2+\sqrt{(a^4-b^4)}}{b^2}\right]$.

15. $(2b\pi/3a)\,[6a^2b-b^3-3ab\sqrt{(a^2-b^2)}-3a^3\sin^{-1}(b/a)]$.

16. $50\pi/3$, $\frac{8}{3}(6\sqrt{3}-5)\pi a^3$,

23. $3a^2\pi/4$.

25 $2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}+\dfrac{9\pi}{4}-\dfrac{9}{2}\sin^{-1}\tfrac{1}{3}\right)$.

26 $s = \dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{\cos\psi-\sin\psi}{(\cos\psi+\sin\psi)^2}+\dfrac{\sqrt{2}a}{4}\log(1+\sqrt{2})$

$-\dfrac{\sqrt{2}a}{4}\sinh^{-1}\dfrac{\cos\psi-\sin\psi}{\cos\psi+\sin\psi}$.

33 $s = a\sec\alpha\left[e^{\psi\cot\alpha}-1\right]$

34 $x = 2a\left[1-\dfrac{s^2}{8a^2}\right]\left[1-\dfrac{s^2}{16a^2}\right]$, $y = s\left[1-\dfrac{s^2}{16a^2}\right]^{3/2}$

41. $4a^2$.

42. $a^2(\pi+2)$.

10

مرکزِ ثقل ; جمود کا معیارِ اثر

[Moment of Inertia] [Centre of Gravity]

10·1 تمہید (Introduction) ; 7, 8 اور 9 میں ہم نے جیومٹری میں تکملی احصار کے استعمال پڑھے جو کہ تین قسم کی چیزوں، لمبائیاں، رقبے اور حجم نکالنے سے متعلق تھے۔ اس باب میں تکملی احصار کا استعمال میکینکی حساب (Mechanics) میں کریں گے اور اس سلسلے میں مرکزِ ثقل اور جمود کے معیارِ اثر (*Moment of Inertia*) پر غور کریں گے۔

کسی کرڑے مادّے کے نظام (rigid material system) کے مرکزِ ثقل کی اہمیت اِس اعتبار سے خاصی ہے کہ اکثر statics اور Dynamics میں بھی کسی دیے ہوئے کرڑے مادّے کے نظام کے بدلے ہم ایسا ذرّہ تصور کرتے ہیں جو کہ اُس نظام کے مرکزِ ثقل پر مقیم ہو اور جس کا وزن اُس دیے ہوئے نظام کے وزن کے برابر ہو۔ اِس بات کو ذہن میں رکھتے ہوئے کہ اِس کتاب میں ہمارا سابقہ صرف معمولی تکملوں سے رہا ہے، دوہرے (double) یا تیہرے (triple) تکملوں سے نہیں، اِس لیے یہاں یہ ممکن نہیں کہ ہم کسی بھی اختیاری نظام (*arbitrary* system) کے مرکزِ ثقل حاصل کرنے کے فارمولے نکال سکیں۔ لہٰذا، ہم صرف کچھ خاص قسم کے نظاموں پر ہی

غور کریں گے۔

کڑے اجسام (rigid bodies) کی (Dynamics) میں کسی دیے ہوئے خط کے گرد کڑے مادّے کے نظام کے جمود کے معیار اثر کی بھی خاصی اہمیت ہے۔ اس سلسلے میں بھی ہم صرف کچھ خاص قسم کے نظاموں پر ہی غور کریں گے۔

10·2- مرکزِ ثقل: کسی دیے ہوئے کڑے مادّی نظام میں مادّے کی تقسیم جدا جدا (Discrete) یا مسلسل (Continuous) طریقوں سے ہو سکتی ہے۔ مادّے کی تقسیم جدا جدا ہو تو Statics میں ثابت کیا گیا ہے کہ اگر کسی ہموار سطح پر n ذرّے ہوں جن کے وزن

$$w_1, w_2, \ldots\ldots, w_r, \ldots\ldots, w_n$$

ہوں اور اُن کے مقامات کے مختصات

$$(x_1, y_1), \ldots\ldots, (x_2, y_2), \ldots\ldots, (x_r, y_r), \ldots\ldots, (x_n, y_n)$$

ہوں تو اس نظام کا مرکزِ ثقل $(\bar{x}, \bar{y})$ ذیل فارمولے سے حاصل ہوتا ہے:-

$$(1) \quad \cdots\cdots\cdots \quad \bar{x} = \frac{\sum_{r=1}^{n} w_r x_r}{\sum_{r=1}^{n} w_r}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{r=1}^{n} w_r y_r}{\sum_{r=1}^{n} w_r}$$

اگر ہر نقطہ پر کشش یکساں ہو اور اُسے g سے ظاہر کریں جس سے کہ

$$w_r = m_r g$$

ہو، جہاں m_r اُس ذرّے کی مقدار ہے جس کا وزن w_r ہے، تو ہم پاتے ہیں

$$(2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \bar{x} = \frac{\sum_{r=1}^{n} m_r x_r}{\sum_{r=1}^{n} m_r}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{r=1} m_r y_r}{\sum_{r=1}^{n} m_r}$$

رشتہ (2) کی وجہ سے مرکز کشش کو اکثر مرکز مقدار یا مرکز جمود (Centre of Inertia) بھی کہتے ہیں۔

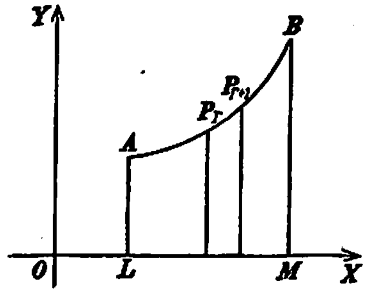
اب ہم جدا جدا تقسیم کے لیے اوپر لکھے فارمولے کی توسیع کر کے مسلسل تقسیم ہونے پر مرکزِ ثقل کا فارمولا نکالیں گے۔

ہم دیکھیں گے کہ مسلسل تقسیم والی صورت میں مرکز ثقل کا فارمولا جدا جدا تقسیم والے فارمولے سے ایک انتہائی عمل (limiting process) سے حاصل ہوتا ہے۔ یہ عمل یہ ہے کہ مسلسل تقسیم کو پہلے مناسب طریقے سے چُنے گئے ذرّوں کے نظام سے بدلا جائے گا اور اس کے مرکزِ ثقل سے انتہائی عمل کے ذریعے مسلسل تقسم کے لیے مرکزِ ثقل معلوم کیا جائے گا۔

10·3 - مادّہ کی مسلسل تقسیم کے لیے مرکزِ ثقل نکالنا

10·31 - ایک ہموار یکساں منحنی (plane uniform cur...) کا مرکزِ کشش : منحنی

$y = f(x)$ کا وہ حصہ لیجیے جو کہ فصلہ a اور b والے نقطوں A اور B کے درمیان ہے۔ دراصل ہم یہ تصور کرتے ہیں کہ یہ قوس ایک پتلے کڑے تار کی شکل میں ہے۔



تصویر 51

OX پر AL اور BM عمود ڈالیے اور وقفہ $[a, b]$ کو لمبائی h کے n برابر کے ٹکڑوں میں بانٹیے اس طرح ہم کو فصلوں (abscissae)

$$a, a+h, \ldots, a+(r-1)h, a+rh \ldots\ldots a+nh$$

والے نقطے ملتے ہیں، جن کو ہم دوبارہ

$$x_0, x_1, \ldots\ldots, x_{r-1}, x_r, \ldots\ldots, x_n$$

لکھ سکتے ہیں۔ اِن نقطوں پر عرض کھینچیے جو کہ قوس AB سے نقطوں

$$P_0 = A, P_1, P_2, \ldots\ldots, P_{r-1}, P_r, \ldots\ldots, P_n = B$$

پر ملیں۔ ہم لکھتے ہیں

$$y_r = f(x_r) = f(a+rh)$$

مان لیجیے $s_r = (AP_r$ قوس)

اب ہم قوس $P\ P_{r+1}$ کی جگہ اس کے شروع کے نقطے P_r پر اس قوس کے برابر کا وزن $\rho\,(s_{r+1}-s_r)$ تصور کرتے ہیں، جہاں کہ ρ کثافت (density) یعنی "مادہ فی اکائی لمبائی" ہے۔

اس طرح ہمیں n ذرّوں کا نظام ملتا ہے جن کی مقداریں (masses)

$$\rho\,(s_1-s_0),\ \ldots\ldots,\ \rho\,(s_{r+1}-s_r),\ \ldots\ldots,\ \rho\,(s_n-s_{n-1})$$

ہیں اور یہ ان نقطوں پر مقیم ہیں جن کے مختصات

$$(x_0, y_0),\ \ldots\ldots,\ (x_r, y_r),\ \ldots\ldots,\ (x_{n-1}, y_{n-1})$$

ہیں۔ اس نظام کا مرکز ثقل

$$\left[\frac{\Sigma\rho(s_{r+1}-s_r)x_r}{\Sigma\rho(s_{r+1}-s_r)},\ \frac{\Sigma\rho(s_{r+1}-s_r)y_r}{\Sigma\rho(s_{r+1}-s_r)}\right]$$

یعنی

$$\left[\frac{\Sigma(s_{r+1}-s_r)x_r}{\Sigma(s_{r+1}-s_r)},\ \frac{\Sigma(s_{r+1}-s_r)y_r}{\Sigma(s_{r+1}-s_r)}\right]$$

ہوگا جبکہ $r = 0$ سے $n-1$ تک ہے۔

ان دونوں فارمولوں میں نسب نما l ہے، جو کہ پورے قوس کی لمبائی ہے۔

ہم لکھتے ہیں

$$(s_{r+1}-s_r)x_r = x_r\left(\frac{s_{r+1}-s_r}{x_{r+1}-x_r}\right)(x_{r+1}-x_r) = x_r\frac{s_{r+1}-s_r}{x_{r+1}-x_r}\cdot h.$$

انتہا لینے پر ہمیں ملے گا

$$\lim_{x_{r+1}\to x_r}\left(\frac{s_{r+1}-s_r}{x_{r+1}-x_r}\right) = \left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=x_r}$$

اس لیے تخمیناً ہم لکھتے ہیں

$$(s_{r+1}-s_r)\, x_r = x_r \left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=x_r} \cdot h$$

جس سے کہ مرکز ثقل

$$\left[\frac{h\sum\limits_{r=0}^{n-1} x_r \left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=x_r}}{l},\ \frac{h\sum\limits_{r=0}^{n-1} y_r \left(\frac{ds}{dy}\right)_{y=y_r}}{l}\right]$$

ملتا ہے۔

تکملی احصار کے بنیادی مسئلے (fundamental theorem) سے ہم دیکھتے ہیں کہ انتہائیں لینے پر یہ ذیل کی طرف مائل ہوگا:-

$$\frac{\int_a^b x\,\frac{ds}{dx}\,dx}{l},\ \frac{\int_a^b y\,\frac{ds}{dy}\,dx}{l}$$

جو کہ دیے ہوئے منحنی کے مرکز ثقل کے محصات ہیں۔

نوٹ 1 : ہم دیکھتے ہیں کہ اگر اوپر کے عمل میں $P_r P_{r+1}$ کی مقدار نقطہ P_r پر لینے کے بجائے P_{r+1} پر لیتے تب بھی انتہائیں لینے پر وہی نتیجہ ملتا جو اِس وقت ملا ہے۔

نوٹ 2 : اگر ہم لکھیں

$$x\,\frac{ds}{dx} = \phi(x),\quad y\,\frac{ds}{dy} = \psi(x)$$

تو ہم دیکھتے ہیں کہ

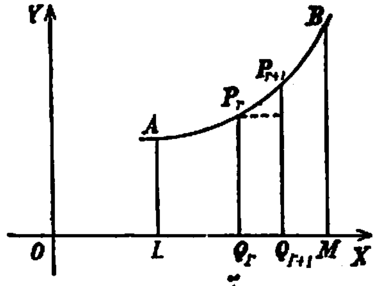
$$h\sum_{r=0}^{n-1} x_r \left(\frac{ds}{dx}\right)_r = h\sum_{r=0}^{n-1} \phi(a+rh)$$

$$h\sum_{r=0}^{n-1} y_r \left(\frac{ds}{dy}\right)_r = h\sum_{r=0}^{n-1} \psi(a+rh)$$

لہذا ہمیں جو فارمولے ملتے ہیں وہ بالکل اُسی شکل کے ہیں جس طرح کے تکملی احصار کا بنیادی مسئلہ ثابت کرتے وقت ملے تھے۔

10·32- یکساں ہموار رقبہ (uniform plane area) کا مرکز ثقل نکالنا

اُس رقبہ پر غور کیجیے جو کہ منحنی $y = f(x)$، x-محور اور دو عرضوں $x = a$ اور $x = b$ کے درمیان گھرا ہوا ہے۔ دراصل ہم یہ تصور کرتے ہیں کہ یہ رقبہ مادّہ کی ایک ہموار پتلی چادر کی شکل میں ہے۔



تصویر 52

LM کو لمبائی h والے n برابر کے ٹکڑوں میں بانٹ لیجیے۔ اُن کے فصلے

$$a, a+h, \ldots a+rh \ldots a+nh = b$$

ہیں جنھیں دوبارہ اِس طرح لکھ سکتے ہیں:-

$$x_0, x_1, \ldots\ldots x_r, \ldots\ldots; x_n$$

اِن پر عرض کھینچیے جو کہ منحنی کو نقطوں

$$A = P_0, P_1, \ldots\ldots, P_r, \ldots\ldots P_n = B$$

پر کاٹیں۔ ہم لکھتے ہیں۔

$$y_r = f(x_r) = f(a+rh)$$

اور $P_r P_{r+1}$ کے نیچے والے رقبے کے بجائے مستطیل (rectangle) $P_r Q_{r+1}$ لیتے ہیں جس کا رقبہ hy_r اور مرکز ثقل

$$[\tfrac{1}{2}(x_r+x_{r+1}), \tfrac{1}{2}y_r]$$

ہے۔ اب ہم اِس مستطیل کے بجائے ایسا ذرّہ لیتے ہیں جس کی مقدار (mass) ρhy_r ہو اور جو نقطہ $[\tfrac{1}{2}(x_r+x_{r+1}), \tfrac{1}{2}y_r]$ پر مقیم ہو۔ اِس طرح ہمیں n ذرّے حاصل ہوتے ہیں جن کا مرکز ثقل

$$\left[\frac{\Sigma\, \rho hy_r \cdot \tfrac{1}{2}(x_r+x_{r+1})}{\Sigma\, \rho hy_r}, \frac{\Sigma\, \rho hy_r \cdot \tfrac{1}{2}y_r}{\Sigma\, \rho hy_r}\right]$$

ہیں۔ اب $h \to 0$ ، $n \to \infty$ لینے پر ہم پاتے ہیں

$$\lim \Sigma\, hy_r = \int_a^b y\, dx$$

$$\lim \Sigma\, hy_r \cdot \tfrac{1}{2}(x_r+x_{r+1}) = \int_a^b yx\, dx$$

$$\lim \Sigma\, \tfrac{1}{2}hy_r^2 = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\, dx$$

اس لیے انتہا میں لینے پر وہ نقطہ ملتا ہے جس کے مختصات

$$\left(\frac{\int_a^b xy\, dx}{\int_a^b y\, dx},\ \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\, dx}{\int_a^b y\, dx} \right)$$

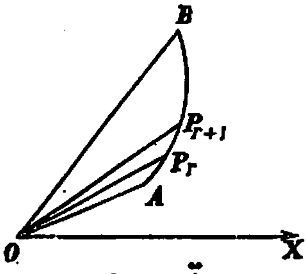
ہیں اور اسے ہم دیے ہوئے چادری رقبے کا مرکز ثقل لیتے ہیں۔

نوٹ 1 : اسی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ منحنی $x = f(y)$ ، y-محور اور دو فصلوں $y = c$ اور $y = d$ کے درمیان گھرے ہوئے یکساں رقبہ کا مرکز ثقل

$$\left(\frac{\frac{1}{2}\int_c^d x^2\, dy}{\int_c^d x\, dy},\ \frac{\int_c^d yx\, dy}{\int_c^d x\, dy} \right)$$

ہوگا۔

نوٹ 2 : قطع کے رقبہ کا مرکز کشش نکالنا



تصویر 53.

منحنی $r = f(\theta)$ اور دو نصف قطری سمتیوں (radii vectors) $\theta = \alpha$ اور $\theta = \beta$ کے درمیان گھرے رقبے پر غور کیجیے۔

ہم زاویہ AOB کو n برابر والے حصوں میں بانٹتے ہیں اور مان لیتے ہیں کہ ہر حصہ h کے برابر ہے۔ مان لیجیے

O سے گزرنے والے دو خطوط OP_r اور OP_{r+1} ہیں جو کہ OX سے زاویے $\alpha+hr$ اور $\alpha+h(r+1)$ بناتے ہیں۔ ہم پاتے ہیں

$$OP_r = f(\alpha+hr)$$

اب قوس $P_r P_{r+1}$ سے گھرے رقبے کے بجائے مثلث $OP_r P_{r+1}$ کا رقبہ لے لیجیے۔ اِس مثلث کا مرکز ثقل O سے گزرنے والے وسطانی خط (median) پر ایک نقطہ ہوگا ہم اُس نقطے کے بجائے OP_r پر O سے $\frac{2}{3} OP_r$ فاصلے والا نقطہ لے لیتے ہیں اور یہ تصور کرتے ہیں کہ اس نقطہ پر ایسا ذرہ رکھا ہوا ہے جس کی مقدار (mass) کے برابر ہے۔ لہٰذا ہم یہ تصور کرتے ہیں کہ ایک مقدار

$$\tfrac{1}{2} OP_r \, OP_{r+1} \sin h$$

نقطہ

$$\left[\tfrac{2}{3} OP_r \cos (\alpha+hr),\ \tfrac{2}{3} f(\alpha+hr) \sin (\alpha+hr) \right]$$

پر رکھی ہوئی ہے۔ یعنی اُس نقطہ پر جس کے محققات

$$\left[\tfrac{2}{3} f(\alpha+hr) \cos (\alpha+hr),\ \tfrac{2}{3} f(\alpha+hr) \sin (\alpha+hr) \right]$$

ہیں۔ اس لیے n ذرّوں کے اِس نظام کے مرکز ثقل کا فصلہ

$$\frac{\Sigma\, \rho\, \frac{1}{2} f(\alpha+hr) f(\alpha+hr+1) \sin h \, . \, \frac{2}{3} f(\alpha+hr) \cos (\alpha+hr)}{\Sigma\, \rho\, \frac{1}{2} f(\alpha+hr) f(\alpha+\overline{r+1}\, h) \sin h}$$

اس کا تخمینا

$$\frac{\frac{2}{3} \Sigma f^3 (\alpha+hr) \cos (\alpha+hr)}{\Sigma f^2 (\alpha+hr)\, h}$$

ہوتا ہے، جو کہ انتہا لینے پر

$$\frac{\frac{2}{3} \int_\alpha^\beta r^3 \cos \theta \, d\theta}{\int_\alpha^\beta r^2 \, d\theta}$$

یعنی

$$\frac{2}{3} \int_\alpha^\beta f^3(\theta) \cos \theta \, d\theta \qquad \int_\alpha^\beta f^2(\theta)\, d\theta$$

ہو جاتا ہے۔ اِسی طرح یہ بھی دکھایا جاسکتا ہے کہ مرکز ثقل کا عرض

$$\frac{2}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\theta \, d\theta \Big/ \int^{\beta} r^2 \, d\theta$$

آتا ہے۔

10.33۔ گردشی حجم کا مرکز ثقل نکالنا

اب منحنی $y = f(x)$ کا وہ حصہ جو فصلوں a اور b والے نقطوں کے درمیان ہے اُسے x-محور کے گرد گھمانے پر بنے گردشی ٹھوس کے حجم کا مرکز ثقل حاصل کرنا ہے۔ تشاکل کی وجہ سے یہ بات صاف ظاہر ہے کہ مرکز ثقل x-محور پر واقع ہوگا۔

ہم LM کو لمبائی h والے n حصوں میں بانٹتے ہیں اور اِس طرح ہمیں وہ نقطے ملتے جن کے فصلے

$$a, a+h, \ldots\ldots, a+rh, \ldots\ldots, a+nh = b$$

ہیں، جن کو دوبارہ

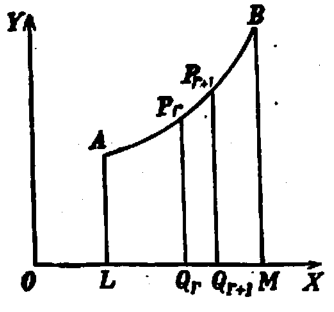
$$x_0, x_1, \ldots\ldots, x_r, \ldots\ldots, x_n$$

لکھ سکتے ہیں۔ مان لیجیے اِن نقطوں سے گزرنے والے معین منحنی کو نقطوں

$$P_0 = A, P_1, \ldots\ldots P_r, \ldots\ldots, P_n = B.$$

پر کاٹتے ہیں۔ P_r کا عرض

(کہہ لیجیے) $= f(a+rh) = y_r$



تصویر 54

اب حجم کا وہ حصہ جو کہ قوس $P_r P_{r+1}$ کو x-محور کے گرد گھمانے پر حاصل ہوتا ہے اُس کے بجائے مستطیل $P_r Q_{r+1}$ کو x-محور کے گرد گھمانے پر بنے حجم کو لے لیجیے یہ بعد والا حجم

$$\pi h y_r^2$$

ہے۔ اس کا مرکز ثقل Q_rQ_{r+1} کے وسطانی نقطہ پر ہے جس کا فصلہ $\frac{1}{2}(x_r+x_{r+1})$ ہے۔ اب پھر اس حجم کے بجائے اس کے برابر مقدار (mass) والا کوئی ذرّہ تصور کیجیے جو کہ $Q_r Q_{r+1}$ کے وسطانی نقطے پر رکھا ہو۔ n ذرّوں کے اس نظام کے مرکز ثقل کا فصلہ

$$\frac{\sum_{r=0}^{n-1} \rho\pi\, h y_r^2 \cdot \frac{1}{2}(x_r+x_{r+1})}{\sum_{r=1}^{n-1} \rho\pi\, h y_r^2}.$$

اب $h \to 0$ اور $n \to \infty$ ہونے پر انتہا لینے پر ہم پاتے ہیں

$$\int_a^b xy^2\,dx \Big/ \int_a^b y^2\,dx$$

جو کہ گردشی حجم کے مرکز کشش کا درکار فصلہ ہے۔

10·34۔ گردشی سطح کا مرکز ثقل (تصویر 54 دیکھیے)

اب ہم قوس AB کو x۔محور کے گرد گھمانے پر بنی گردشی سطح کا مرکز ثقل نکالیں گے۔ قوس $P_r P_{r+1}$ سے بنی ہوئی گردشی سطح کے بجائے ہم وتر $P_r P_{r+1}$ سے بنی گردشی سطح لیتے ہیں جس کا رقبہ § 9·5 کے مطابق

$$\pi(y_r+y_{r+1})\, P_r P_{r+1}$$

ہے۔ اس کا مرکز ثقل $Q_r Q_{r+1}$ کا وسطانی نقطہ ہے۔

اب ہم اس سطح کے بجائے ایک ایسا ذرّہ تصور کرتے ہیں جو Q_rQ_{r+1} کے وسطانی نقطے پر رکھا ہو اور جس کی مقدار (mass) اس طرح کی مقدار کے برابر ہو۔ ذرّوں کے اس نظام کا مرکز ثقل x۔محور پر واقع ایسا نقطہ ہے جس کا فصلہ

$$\frac{\Sigma\rho\pi(y_r+y_{r+1})\, P_r P_{r+1} \cdot \frac{1}{2}(x_r+x_{r+1})}{\Sigma\rho\pi(y_r+y_{r+1})\, P_r P_r}$$

ہے، جس کا تخمینہ

$$\frac{\sum_{r=0}^{n-1} h(y_r+y_{r+1})\left(\frac{as}{dx}\right)_{x=x_r} \tfrac{1}{2}(x_r+x_{r+1})}{\sum_{r=0}^{n-1} h(y_r+y_{r+1})\left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=x}}$$

ہے جو کہ انتہا لینے پر

$$\int_a^b xy\frac{ds}{dx}\,dx \Big/ \int_a^b y\frac{ds}{dx}\,dx$$

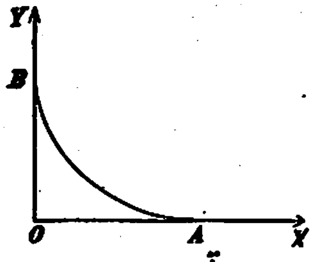
آتا ہے۔

مثالیں

1۔ منحنی

$$x = a\sin^3\theta,\ y = a\cos^3\theta$$

کے پہلے ربع والے قوس کا مرکزِ ثقل نکالیے۔



تصویر 55

ہم پاتے ہیں (§ 10·31 سے)

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a x\frac{ds}{dx}dx}{\int_0^a \frac{ds}{dx}dx};\quad \bar{y} = \frac{\int_0^a y\frac{ds}{dx}dx}{\int_0^a \frac{ds}{dx}dx}$$

ساتھ ہی

$$\int_0^a x\frac{ds}{dx}\,dx = \int_0^{\pi/2} x\frac{ds}{dx}\frac{dx}{d\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} x\frac{ds}{d\theta}\,d\theta = \frac{3a^2}{5}$$

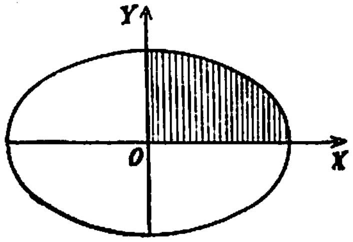
$$\int_0^a \frac{ds}{dx}\,dx = \int_0^{\pi/2}\frac{ds}{dx}\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{ds}{d\theta}\,d\theta = \frac{3a}{2}$$

$$\therefore\quad \bar{x} = \frac{2a}{5}$$

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\bar{y} = \frac{2a}{5}$$

2- اس یکساں مادّی چادر (lamina) کا مرکز ثقل نکالیے جو x-محور ، y-محور اور علیپس $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ کے پہلے ربع والے حصوں کے درمیان گھری ہو۔



تصویر 56

ہم پاتے ہیں (§ 10·32)

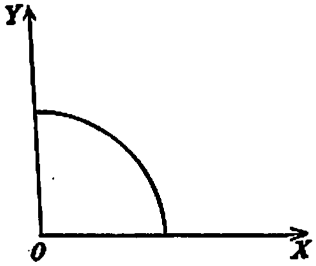
$$\bar{x} = \frac{\int_0^a xydx}{\int_0^a ydx}$$

$$= \frac{\int_0^a x.\ \frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}dx}{\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}\,dx} = \frac{4a}{3\pi}$$

$$y = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a y^2\,dx}{\int_0^a y\,dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx}{\int_0^b \frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}\,dx} = \frac{4b}{3\pi}$$

3- نصف قطر a والے یکساں ٹھوس نصف کرہ (hemisphere) کا مرکز ثقل نکالیے۔

نصف کرہ کو ہم وہ گردشی ٹھوس سمجھ سکتے ہیں جو کہ دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے پہلے ربع والے قوس کو x-محور کے گرد گھمانے پر بنے۔



تصویر 57

ہم پاتے ہیں

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a xy^2dx}{\int_0^a y^2\,dx} = \frac{\int_0^a x(a^2-x^2)dx}{\int_0^a (a^2-x^2)\,dx} = \frac{3a}{8}$$

10·4- جمود کا معیارِ اثر (Moment of Inertia)

تعریف کے مطابق، کسی بھی دیے ہوئے خط کی نسبت سے، مقدار m والے ذرّے کا جمود کا معیارِ اثر mr^2 ہوتا ہے، جہاں r خط سے ذرّہ کا فاصلہ ہو۔ متناہی تعداد میں لیے گئے، مقداروں

$$m_1, \ldots\ldots, m_i, \ldots\ldots, m_n$$

والے ذرّوں کا دیے ہوئے خط کی نسبت سے جمود کا معیارِ اثر

$$\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

ہوتا ہے، جہاں کہ

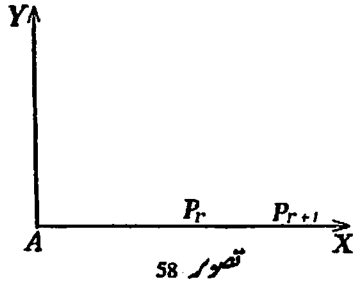
$$r_1, \ldots\ldots, r_i, \ldots\ldots, r_n$$

دیے ہوئے خط سے ذرّوں کے فاصلے ہوں۔

مادّے کی مسلسل تقسیم (continuous distribution) ہونے پر جمود کا معیارِ اثر ایک انتہائی عمل سے نکالتے ہیں۔ وہ عمل ذیل کی مثالوں سے سمجھایا جائے گا۔

مثالیں

1۔ لمبائی $2a$ والے پتلی یکساں چھڑی (rod.) کا بہ لحاظ اس خط کے جمود کا معیارِ اثر نکالیے جو چھڑی کے ایک کنارے سے گزرے اور اُس پر عمود ہو۔



تصویر 58

مان لیجیے چھڑی AB ہے۔ A کو مبدا اور AB کو x-محور مان لیجیے۔ ہم کو بہ لحاظ A سے گزرنے والے خط کے جمود کا معیارِ اثر چاہیے، جہاں کہ AY خط AB پر عمود ہے۔

AB کو ہم لمبائی h والے n برابر ٹکڑوں میں بانٹتے ہیں اور اِس طرح سے ملے

نقاط تقسیم

$$A = P_0, P_1, \ldots\ldots, P_r, \ldots\ldots, P_n = B$$

ہیں۔ اب

$$AP_r = \frac{2a}{n} r = hr.$$

اب چھڑی کے ٹکڑے $P_r P_{r+1}$ کے بجائے ہم ایک ایسا ذرّہ تصور کرتے ہیں جس کی مقدار اُس ٹکڑے کی مقدار کے برابر ہے۔ اگر ρ چھڑی کی کثافت (density) ہو تو اِس ذرّہ کی مقدار

$$\rho h$$

ہوگی اور اِس لیے AY کی نسبت سے اِس کے جمود کا معیارِ اثر

$$(hr)^2 \rho h$$

ہوگا۔ اِس طرح سے اِن ذرّوں کے نظام کے جمود کا معیارِ اثر

$$\sum_{r=0}^{n-1} (hr)^2 \rho h = \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1} \rho \left(\frac{r}{n}\right)^2$$

ہوگا۔ جب $n \to \infty$ ، $h \to 0$ ، اِس طرح کہ $nh = 2a$ تو اِس کی انتہا

$$\int_0^{2a} \rho x^2 \, dx = \frac{8a^3}{3} \rho = M \frac{4a^2}{3}$$

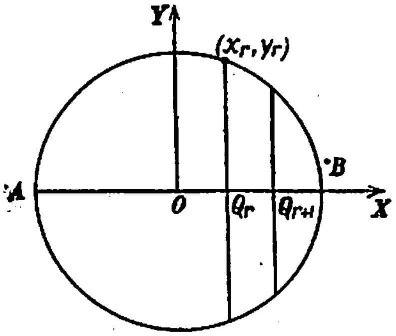
ہوگی، جہاں M کل چھڑی کی مقدار ہے۔

مشق: ثابت کیجیے کہ لمبائی $2a$ اور مقدار M کی کسی پتلی یکساں چھڑ کا اُس خط کے لحاظ سے جمود کا معیارِ اثر

$$Ma^2/3$$

ہوگا جو اُس کے وسطانی نقطہ سے گزرے اور اُس پر عمود ہو۔

2۔ نصف قطر a کی کسی پتلی یکساں دائرہ نما ٹکیہ (disc) کا اُس کے کسی قطر (diameter) کے لحاظ سے جمود کا معیار اثر نکالیے



تصویر 59

دیے ہوئے قطر کو x محور اور مرکز کو مبدا لے لیجیے۔ قطر AB کو لمبائی h والے n برابر کے حصّوں میں بانٹ لیجیے اور ان حصوں کے کناروں پر عمود کھینچیے۔ ٹکیہ (disc) کے اس حصہ کو، جو Q_r اور Q_{r+1} سے گزرنے والے عمودوں کے درمیان ہے، لمبائی $2y_r$ کی ایسی چھڑی سے بدل دیجیے، جس کا بہ لحاظ OX جمود کا معیار اثر

$$2\rho y_r h \cdot \frac{y_r^2}{3}$$

ہو۔ اب بہ لحاظ OX ان چھڑوں کے نظام کے جمود کا معیار اثر

$$\sum_{r=0}^{n-1} 2\rho y_r h \cdot \frac{y_r^2}{3}$$ ہوگا۔

یہاں $y_r = f(-a+hr)$، جہاں کہ

$$f(x) = \sqrt{(a^2-x^2)}$$

اگر $n \to \infty$، $h \to 0$، تو انتہا لینے پر ہم پاتے ہیں

$$\int_{-a}^{+a} \frac{2\rho}{3}(a^2-x^2)^{3/2}\,dx = \frac{\rho\pi a^4}{4} = \frac{Ma^2}{4}$$

جہاں M ٹکیہ (disc) کی مقدار(mass) ہے۔

مشق: ثابت کیجیے کہ مقدار M اور نصف قطر a والی یکساں دائرہ نما ٹکیہ(disc) کا بہ لحاظ اُس خط کے جو اس کی سطح پر عمود ہو اور اُس کے مرکز سے گزرتا ہو، جمود کا معیار اثر $Ma^2/2$ ہے۔

3. - نصف قطر a والے یکساں ٹھوس کرّہ (sphere) کا 'بہ لحاظ اُس کے کسی قطر کے' جمود کا معیار اثر نکالیے

قطر کو n برابر حصوں میں بانٹ کر اُس کے کناروں سے محور پر عمودی ہموار (perpendicular planes) کھینچیے۔ دو ساتھ ساتھ کی (consecutive) عمودی ہمواروں کے درمیان گھرے ہوئے ہر کرّہ کے ٹکڑے کے بجائے ایک پتلی دائرہ نما ٹکیہ (disc) لینے پر، ہم پاتے ہیں کہ درکار جمود کا معیار اثر

$$= \int_{-a}^{+a} \pi\rho\,(a^2-x^2)\,\tfrac{1}{2}\,(a^2-x^2)\,dx$$

$$= \frac{8\,\rho\pi a^5}{15} = \frac{2a^2}{5}\cdot\frac{4a^3}{3}\,\rho = \frac{2a^2}{5}\,M$$

جہاں M کرّے کی مقدار ہے۔

باب 10 پر مشقیں

1. - نصف قطر a والے کسی یکساں تار کا مرکز ثقل نکالیے جو کہ ذیل شکل میں ہو۔
(i) نصف دائرہ (ii) دائرہ کا ربع

2. - نصف قطر a والے کسی ایسے دائری قوس کا مرکز ثقل نکالیے جو کہ مرکز پر 2θ کا زاویہ بناتا ہے۔

3. - ثابت کیجیے کہ سائیکلائڈ $x = a(\theta+\sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$ کے پہلے ربع والے قوس کا مرکز ثقل

$\left[\left(\pi-\frac{4}{3}\right)a,\ \frac{2}{3}\ a\right]$ ہوگا۔

4۔ مکافی $y^2 = 4ax$ کے اُس قوس کا مرکزِ ثقل نکالیے جو کہ اُس کے راس اور وترِ خاص کے ایک سرے $(a, 2a)$ کے درمیان ہو۔

5۔ ثابت کیجیے کہ زنجیرہ $y = c\cosh(x/c)$ کے راس $(0, c)$ اور نقطہ (x, y) کے درمیان والے قوس کا مرکزِ ثقل

$$\left[x-\frac{c\,(y-c)}{s}\ ,\ \frac{y}{2}+\frac{cx}{2s}\right]$$

ہوگا، جہاں s قوس کی لمبائی ہے۔

6۔ x-محور اور علیپس $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$ کے اُس حصے سے گھری ہوئی یکساں چادر کا مرکزِ ثقل معلوم کیجیے جس کے لیے y مثبت ہو۔

7۔ ثابت کیجیے کہ مکافی $x^2 = 4ay$، x-محور اور معین $x = b$ کے درمیان گھرے رقبے کا مرکزِ ثقل $(3b/4\ ,\ 3/40\quad b^2/a)$ ہے۔

8۔ ثابت کیجیے کہ کارڈائڈ $r = a\,(1+\cos\theta)$ سے گھرے رقبے کا مرکزِ ثقل ابتدائی خط پر ہے اور اُس کا قطب (pole) سے فاصلہ $5a/6$ ہے۔

9۔ منحنی $y = \sin x$ کے ایک محراب (arch) کے مرکزِ ثقل کے مختصات نکالیے۔

10۔ اُس رقبے کا مرکزِ ثقل نکالیے جو کہ مکافیوں $y^2 = ax$ اور $x^2 = by$ کے درمیان گھرا ہو۔

11۔ x-محور، y-محور اور منحنی $y = 2+x-x^2$ کے درمیان گھرے پہلے ربع والے رقبے کا مرکزِ ثقل نکالیے۔

12۔ ایک چپٹی پتلی یکساں کثافت (uniform density) والی چادر دو منحنیوں $y = x^2, y = -x$ اور خط $x=2$ سے گھری ہوئی ہے، اُس کا مرکز نکالیے۔

13۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $y^2\,(a+x) = x^2\,(a-x)$ کے لوپ کے رقبے کا مرکزِ ثقل

$\frac{4a}{3}(3\pi-8)/(4-\pi)$ ہوگا۔

14۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ کے ایک لوپ سے گھرے رقبے کے مرکز ثقل کا فصلہ $\pi a\sqrt{2}/8$ ہوگا۔

15۔ منحنی $y = \sin x$ ، $y = 0$ اور $x = \pi/4$ سے گھرے رقبے کو x-محور کے گرد گھمانے پر بنے ٹھوس کے حجم کا مرکز ثقل نکالیے۔

16۔ عرض $x = b$ سے کٹے ہوئے مکافی $y^2 = 4ax$ کے حصے کو x-محور کے گرد گھمانے پر بنے ٹھوس حجم کا مرکز ثقل نکالیے۔

17۔ $r = a\,(1+\cos\theta)$ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے پر بنی (i) گردشی سطح کا (ii) گردشی حجم کا مرکز ثقل نکالیے۔

18۔ ذیل کا مرکز ثقل نکالیے:۔

(i) کسی نصف کرہ کی سطح کا۔

(ii) کسی قائم دائری مخروط کی منحنیائی سطح کا (curved surface)

19۔ علیبس $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$ کا ایک ربع والا حصہ محور اکبر (major axis) کے گرد گھمانے پر بنے ٹھوس کے حجم کا مرکز ثقل نکالیے۔

20۔ ایک یکساں کثافت (uniform density) کی چادر جو x-محور منحنی $y = \cos x$ اور $x = -\pi/2$ اور $x = \pi/2$ کے درمیان گھری ہوئی ہے۔ اُس کا بہ لحاظ y-محور کے جمود کا معیار اثر نکالیے۔

21۔ علیبس $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$ کو x-محور کے گرد گھمانے پر بنے حجم کا بہ لحاظ x-محور کے جمود کا معیار اثر نکالیے۔

22۔ نصف قطر r اور اونچائی h والے قائم ٹھوس اسطوانہ (right solid cylinder) کا بہ لحاظ اُس کے محور جمود کا معیار اثر نکالیے۔

23۔ نصف قطر a والے کھوکھلے کرہ کا، بہ لحاظ اُس کے کسی قطر کے جمود کا معیار اثر نکالیے۔

جوابات

1- (i) $(\bar{x} = 0, \bar{y} = 2a/\pi)$ (ii) $(2\sqrt{2}\, a/\pi, 2\sqrt{2}\, a/\pi)$.

2- تنصیفی نصف قطر (bisecting radius) پر، مرکز سے $a \sin\theta/\theta$ کی دوری پر۔

4- $\left[\frac{a}{4} \cdot \frac{3\sqrt{2}-\log(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})}, \frac{4a}{3} \frac{\sqrt{8}-1}{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})}\right]$

6- $(0, 4b/3\pi)$ 　　 9- $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$

10- $\left(\frac{9}{20} a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}, \frac{9}{20} a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}}\right)$ 　　 11- $\left(\frac{4}{5}, \frac{24}{25}\right)$

12- $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 　　 15- $\bar{x} = (\pi^2-4\pi+8)/8(\pi-2)$

16- $\bar{x} = \frac{2}{3} b$. 　　 17- (i) $\bar{x} = \frac{50}{63} a$. (ii) $\frac{4}{5} a$

18- (i) تنصیفی نصف قطر کے وسطی نقطہ پر

(ii) محور کو 2 : 1 کی نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ پر

19- $\bar{x} = 3a/8$. 　　 20- $\rho(\pi^2-8)/2$

21- $2b^2 M/5$، جہاں M ٹھوس کی مقدار ہے۔

22- $\frac{1}{4} Mr^2$، جہاں کہ M اور r ترتیب وار قاعدہ (base) کی مقدار اور نصف قطر ہیں۔

23- $\frac{1}{4} Ma^2$، جہاں کہ M اور a ترتیب وار مقدار اور نصف قطر ہیں۔

11

پہلے رتبے اور پہلی ڈگری کی تفرقی مساواتیں

(Differential Equations)

11.1۔ تفرقی مساوات وہ مساوات ہے جس میں تابع اور غیر تابع متغیر اور تابع متغیر کے تفرقی سر ہوتے ہیں۔

تفرقی مساواتوں کی کچھ مثالیں یہ ہیں :۔

(1) $(2x+3y)\dfrac{dy}{dx}+(7x^2+8y)=0.$

(2) $\dfrac{dy}{dx}+y\cos x=\sin x.$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+a^2x=0.$

(4) $\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}=\dfrac{d^2y}{dx^2}$

(5) $x^3\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^3+y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4+y^4=0.$

(6) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=nz$

(7) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

کسی تفرقی مساوات میں اگر ایک ہی غیر تابع متغیر (independent variable) ہو تو وہ معمولی تفرقی مساوات کہلاتی ہے اور اگر دو یا زیادہ غیر تابع متغیر ہوں تو اُسے جزوی (partial) تفرقی مساوات کہتے ہیں۔

اس طرح، تفرقی مساواتیں (1) اور (5) معمولی ہیں لیکن (6) اور (7) جزوی ہیں۔

اب ہم صرف معمولی تفرقی مساواتوں پر ہی غور کریں گے۔

کسی تفرقی سر میں آنے والے اعلیٰ ترین مشتق (highest derivative) کے رتبے کو تفرقی مساوات کا رتبہ کہتے ہیں۔

کسی تفرقی مساوات کو اگر یوں لکھیں کہ اس میں آنے والے تفرقی سروں میں جزوی علامت (radicals sign) اور کسریں (fractions) نہ رہ جائیں تو جو اعلیٰ ترین مشتق کی ڈگری ہوتی ہے، وہی تفرقی مساوات کی ڈگری کہلاتی ہے۔

اس طرح اوپر لکھی تفرقی مساواتوں میں سے:-

(1)، (2) اور (6) پہلے رتبے اور پہلی ڈگری کی ہیں؛

(3) اور (7) دوسرے رتبے اور پہلی ڈگری کی ہیں؛

(4) دوسرے رتبے اور دوسری ڈگری کی ہے؛

(5) دوسرے رتبے اور تیسری ڈگری کی ہے۔

کسی تفرقی مساوات کا حل (solution)، متغیروں کے درمیان وہ رشتہ ہے جس میں تفرقی سر نہ ہوں اور جو ایسا ہو کہ وہ رشتہ اور اس سے حاصل تفرقی سر اُس تفرقی مساوات کو مطمئن (satisfy) کریں۔ اس سے یہ مطلب نکلتا ہے کہ تفرقی مساوات اپنے حل سے تفرق کرنے پر اور جبری اسقاط (elimination) کے عمل کے ذریعے حاصل کی جا سکتی ہے۔ اس بنا پر تفرقی سر کے حل کو اُس کا ابتدائی (primitive) بھی کہتے ہیں

مثالیں

1. ثابت کیجیے کہ $y = A \cos x + B \sin x$ تفرقی مساوات

$$d^2y/dx^2 + y = 0$$

کا ایک حل ہے۔

یہاں، ہم پاتے ہیں

$$dy/dx = -A \sin x + B \cos x$$

$$d^2y/dx^2 = -A \cos x - B \sin x = -y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

جوکہ دی ہوئی تفرقی مساوات ہے۔

2۔ ثابت کیجیے کہ

$$y = A \cos x + \sin x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

تفرقی مساوات

$$\cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

کا ایک حل ہے۔

اب (i) کا تفرق کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$dy/dx = -A \sin x + \cos x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$$

اب y اور dy/dx کی قیمتیں (ii) کی بائیں جانب رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$\cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x$$

$$= \cos x (-A \sin x + \cos x) + (A \cos x + \sin x) \sin x = 1$$

اس طرح سے دی ہوئی تفرقی مساوات مطمئن ہوجاتی ہے۔

3۔ ثابت کیجیے کہ

$$Ax^2 + By^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

تفرقی مساوات

$$x\left[y \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right] - y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

کا حل ہے۔

نوٹ کیجیے کہ اس تفرقی مساوات میں مستقل A اور B نہیں ہیں اور یہ دوسرے رتبے کی ہے۔

لگاتار دو مرتبہ (i) کا تفرق کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$Ax+By\frac{dy}{dx}=0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(iii)}$$

$$A+B\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\frac{d^2y}{dx^2}\right]=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(iv)}$$

اب (iii) اور (iv) سے A اور B اسقاط کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$x\left[y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]-y\frac{dy}{dx}=0$$

جو کہ دی ہوئی تفرقی مساوات ہے۔

4۔ مستقل h اور k اسقاط کرکے وہ تفرقی مساوات حاصل کیجیے جس کا حل $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ ہو۔

دو چیزوں کا اسقاط کرنے کے لیے تین رشتے ہونا چاہیے۔ اِس لیے دیے ہوئے رشتے کے علاوہ، اِس کا تفرق دو مرتبہ کرکے دو رشتے حاصل کریں گے۔
اِس طرح ہم پاتے ہیں

$$(x-h)+(y-k)\frac{dy}{dx}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

$$1+(y-k)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(ii)}$$

اب (i) اور (ii) سے، ہم پاتے ہیں

$$y-k=-\frac{1+(dy/dx)^2}{d^2y/dx^2},$$

$$x-h=\frac{[1+(dy/dx)^2]\,dy/dx}{d^2y/dx^2}$$

اِن قیمتوں کو دیے ہوئے رشتے میں رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3=a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

مشقیں

1۔ مستقل a اور b اسقاط کرکے وہ تفرقی مساوات حاصل کیجیے جس کا حل
$xy = ce^{x}+be^{-x}+x^2$ ہو۔

2۔ وہ تفرقی مساوات حاصل کیجیے جس کا حل
$y = Ae^{x}+Be^{3x}+Ce^{5x}$ ہو۔

3۔ مستقل a اسقاط کرکے وہ تفرقی مساوات حاصل کیجیے جس کا حل
$y^2 = 4a(x+a)$ ہو

4۔ منحنیوں کی قسم $y = e^{x}(A \cos x + B \sin x)$ کے لیے تفرقی مساوات حاصل کیجیے جہاں کہ A اور B اختیاری مستقل ہیں۔

جوابات

1. $x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-xy+x^2-2=0.$ 2. $\frac{d^3y}{dx^3}-9\frac{d^2y}{dx^2}+23\frac{dy}{dx}-15y=0.$

3. $y\left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=2x\frac{dy}{dx}.$ 4. $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+2y=0.$

11.2 ۔ اختیاری مستقلوں (arbitrary constants) کی تعداد

جس تفرقی مساوات کا حل

$$f(x, y, c_1, \ldots\ldots, c_n) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

ہے، جہاں $c_1, \ldots, c_n$ اختیاری مستقل ہیں، اُس تفرقی مساوات کو حاصل کرنے کے لیے ہمیں n مستقلوں کا اسقاط کرنا ہوگا جس کے لیے $(n+1)$ مساواتیں درکار ہوں گی۔ دیے ہوئے حل اور اُس کا لگاتار n مرتبہ تفرق کرنے پر ہمیں $(n+1)$ رشتے (relation)

حل جاتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ اس طرح سے حاصل ہوئی تفرقی مساوات کا رتبہ n ہوگا۔
اُس کے حل (i) میں n اختیاری مستقل $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ہوتے ہیں۔

11.21۔ عام اور مخصوص حل (General and particular solutions)

تفرقی مساوات کے اُس حل کو عام حل کہتے ہیں جس میں اختیاری مستقلوں کی تعداد مساوات کے رتبے کے برابر ہو۔ دوسرے حل، جو عام حل میں مستقلوں کو خاص قیمتیں دینے پر حاصل ہوتے ہیں وہ مخصوص حل کہلاتے ہیں۔

ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ کسی تفاعل کے عام تکملے میں اختیاری مستقل ہوتا ہے۔ اس لیے تفرقی مساوات کے حل میں، جو کہ تکمل کے اعمال سے حاصل ہوتے ہیں، اختیاری مستقلوں کی تعداد اتنی ہی ہونا چاہیے جتنی بار حل نکالنے کے لیے تکمل کا عمل کیا جائے اور یہ تعداد تفرقی مساوات کے درجے کے برابر ہوتی ہے۔

اسی طرح، ہم دیکھتے ہیں کہ رتبہ n والی تفرقی مساوات کے نہایت عام حل (must general solution) میں n اور صرف n غیر متوقع (independent) اختیاری مستقل ہونا چاہیے۔

نوٹ 1 : ہم یہ دیکھ چکے ہیں کہ ہر ایک تفاعل کا تکملہ نکالنا ممکن نہیں یعنی متناہی تعداد میں جبری، مثلثاتی، معکوس مثلثاتی، لوگارتمی یا قوتی تفاعلوں کے جبری مرکب تفاعل کا تکملہ کوئی ضروری نہیں کہ اسی قسم کا ہو۔ تفرقی سروں میں اس کے امکانات اور بھی کم ہیں۔ پھر بھی تکمل کی طرح یہاں بھی تفرقی مساوات کی کچھ معیاری قسمیں (standard forms) ایسی ہیں کہ اُن میں سے کسی بھی تفرقی مساوات کو حل کیا جا سکتا ہے۔ اس کتاب میں اُن معیاری قسموں میں سے کچھ پر غور کیا جائے گا۔

اب اس باب میں ہم صرف پہلے رتبے کی تفرقی مساواتوں پر غور کریں گے۔

نوٹ 2 : ایک کارآمد علامت

پہلے رتبے اور پہلی ڈگری کی نہایت عام تفرقی مساوات

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)}$$

ہوتی ہے۔ کبھی کبھی یہ کارآمد ہوتا ہے کہ اسے یوں لکھا جائے۔

$$\varphi(x, y)\, dy = f(x, y)\, dx$$

11.3 متغیر الگ الگ ہو جانے والی مساوات (variables separable) وہ

مساوات ہیں جو اس طرح لکھی جا سکیں کہ dx کا ضربیہ صرف x کا تفاعل ہو اور dy کا ضربیہ صرف y کا تفاعل ہو۔

لہٰذا اس طرح کی مساوات کی عام شکل

$$f(x)\, dx + \varphi(y)\, dy = 0 \quad \text{.............. (i)}$$

ہوتی ہے۔ اس کو حل کرنے کے لیے ہم لکھتے ہیں۔

$$f(x) + \varphi(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

اب بہ لحاظ x تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\int f(x)\, ax + \int \varphi(y) \cdot \frac{dy}{dx}\, dx = c,$$

$$\Rightarrow \quad \int f(x)\, dx + \int \varphi(y)\, dy = c$$

جو کہ (i) کا حل ہے۔

اس لیے، (i) کا حل ترتیب وار x اور y کے لحاظ سے f(x) اور φ(y) کے تکملے نکال کر اُن تکملوں کے جوڑ کو ایک مستقل کے برابر رکھنے پر ملتا ہے۔

مثالیں

1۔ حل کیجیے

$$(xy^2+x)\,dx+(yx^2+y)\,dy = 0$$

یہاں ہم پاتے ہیں

$$x(y^2+1)\,dx+y(x^2+1)\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{xdx}{x^2+1}+\frac{ydy}{y^2+1} = 0$$

اس لیے یہ ایسی مساوات ہے جس میں متغیر الگ الگ ہو سکتے ہیں۔
اس لیے اس کا حل

$$\int\frac{x}{x^2+1}\,dx+\int\frac{y}{y^2+1}\,dy = c,$$

$$\Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}\log(x^2+1)+\tfrac{1}{2}\log(y^2+1) = c,$$

$$\Rightarrow \quad \log(x^2+1)(y^2+1) = 2c,$$

$$\Rightarrow \quad (x^2+1)(y^2+1) = e^{2c} = a.$$

ہم نے $a = e^{2c}$ رکھا ہے، چونکہ c اختیاری مستقل ہے اس لیے a بھی اختیاری مستقل ہے۔ لہذا

$$(x^2+1)(y^2+1) = a$$

درکار عام حل ہے جس میں اختیاری مستقل 'a' ہے۔

2۔ ایسا منحنی معلوم کیجیے کہ اس کے ہر نقطے پر مماس نصف قطری سمتیہ سے ایک مستقل زاویہ α بنائے

اگر φ سے نصف قطری سمتیہ اور منحنی کے کسی مماس کے درمیان کا زاویہ ظاہر کریں، تو

$$\tan\varphi = r\frac{d\theta}{dr}$$

چونکہ $\varphi = \alpha$ اس لیے

$$\tan \varphi = r \frac{d\theta}{dr}.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{r} = \cot \alpha \, d\theta.$$

$$\Rightarrow \quad \log r = \theta \cot \alpha + c,$$

$$\Rightarrow \quad r = e^c . e^{\theta \cot \alpha} = a e^{\theta \cot \alpha},$$

$$\therefore \quad r = a e^{\theta \cot \alpha},$$

درکار منحنی ہے، خواہ 'a' کوئی بھی مستقل ہو

مشقیں

ذیل تفرقی مساواتیں حل کیجیے :-

1- $y(1+x)dx + x(1+y)dy = 0.$

2- $y\sqrt{(1+x^2)}\, dx + x\sqrt{(1+y^2)}\, dy = 0.$

3- $(x^3 - yx^3)\, dy + (y^2 + xy^2)\, ydx = 0.$

4- $\sqrt{[(1+x^2)(1+y^2)]}\, dx + xydy = 0.$

5- $y - x\dfrac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \dfrac{dy}{dx}\right).$

6- $\operatorname{cosec} x \log y\, dy + x^2y^2\, dx = 0.$

7- $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin x + x\cos x}{y(2\log y + 1)}.$

8- $x^{-1}\cos^2 y\, dy + y^{-1}\cos^2 x\, dx = 0.$

9- $x\sqrt{y}\, dx + (1+y)\sqrt{(1+x)}\, dy = 0.$

10- $y\log(\sec x + \tan x)\, dx = \cos x \log(\sec y + \tan y)\, dx.$

11- $(3 + 2\sin x + \cos x)\, dy = (1 + 2\sin y + \cos y)\, dx.$

12 - $(e^x+1)\, y\, dy = (y+1)\, e^x\, dx.$

13 - $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y} + x^2 e^y.$

14 - اُن منحنیوں کی مساوات معلوم کیجیے جن کا

(i) کارٹیزی تحت مماس (sub-tangent) مستقل (constant) ہو۔

(ii) کارٹیزی تحت عماد (sub-normal) مستقل ہو۔

(iii) قطبی تحت مماس مستقل ہو۔

(iv) قطبی تحت عماد مستقل ہو۔

15 - اُس منحنی کی مساوات نکالیے جس کا کارٹیزی تحت مماس فصلے کے مربع کے معکوس کی طرح بدلے۔

16 - وہ منحنی معلوم کیجیے جو نقطہ (1, 2) سے گزرے اور x-محور کا وہ حصہ جو اُس کے کسی بھی نقطہ پر مماس اور مبدا کے درمیان ہے، اُس نقطہ کے فصلے کا دُگنا ہوگا۔

17 - وہ منحنی معلوم کیجیے جن کے قطبی تحت عماد کے معکوس اور نصف قطری سمتیہ کے معکوس کا جوڑ مستقل ہو۔

18 - وہ منحنی معلوم کیجیے جو نقطہ $(a, \pi/2m)$ سے گزرے اور جس کے نصف قطری سمتیہ اور مماس کے درمیان کا زاویہ سمتیہ زاویہ کا m گنا ہو۔

جوابات

1

2. $\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1+y^2)} - \log\{[\sqrt{(1+x^2)}+1][\sqrt{(1+y^2)}+1]/xy\} = c$

3. $2y^2 \log x - 2y\,(y-x)/x + 2cy^2 = 1.$

4. $\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1+y^2)} - \log\{[\sqrt{(1+x^2)}+1]/x\} = c.$

5. $(1-ay)(a+x) = cy.$

6. $(1+\log y)/y + x^2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x = c.$

7. $y^2 \log y = x \sin x + c$.

8. $(x^2+y^2)+x \sin 2x+y \sin 2y+\frac{1}{2} \cos 2x+\frac{1}{2} \cos 2y = c$.

9. $(x-2) \sqrt{(1+x)}+(y+3) \sqrt{y} = c$.

10. $[\log (\sec x+\tan x)]^2-[\log (\sec y+\tan y)]^2 = c$.

11. $2 \tan^{-1} (1+\tan \frac{1}{2}x) = c+\log (1+2 \tan \frac{1}{2}y)$.

12. $(1+y)(1+e^x) = ce^y$.

13 $e^x+e^{-y}+\frac{1}{3}x^3 = c$.

14. (i) $y = ke^{x/a}$. (ii) $y^2 = 2cx+k$. (iii) $r(k-\theta) = c$. (iv) $r = c\theta+k$.

15 $y = ce^{x^3/3k}$.

16. $xy = 2$

17. $\theta = cr-\log r+k$.

18. $r^m = a^m \sin m\theta$.

11.4 خطی مساوات (Linear Equations)

خطی مساوات وہ تفرقی مساوات ہے جس میں تابع متغیر اور اس کا تفرقی سر صرف پہلی ڈگری کے ہوں اور ان کا ضرب مساوات میں نہ ہو۔
لہذا پہلے رتبے کے خطی مساوات کی عام شکل

$$\frac{dy}{dx}+Py = Q \quad \text{(i)}$$

ہوتی ہے، جہاں کہ P اور Q , x کے فنکشن ہوں۔
اس مساوات کو حل کرنے کے لیے، دونوں طرف $e^{\int P\,dx}$ سے ضرب کرتے ہیں اور ہم پاتے ہیں

$$e^{\int P\,dx}\left[\frac{dy}{dx}+Py\right] = Qe^{\int P\,dx}$$

اب بائیں جانب، ذیل کا تفرقی سر ہے

$$ye^{\int P\,dx}$$

اس طرح تکمل کرنے پر، ہم پاتے ہیں

$$ye^{\int P\,dx} = \int Qe^{\int P\,dx}\,dx + c$$

$$y = e^{-\int P\,dx}\left[\int Qe^{\int P\,dx}\,dx + c\right]$$

جو کہ درکار حل ہے۔

نوٹ 1 : جزو

$$e^{\int P\,dx}$$

جس سے ضرب کرنے سے (i) کی بائیں جانب x اور y کے ایک تفاعل کا تفرقی سر ہو جاتی ہے اُسے تفرقی مساوات کا تکملی جزو (integrating factor) کہتے ہیں۔

نوٹ 2 : یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ تکملی جزو سے ضرب دینے پر بائیں جانب y اور تکملی فیکٹر کے حاصل ضرب تفاعل کی تفرقی سر ہو جاتی ہے۔

نوٹ 3 : یہ یاد رکھنا کارآمد ہوتا ہے کہ مثبت t کے لیے

$$e^{\log t} = t.$$

مثالیں

1۔ حل کیجیے

$$x^2(x^2-1)\frac{dy}{dx} + x(x^2+1)y = (x^2-1)$$

ہم پاتے ہیں

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}y = \frac{1}{x^2}$$

جو کہ خطی ہے۔

یہاں

$$P = \frac{x^2+1}{x(x^2-1)},$$

$$\therefore \int P\,dx = \int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx = \log \frac{x^2-1}{x}.$$

اِس لیے تکملی جزو

$$= e^{\int P\,dx} = e^{\log \frac{x^2-1}{x}} = \frac{x^2-1}{x}.$$

اب $(x^2-1)/x$ سے ضرب دینے پر، ہم پاتے ہیں

$$\frac{x^2-1}{x}\left[\frac{dy}{dx} + \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}\,y\right] = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{x^2-1}{x}.$$

اِس لیے حل

$$y\,\frac{x^2-1}{x} = \int \frac{x^2-1}{x^3}\,dx + c = \log x + \frac{1}{2x^2} + c.$$ ہے۔

2۔ حل کیجیے

$$(x+2y^3)\frac{dy}{dx} = y.$$

اگر y کو تابع متغیر لیتے تو مساوات میں y^3 ہونے کی وجہ سے یہ خطی مساوات نہ ہوتی لیکن x کو تابع متغیر لے کر ہم اسے یوں لکھ سکتے ہیں :۔

$$y\,\frac{dx}{dy} = x + 2y^3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = 2y^2,$$

جو کہ خطی مساوات ہے (x کو تابع متغیر لینے پر)
یہ تکملی جزو

$$= e^{-\int dy/y} = e^{-\log y} = y^{-1} = 1/y$$

اس تکملی جزو سے ضرب دینے پر ہم پاتے ہیں

$$\frac{1}{y}\left(\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y}\right) = 2y.$$

اس لیے حل

$$x\,\frac{1}{y} = y^2 + c$$

یعنی $x = y(c+y^2)$. ہے۔

مشقیں

ذیل مساواتیں حل کیجیے :۔

1۔ $(x^2-1)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 1$

2۔ $\sin x\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = x\sin x$

3۔ $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = x^5.e^{x^3}$

4۔ $\log x\dfrac{dy}{dx} + y = 2\log x$

5۔ $x\sin x\dfrac{dy}{dx} + (x\cos x + \sin x)y = \sin x$

6۔ $\sin x\cos x\dfrac{dy}{dx} = y + \sin x$

7۔ $\sin x\dfrac{dy}{dx} + 2y + \sin x(1+\cos x) = 0$

8۔ $(1 + x + xy^2)\,dy + (y + y^3)\,dx = 0$

9۔ $(2x - 10y^3)\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

10۔ $\sqrt{(x^2+1)}\dfrac{dy}{dx} + y = \sqrt{(x^2+1)} - x$

11- $(1-x^2)^{3/2}\frac{dy}{dx}+y-1=0$

12- $x(x^2+1)\frac{dy}{dx}=y(1-x^2)+x^3\log x$

13- $(x^2-1)\sin x\frac{dy}{dx}+[2x\sin x+(x^2-1)\cos x]y-(x^2-1)\cos x=0$.

14- $\frac{dy}{dx}+y\sec x=\tan x$

15- $(x+\tan y)\,dy=\sin 2y\,dx$.

16- $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{\sqrt{(1-x^2)^3}}=\frac{x+\sqrt{(1-x^2)}}{(1-x^2)^2}$

17- $(1+y^2)\,dx+(x-e^{-\tan^{-1}y})\,dy=0$.

18- $\frac{dy}{dx}=y\cos x+\cos x\sin^2 x$.

19- $\frac{dy}{dx}-\frac{1+3x^2}{x(1+x^2)}y=x\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

اور اختیاری مستقل یوں معلوم کیجیے کہ $x=1$ پر $y=0$ ہو۔

20- وہ منحنی معلوم کیجیے جو نقطہ $(2a, a)$ سے گزرے اور جس کے کارتیزی تحت مماس اور فصلہ کا جوڑ مستقل a کے برابر ہو۔

21- وہ منحنی معلوم کیجیے کہ جس کے مماس اور مبدا کے درمیان y-محور کا حصہ نقطہ تماس (point of contact) کے فصلے کی تیسری قوت کی طرح بدلے۔

جوابات

1. $y(1-x^2)=-x+c$.
2. $(y-1)\sin x+x\cos x=c$.
3. $12y=e^{x^3}(2x^3-1)+ce^{-x^3}$.
4. $y\log x=c+(\log x)^2$.
5. $xy\sin x+\cos x=c$.
6. $y\cot x=c+\log\tan\frac{1}{2}x$.
7. $y\tan^2\frac{1}{2}x=\sin x-x+c$.
8. $xy+\tan^{-1}y=c$.

9. $xy^2 = 2y^5+c.$ 10. $y[x+\sqrt{(x^2+1)}] = c+\sinh^{-1} x.$

11. $\log (y-1)+x/\sqrt{(1-x^2)} = c.$ 12. $4(x^2+1)y+x^2(1-2 \log x) = cx.$

13. $y(x^2-1) \sin x = (x^2-3) \sin x+2x \cos x+c.$

14. $(y-1)(\sec x+\tan x)+x = c.$ 15. $x\sqrt{\cot y} = c+\sqrt{\tan y}.$

16. $y = x \sqrt{(1-x^2)}+ce^{-x/\sqrt{(1-y^2)}}.$ 17. $xe^{\tan^{-1} y} = c+\tan^{-1} y$

18. $y+\sin^2 x+2 \sin x+2 = ce^{\sin x}.$

19. $y = cx(1+x^2)+x^2$; $c = -\frac{1}{2}.$ 20. $(x-a) y = a^2.$

21. $2y+kx^3 = cx.$

11.5- خطی شکل میں تبدیل ہوسکنے والی مساواتیں

ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$$

جہاں P اور Q ، x کے تفاعل ہیں، خطی شکل میں تبدیل ہوسکتی ہے۔

y^n سے تقسیم کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + Py^{-n+1} = Q$$

اب $z = y^{-n+1}$ رکھنے پر $dz/dx = (-n+1)y^{-n}(dy/dx)$ اور مساوات اب

$$\frac{dz}{dx} + P(1-n)z = Q(1-n)$$

ہوجاتی ہے، جو کہ z کو تابع متغیر لینے پر خطی ہوجاتی ہے۔

مثال

حل کیجیے

$$(x^3y^2+xy)dx = dy$$

پہلے ہم مساوات کو یوں لکھتے ہیں

$$\frac{dy}{dx}-xy = x^3y^2$$

اب y^2 سے تقسیم پر ہم پاتے ہیں

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}-\frac{x}{y} = x^3$$

اب ہم رکھتے ہیں

$$-\frac{1}{y} = z \Rightarrow \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

اور پاتے ہیں

$$\frac{dz}{dx}+xz = x^3$$

جو کہ خطی ہے۔ تکملی جزو ضربی

$$e^{\int x\,dx} = e^{\frac{1}{2}x^2}$$

ہے اور اس لیے حل

$$ze^{\frac{1}{2}x^2} = \int x^3 e^{\frac{1}{2}x^2}\,dx+c$$

ہے۔ یہ تکملہ نکالنے کے لیے ہم $t = x^2/2$ رکھتے ہیں۔

$$\therefore \quad \int x^3 e^{\frac{1}{2}x^2}\,dx = 2\int te^t dt$$
$$= 2(te^t-e^t) = 2e^{\frac{1}{2}x^2}(\tfrac{1}{2}x^2-1).$$

اس لیے حل $z = x^2-2+ce^{-\frac{1}{2}x^2}$ ہے، جہاں کہ $z = 1/y$

مشقیں

ذیل مساواتیں حل کیجیے :-

1. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x} = y^2x.$ 2. $x\frac{dy}{dx}+y = y^2 \log x.$

3 $x\frac{dy}{dx}+y = y^2x^3 \cos x.$ 4. $x^3 \frac{dy}{dx}-x^2y+y^4 \cos x = 0.$

5. $\frac{dy}{dx} = y \tan x—y^2 \sec x.$ 6 $x\frac{dy}{dx}+y = x^3y^4.$

7. $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}+\frac{x}{1-x^2} = xy^{-\frac{1}{2}}.$ 8. $(xy-x^2)\frac{dy}{dx} = y^2.$

9. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x-1} = xy^{\frac{1}{3}}$ 10. $\frac{dy}{dx}+xy = y^2e^{\frac{1}{2}x^2}\log x.$

11 $y(x^2y+e^x)\,dx—e^x\,dy = 0.$

جوابات

1. $1+x^2y+cxy = 0.$ 2. $y(1+cx+\log x) = 1.$

3. $xy(x \sin x+\cos x+c)+1 = 1.$ 4. $x^3 = (c+3 \sin x)\,y^3.$

5. $\sec x = (c+\tan x)\,y.$ 6. $(-3 \log x+c)\,x^3y^3 = 1.$

7. $\sqrt{y} = \frac{1}{3}(x^2-1)+c\sqrt[4]{(1-x^2)}.$ 8. $y = (\log y+c)\,x.$

9. $y^{\frac{2}{3}} = c(x-1)^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{2}{3}(x-1).$

10. $ye^{\frac{1}{2}x^2}(c+x-x\log x) = 1.$ 11. $x^2y+3e^x = cy.$

11·6. ہم جنس مساوات (Homogeneous Equations.)

وہ تفرقی مساوات

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{\varphi(x,y)}$$

جس میں $f(x,y)$ اور $\varphi(x,y)$ اُسی ڈگری کے x اور y کے ہم جنس تفاعل (homogeneous functions) ہوں، ہم جنس مساوات کہلاتی ہے۔ ایسی مساوات کو $y = vx$ رکھ کر تابع متغیر y کے بجائے متغیر v لے کر حل کر سکتے ہیں۔

چونکہ $f(x, y)$ اور $\varphi(x, y)$ اسی ڈگری کے، مان لیجیے ڈگری n کے تفاعل ہیں اس لیے انھیں یوں لکھ سکتے ہیں :-

$$f(x, y) = x^n f_1\left(\frac{y}{x}\right) \text{ and } \varphi(x, y) = x^n \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)$$

چونکہ $y = vx$، اس لیے

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

اب دی ہوئی تفرقی مساوات ذیل ہوجاتی ہے :-

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{f_1(v)}{\varphi_1(v)}$$

$$\frac{\varphi_1(v)\,dv}{f_1(v) - v\varphi_1(v)} = \frac{dx}{x},$$

جس میں کہ اب متغیر الگ ہوگئے ہیں (separable)

مثال

حل کیجیے

$$x^2\,dy + y(x+y)\,dx = 0$$

یہاں ہم پاتے ہیں

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y(x+y)}{x^2} = 0$$

اس طرح مساوات ہم جنس ہے۔ اب $y = vx$ رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$v + \frac{x\,dv}{dx} + v(1+v) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{v^2 + 2v} = -\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+2}\right) dv = -\frac{dx}{x}$$

اِس لیے حل یہ ہے :۔

$$\frac{1}{2}\log\frac{v}{v+2} = -\log x+c,$$

$$\Rightarrow \quad \log_e\sqrt{\left(\frac{y}{y+2x}\right)}+\log x = c,$$

$$\Rightarrow \quad \log\left[x\sqrt{\left(\frac{x}{y+2x}\right)}\right] = c,$$

$$\Rightarrow \quad x\sqrt{\left(\frac{x}{y+2x}\right)} = e^c = a,$$

جہاں a ایک مستقل ہے۔

$$\Rightarrow \quad x^3y = a^2(y+2x)$$

مشقیں

حل کیجیے :۔

1. $(x+y)\,dy+(x-y)\,dx = 0.$
2. $\dfrac{2dy}{dx} = \dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}.$
3. $(x^3+y^3)\,dx = (x^2y+xy^2)\,dy.$
4. $(x^2+y^2)\dfrac{dy}{dx} = xy.$
5. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x-2y}{2x-y} = 0.$
6. $x\dfrac{dy}{dx} = y-\sqrt{(x^2+y^2)}.$
7. $(x^2+xy)\,dy = (x^2+y^2)\,dx.$
8. $x^2y\,dy+(x^3+x^2y-2xy^2-y^3)\,dx = 0.$
9. $[2\sqrt{(xy)}-x]\,dy+y\,dx = 0.$
10. $x^2y\,dx-(x^3+y^3)\,dy = 0.$
11. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x^2+3y^2}{3x^2+y^2} = 0.$
12. $x\sin\dfrac{y}{x}dy = \left(y\sin\dfrac{y}{x}-x\right)dx.$
13. $(6x^2+2y^2)\,dx-(x^2+4xy)\,dy = 0.$
14. $y^2+x^2\dfrac{dy}{dx} = xy\dfrac{dy}{dx}.$

جوابات

1. $\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+\tan^{-1}(y/x) = c.$ 2. $y-x = c\sqrt{(xy)}.$

3. $y+x\log[c(x-y)]=0.$

4. $y=ce^{x^2/2y^2}$

5. $(x+y)^3=c(y-x)$

6. $c-y=\sqrt{(x^2+y^2)}.$

7. $(x-y)^2=cxe^{-y/x}$

8. $\log\frac{c(y-x)}{x^4(y+x)}=\frac{4x}{x+y}$

9. $\log y+\sqrt{(x/y)}=c.$

10. $x^3=3y^3\log cx.$

11. $\log(x+y)+2xy(x+y)^{-2}=c$

12. $\log x=\cos(y/x)+c.$

13. $(2x+y)(2y-3x)=cx.$

14. $y/x=c+\log y.$

11·7- ہم جنس شکل میں تبدیل ہوسکنے والی مساواتیں

ذیل شکل کی مساواتیں

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}$$

ہم جنس شکل میں بدل سکتی ہیں۔ اگرچہ x اور y کے بجائے نئے متغیر X اور Y لیں جہاں کہ

$$x=X+h,\ y=Y+k$$

جبکہ h اور k مستقل ہیں جنھیں ایسا لینا ہے کہ دی ہوئی مساوات ہم جنس ہوجائے ہم پاتے ہیں

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(Y+k)}{dx}=\frac{dY}{dx}=\frac{dY}{dX}\cdot\frac{dX}{dx}=\frac{dY}{dX}$$

اس لیے مساوات اب ذیل شکل میں بدل جاتی ہے

$$\frac{dY}{dX}=\frac{aX+bY+(ah+bk+c)}{AX+BY+(Ah+Bk+C)}$$

مان لیجیے h اور k ایسے لیے جائیں جو کہ ذیل کو مطمئن کریں:-

$$ah+bk+c=0,\quad Ah+Bk+c=0.$$

تو ان سے ہم پاتے ہیں

$$h = \frac{bC - Bc}{aB - Ab}, k = \frac{Ac - aC}{aB - Ab}$$

جو کہ معنی رکھتا ہے سوائے اس صورت کے جبکہ $aB - Ab = 0$ ہو یعنی $a/A = b/B$

ہم جنس مساوات

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY}{AX + BY}$$

کو بہ آسانی متغیر کی تبدیلی $Y = vX$ کے ذریعے حل کر سکتے ہیں

اُس صورت میں جبکہ $aB - Ab = 0$ ہو، مان لیجیے کہ

$$\frac{a}{A} = \frac{k}{B} = r, \quad (\text{کہہ لیجیے})$$

$$\therefore a = Ar, b = Br$$

اب مساوات یہ ہو جاتی ہے :-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r(Ax + By) + c}{Ax + By + C}$$

اگر $z = Ax + By$ رکھیں تو $\frac{dz}{dx} = A + B\frac{dy}{dx}$ اور ہم پاتے ہیں

$$\frac{dz}{dx} = B\frac{rz + c}{z + C} + A$$

جس میں کہ متغیر الگ الگ ہو سکتے ہیں (separable)۔

مثال

حل کیجیے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y + 3}{2x + 3y + 4}$$

یہاں $x = X + h$ اور $y = Y + k$ رکھنے پر مساوات یہ ہو جاتی ہے :-

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y + (h + 2k + 3)}{2X + 3Y + (2h + 3k + 4)}$$

اب h اور k ایسے معلوم کرنے ہیں کہ

$$h+2k+5=0,\ 2h+3k+4=0.$$

$$n=1,\ k=-2.$$

$$\therefore \qquad \frac{dY}{dX}=\frac{X+2Y}{2X+3Y}$$

اب $Y=vX$ رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$v+X\frac{dv}{dx}=\frac{1+2v}{2+3v}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{2+3v}{3v^2-1}\,dv=-\frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \qquad \left[\frac{2+\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}v-1)}-\frac{2-\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}v+1)}\right]dv=-\frac{dX}{X}$$

$$\therefore \qquad \frac{2+\sqrt{3}}{2}\log(\sqrt{3}v-1)-\frac{(2-\sqrt{3})}{2}\log(\sqrt{3}v+1)=[-\log X+c]\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{2+\sqrt{3}}{2}\log(\sqrt{3}Y-X)-\frac{2-\sqrt{3}}{2}\log(\sqrt{3}Y+X)=\sqrt{3}c=a.$$

جو کہ درکار حل ہے، جبکہ $X=x-1$ اور $Y=y+2$.

مشقیں

ذیل تفرقی مساواتیں حل کیجیے :۔

1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-2y+5}{2x+y-1}$
2. $(3y-7x-3)\,dx+(7y-3x-7)\,dy=0.$
3. $(4x+6y+5)\,dx=(2x+3y+4)\,dy.$
4. $\dfrac{ay}{dx}=\dfrac{ax+by-a}{bx+ay-b}$.
5. $(2x+y+1)\,dx+(4x+2y-1)\,dy=0.$

6. $(2x+3y-6)\,dy = (6x-2y-7)\,dx.$

7. $(2x+3y-8)\,dx = (x+y-3)\,dy.$

جوابات

1. $x^2-y^2-4xy+10x+2y = c.$

2. $c\,(y-x-1)^2\,(y+x-1)^3 = 1.$

3. $\frac{1}{2}(2x+y^2)+\frac{1}{16}\log(16x+24y+23) = x+c.$

4. $(y-x+1)^{a+b}(y+x-1)^{a-b} = c$

5. $\log(2x+y-1)+x+2y = c.$ 6. $3x^2-\frac{3}{2}y^2-2xy-7x+6y = c.$

7. $\sqrt{3}\log(Y^2-2XY-2X^2)+2\log\{[Y-(1+\sqrt{3})X]/[Y-(1-\sqrt{3})X]\} = c;$

(جہاں $X = x-1$ اور $Y = y-2.$)

11.8 - راست تفرقی مساواتیں

کسی تفرقی مساوات کو راست تب کہتے ہیں جبکہ اُسے اُس کے ابتدائی سے براہ راست تفرق کرکے حاصل کیا جاسکے، بغیر کسی اور تبدیلی کے (مثلاً اسقاط وغیرہ)

مثال: تفرقی مساوات

$$(x^2-ay)\,dx+(y^2-ax)\,dy = 0$$

راست ہے کیونکہ اِسے، اِس کے ابتدائی

$$x^3-3axy+y^3 = c$$

سے براہ راست تفرق کرکے حاصل کرسکتے ہیں۔

مسئلہ (Theorem) تفرقی مساوات

$$M+N\frac{dy}{\partial x}=0 \Rightarrow Mdx+Ndy=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

کے راست ہونے کے لیے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

اِس شرط کے کافی ہونے کا ثبوت اِس کتاب کے معیار کے باہر ہے۔ ہم صرف اِس کا ضروری ہونا ثابت کریں گے۔
مان لیجیے کہ ابتدائی

$$f(x, y)=c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(2)}$$

ہے، جہاں c اختیاری مستقل ہے۔
اب x کی نسبت سے (2) کا تفرق کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(3)}$$

چونکہ مساوات (1)، راست ہے، اِس لیے (3) اور (1) ایک ہی ہونا چاہیے۔ اِس لیے ہم پاتے ہیں

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(4)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(5)}$$

اب (4) اور (5) کا ترتیب وار بلحاظ y اور x کے تفرق کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

لیکن چونکہ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

اگر مساوات $Mdx+Ndy=0$ راست ہو تو ہم اسے ذیل طریقے سے حل کر سکتے ہیں:—
پہلے y کو مستقل لیتے ہوئے، x کی نسبت سے M کا تکمل کیجیے پھر N کے اُن ارکان کا بلحاظ y تکمل کیجیے جن میں x نہیں ہے۔ اس طرح سے حاصل ہوئے دونوں حصّوں کو جوڑ کر ایک مستقل کے برابر رکھنے پر حل مل جاتا ہے۔

ذیل مثالوں سے یہ طریقہ سمجھ میں آجائے گا۔

مثال

ثابت کیجیے کہ مساوات

$$(x^4-2xy^3+y^4)dx-(2x^2y-4xy^3+\sin y)\,dy=0$$

راست ہے اور اسے حل کیجیے

یہاں

$$M = x^4-2xy^2+y^4$$
$$N = -(2x^2y-4xy^3+\sin y)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= -4xy+4y^3\\ \frac{\partial N}{\partial x} &= -4xy+4y^3\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس طرح دی ہوئی مساوات راست ہے۔

اب y کو مستقل لیتے ہوئے بلحاظ x کے M کا تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\tfrac{1}{5}x^5 - x^2y^3 + xy^4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

اب N کا صرف ایک رکن $-\sin y$ ایسا ہے جس میں x نہیں ہے۔ اُس کا تکملہ

$$\cos y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ہے۔ اِس لیے ابتدائی

$\tfrac{1}{5}x^5 - x^2y^3 + xy^4 + \cos y = c$ ہے۔

مشقیں

حل کیجیے

1. $(ax+hy+g)\,dx+(hx+by+f)\,dy = 0.$
2. $xdy+(x+y)\,dx = 0.$
3. $(e^y+1)\cos x\,dx+e^y\sin x\,dy = 0.$
4. $x(y^2-x^2-a^2x)\,dx+y(y^2+x^2-b^2y)dy = 0.$
5. $[y(1+x^{-1})+\sin y]\,dx+(x+\log x+x\cos y)\,dy = 0.$
6. $(x^2-ay)\,dx+(y^2-ax)\,dy = 0.$

جوابات

1. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c = 0.$
2. $xy+\tfrac{1}{2}x^2 = c.$ 3. $(e^y+1)\sin x = c.$
4. $6x^2y^2-3x^4+3y^4-4a^2x^3-4b^2y^3 = c.$
5. $xy+y\log x+x\sin y = c.$ 6. $x^3+y^3-3axy = c$

11.9- تکملی جزو

کبھی کبھی ایسی تفرقی مساواتیں جو راست نہ ہوں کسی مناسب فنکشن سے ضرب کرنے پر راست ہوجاتی ہیں۔ ایسے فنکشن کو تکملی جزو کہتے ہیں

مساوات

$$x\,dy - y\,dx = 0$$

راست نہیں ہے لیکن $1/y^2$ سے ضرب دینے پر ہم پاتے ہیں

$$\frac{x}{y^2}\,dy - \frac{1}{y}\,dx = 0$$

اور ہم آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ یہ راست ہے۔

خطی مساوات

$$\frac{dy}{dx} + Py + Q = 0$$

کے لیے تفاعل

$$e^{\int P dx}$$

تکملی جزو ہے۔

اس کتاب میں تکملی جزو معلوم کرنے کے عام قاعدے پر غور کرنا ہمارا مقصد نہیں ہے۔

مشقیں

1- ثابت کیجیے کہ

$$(y - 2x^3)\,dx - x\,(1 - xy)\,dy = 0$$

$1/x^2$ سے ضرب کرنے پر راست ہوجاتی ہے۔ اس کو حل بھی کیجیے۔

2- حل کیجیے

$$y(2xy + e^x)\,dx - e^x\,dy = 0.$$

3۔ حل کیجیے

$$(1+yx)\,x\,dy+(1-yx)\,y\,dx = 0.$$

جوابات

1. $xy^2 = cx+2y+2x^3$. 2. $2x^2y-cy+2e^x = 0$. 3. $\log\frac{y}{x}-\frac{1}{xy} = c$.

باب 11 پر مشقیں

ذیل تفرقی مساواتیں حل کیجیے:۔

1۔ $x^2\frac{ay}{dx} = \frac{y(x+y)}{2}$

2۔ $\cos^3 x\,\frac{dy}{dx}+y\cos x = \sin x$

3۔ $\frac{dy}{dx}+y\sec x = \tan x$

4۔ $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-3}{2x+y-3}$

5۔ $\frac{dy}{dx}+y\cot x = 2\cos x.$

6۔ $(x^2+y^2)\frac{dy}{dx} = xy.$

7۔ $\sec^2 x\tan y\,dx+\sec^2 y\tan x\,dy = 0$

8۔ $2(1-xy)\frac{dy}{dx} = y^2.$

9۔ $\frac{dy}{dx}-2y\tan x = y^2\tan^3 x$

10۔ $(x^2+y^2)dx-2xy\,dy = 0$

11۔ $\frac{1}{2x}\,\frac{dy}{dx}+\frac{x+y}{x^2+y^2} = 0$

12۔ $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{\sqrt{(x^2+a^2)}} - 3x$ such that $y = a^2$ when $x = 0$.

13۔ $x\,dy-y\,dx = \sqrt{(\lambda^2+y^2)}\,dx$

14۔ $(x+y)\,dx+(y-x)\,dy = 0$

15۔ $y^2(y\,dx+2x\,dy)-x^2(2y\,dx+x\,dy) = 0$

16۔ $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+y = \tan^{-1} x.$

17۔ $\frac{dy}{dx}+\frac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y}$

18. $\frac{dy}{dx} + y\cos x = \sin 2x$

19. $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$

20. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$

21. $(xy^3 - e^{1/x^3})dx - x^2 y\, dy = 0$

22. $(2x - y + 1)\, dx + (2y - x -- 1)\, dy = 0$

23. $xy^2 (xy_1 + y) = a^2$

24. $(y^3 - 2yx^2)\, dx + (2xy^2 - x^3)\, dy = 0$

25. $\sec^2 y \frac{dy}{dx} + 2x \tan v = x^3$

26. $(x + y + 1) \frac{dy}{dx} = 1$

27. $(x^2 + 2xy - y^2)\, dx + (y^2 + 2xy - x^2)\, dy = 0$

28. کسی ہموار سطح میں سبھی دائروں کی تفرقی مساوات ذیل شکل میں حاصل کیجیے :۔

$$y_3(1 + y_1^2) - 3y_1 y_2^2 = 0$$

29۔ اُن سبھی مخروطوں (conics) کی تفرقی مساوات معلوم کیجیے جن کے محاور مختصات محاور (co-ordinate axes) پر پڑیں۔

30۔ ثابت کیجیے کہ مساوات

$$(4x + 3y + 1)\, dx + (3x + 2y + 1)\, ay = 0$$

اُن زائدوں کے نظام کی مساوات ہیں جن کے لامتناہی مماس $x + y = 0,\ 2x + y + 1 = 0$ ہیں۔

31۔ حل کیجیے

$$\left\{x\cos\frac{y}{x} + y\sin\frac{y}{x}\right\} y = \left\{y\sin\frac{y}{x} - x\cos\frac{y}{x}\right\} x \frac{dy}{dx}$$

جوابات

1. $(y-x)^3 = cxy^2$.

2. $1 + y = \tan x + ce^{-\tan x}$.

3. $(y-1)(1+\sin x) = (c-x)\cos x.$

4. $c(x-y)^2 = x+y-2.$

5. $2y \sin x+\cos 2x+c = 0.$

6. $cy=e^{x^2/2y^2}$

7. $c \cot x \cot y = 1.$

8. $xy^2 = 2y+c.$

9. $y(\sin^2 x+c \cos^2 x)+3 \cos x = 0.$

10. $c(x^2-y^2) = x.$

11. $y^3+3yx^2+2x^3 = c.$

12. $y(x+\sqrt{a^2+x^2}) = x^3+(a^2+x^2)^{3/2}$

13. $c(\sqrt{(x^2+y^2)}-y) = 1.$

14. $c\sqrt{(x^2+y^2)} = e^{\tan^{-1}(y/x)}.$

15. $xy\sqrt{(x^2-y^2)} = c.$

16. $y+1 = \tan^{-1} x+ce^{-\tan^{-1} x}.$

17. $3\sqrt{y+1-x^2} = c(1-x^2)^{1/4}.$

18. $y+2 = 2 \sin x+ce^{-\sin x}$

19. $y+1 = \tan x+ce^{-\tan x}.$

20. $y-2x = cx^2y.$

21. $x^{-2} y^2 = \frac{1}{2}e^{1/x^2}+c.$

22. $x^2-xy+x+y^2-y = c.$

23. $2x^3y^3 = 3a^2x^2+c.$

24. $xy\sqrt{(y^2-x^2)} = c.$

25. $2 \tan y = x^2-1+ce^{-x^2}$

26. $x+y+2 = ce^y.$

27. $c(x^2+y^2) = x+y.$

29. $xyy_2+xy_1^2 = yy_1.$

30. $xy \cos \frac{y}{x} = c.$

12

پہلے رتبے کی وہ مساواتیں جوکہ پہلی ڈگری کی نہیں ہیں

12.1 ۔ عام طور پر، اُن مساواتوں پر غور کرتے وقت جوکہ پہلے رتبے کی تو ہیں لیکن پہلی ڈگری کی نہیں، dy/dx کے بجائے p لکھتے ہیں۔ اب ذیل قسم کی مساواتوں پر غور کیا جائے گا:۔

1 ۔ وہ مساواتیں جنھیں p کے لیے حل کرسکتے ہیں

2 ۔ وہ مساواتیں جنھیں y کے لیے حل کرسکتے ہیں

3 ۔ وہ مساواتیں جنھیں x کے لیے حل کرسکتے ہیں

ان پر ذیل سیکشنوں میں غور کیا جائے گا۔

12.2 ۔ وہ مساواتیں جنھیں p کے لیے حل کرسکتے ہیں

ذیل کی مثال سے حل نکالنے کا طریقہ سمجھ میں آجائے گا۔

مثال

حل کیجیے

$$p^2+2py\cot x=y^2$$

p کے لیے حل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$p=\frac{-2y\cot x\pm\sqrt{(4y^2\cot^2 x+4y^2)}}{2}$$

$$=-y\cot x\pm y\operatorname{cosec} x$$

$$=y(-\cot x\pm\operatorname{cosec} x).$$

اس طرح ہم پاتے ہیں

(1) .... $\frac{dy}{dx}=y(-\cot x+\operatorname{cosec} x),$

(2) .... $\frac{dy}{dx}=-y(\cot x+\operatorname{cosec} x)$ اور

اب (1) اور (2) میں متغیر الگ الگ (separable) ہو سکتے ہیں۔

(1) سے ملتا ہے۔

$$\frac{dy}{y}=(-\cot x+\operatorname{cosec} x)\,dx$$

$$\Rightarrow \log y=-\log\sin x+\log\tan\frac{x}{2}+\log c=\log\frac{c\tan\frac{x}{2}}{\sin x}$$

(3)... $\Rightarrow$ $y=\frac{c\tan\frac{x}{2}}{\sin x}=\frac{c}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{c}{1+\cos x}$

پھر (2) سے ملتا ہے

$$\frac{dy}{y}=-(\cot x+\operatorname{cosec} x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \log y = -\left(\log \sin x + \log \tan \frac{x}{2}\right) + \log c$$

$$= \log \frac{c}{\sin x \tan \frac{x}{2}}.$$

$$(4) \cdots\cdots \Rightarrow \quad y = \frac{c}{\sin x \tan \frac{x}{2}} = \frac{c}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{c}{1 - \cos x}.$$

اس لیے (1) اور (2) کے حل

$$y - \frac{c}{1+\cos x} = 0, \quad y - \frac{c}{1-\cos x} = 0.$$

ہیں اور اس لیے دی ہوئی تفرقی مساوات کا مرکب حل

$$\left(y - \frac{c}{1+\cos x}\right)\left(y - \frac{c}{1-\cos x}\right) = 0.$$ ہے۔

مشقیں

ذیل تفرقی مساوات حل کیجیے :-

1. $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-x)\frac{dy}{dx} - y = 0.$
2. $y^2 + xyp - x^2p^2 = 0$
3. $xyp^2 - (x^2+y^2)p + xy = 0.$
4. $x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\frac{dy}{dx} - 6y^2 = 0.$
5. $p^2y + (x-y)p - x = 0.$

جوابات

1. $(y-c-x)(xy-c) = 0.$
2. $(y^2 - cx^{1+\sqrt{5}})(y^2 - cx^{1-\sqrt{5}}) = 0.$
3. $(y-cx)(x^2-y^2-c) = 0.$
4. $(y-cx^2)(x^3y-c) = 0.$
5. $(x^2+y^2-c)(y-x-c) = 0.$

12.3 ۔ وہ مساواتیں جنھیں y کے لیے حل کر سکتے ہیں

مان لیجیے کہ دی ہوئی تفرقی مساوات کو y کے لیے حل کرنے پر

$$y = f(x, p) \qquad \text{. . . . . } (1)$$

ملتا ہے۔ اس کا بلحاظ x تفرق کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$p = \frac{dy}{dx} = \varphi\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right)$$

جو کہ متغیروں x اور p میں ایک نئی تفرقی مساوات ہے۔
مان لیجیے اس کو حل کرنا ممکن ہے اور حل

$$F(x, p, c) = 0 \qquad \text{. . . . . } (2)$$

ہے، جہاں کہ c اختیاری مستقل ہے۔
مساوات (1) کا ذیل حل دو شکلوں میں سے کسی شکل میں بھی رکھا جا سکتا ہے:۔
یا تو ہم (1) اور (2) سے p اسقاط کریں اور درکار حل $\psi(x, y, c)$ حاصل کریں،
یا پھر (1) اور (2) کو x اور y کے لیے حل کر کے درکار حل

$$x = f_1(p, c)$$
$$y = f_2(p, c),$$

حاصل کریں، جہاں کہ p پیرامیٹر ہے۔

مثال

حل کیجیے

$$y + px = p^2x^4$$

یہاں، بلحاظ x تفرق کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\frac{dy}{dx} + p + x\frac{dp}{dx} = 4x^3p^2 + 2x^4p\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad 2p-4x^3p^2-2x^4p\frac{dp}{dx}+x\frac{dp}{dx}=0,$$

$$\Rightarrow \quad 2p(1-2x^3p)+x(1-2x^3p)\frac{dp}{dx}=0.$$

$$\Rightarrow \quad 2p+x\frac{dp}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dp}{p}+\frac{2dx}{x}=0$$

$\Rightarrow \quad \log p+2\log x =$ مستقل $= \log c$ (کہہ لیجیے)

$$\Rightarrow \quad px^2=c \Leftrightarrow p=c/x^2.$$

اب p کی اِس قیمت کو دی ہوئی تفرقی مساوات میں (p کے اسقاط کے لیے) رکھنے پر، ہم پاتے ہیں

$$y=-c/x+c^2$$

$$\Rightarrow xy=c^2x-c$$

جوکہ درکار حل ہے۔

12·4۔ وہ مساواتیں جنھیں x کے لیے حل کرسکتے ہیں

مان لیجیے کہ دی ہوئی تفرقی مساوات کو x کے لیے حل کرنے پر ملتا ہے:

$$x=f(y,p) \qquad \ldots\ldots (1)$$

اسے بلحاظ y تفرق کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\frac{1}{p}=\frac{dx}{dy}=\varphi(y,p,dp/dy)$$ (کہہ لیجیے)

اِس طرح ہمیں متغیروں y اور p میں ایک نئی تفرقی مساوات مل جاتی ہے۔
مان لیجیے اِس کا حل کرنا ممکن ہے اور حل

$$F(p,y,c)=0 \qquad \ldots\ldots (2)$$

(اب پچھلے سیکشن کی طرح (1) اور (2) سے p اسقاط کرکے حل ملے گا، یا (1) اور (2) سے x اور y کی قیمتیں p اور c کے ارقام میں نکال سکتے ہیں، جہاںکہ p کو پیرامیٹر تصور کرسکتے ہیں۔

مثال

حل کیجیے

$$y = 2px + y^2p^4$$

اسے x کے لیے حل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$x = \frac{y - y^2p^4}{2p} = \frac{y}{2p} - \frac{y^2p^3}{2}$$

اب بلحاظ y تفرق کرنے پر ملتا ہے

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2p} - \frac{y}{2p^2}\frac{dp}{dy} - yp^3 - py^2\frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2p} + p^3y + \left(\frac{y}{2p^2} + py^2\right)\frac{dp}{dy} = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+2p^3y}{2p} + \frac{y(1+2p^3y)}{2p^2}\cdot\frac{dp}{dy} = 0.$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \frac{y}{p}\frac{dp}{dy} = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} = 0.$$

$\Rightarrow \quad \log y + \log p =$ مستقل $= \log c$ (کہہ لیجیے)

$$\Rightarrow \quad py = c \quad \Leftrightarrow \quad p = c/y$$

اب p کی یہ قیمت دی ہوئی مساوات میں رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$y = \frac{2cx}{y} + y^2\cdot\frac{c^3}{y^3} \Rightarrow y^2 = 2cx + c^3$$

جوکہ درکار حل ہے۔

مشقیں

ذیل تفرقی مساواتیں حل کیجیے :۔

1. $p^2y+2px-y=0$
2. $ap^2+py-x=0$
3. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-4xy\frac{dy}{dx}+8y^2=0.$
4. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2y^2-2x\frac{dy}{dx}+y=0.$
5. $4p^3+3xp=y.$

جوابات

1. $x=\frac{c(1-p^2)}{p^2},\ y=\frac{2c}{p}$
2. $x=\frac{(c-a\cosh^{-1}p)}{\sqrt{(p^2-1)}}p,\ y=\frac{c-a\cosh^{-1}p}{\sqrt{(p^2-1)}}-ap.$
3. $64y=c(4x-c)^2.$
4. $2cx=c^2+y^2.$
5. $y=-\frac{8}{7}p^3+cp^{-\frac{1}{2}},\ x=-\frac{12}{7}p^2+\frac{c}{3}p^{-\frac{3}{2}}.$

12·5 ۔ کلیرو (Clairut) کی مساوات

تفرقی مساوات

$$y=px+f(p) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

کلیرو کی مساوات کہلاتی ہے۔ یہاں $f(p)$, p کا کوئی تفاعل ہے۔ (1) کا حل نکالنے کے لیے بلحاظ x تفرق کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+f'(p)\cdot\frac{dp}{dx}$$

$$\left[x+f'(p)\right]\frac{dp}{dx}=0.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{dp}{dx}=0 & \cdots\cdots\cdots\cdots (2)\\ x+f'(p)=0 & \cdots\cdots\cdots\cdots (3)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

اب (2) سے ملتا ہے

$$p=\text{مستقلہ}=c \text{ (کہہ لیجیے)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

(1) اور (4) سے p اسقاط کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$y=cx+f(c) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

جوکہ (1) کا حل ہے۔

اگر (1) اور (3) سے p اسقاط کریں تو ایسا حل ملتا ہے جوکہ عام حل (5) میں سے نہیں ہے۔ اُس حل کو ہم واحد حل (singular solution) کہتے ہیں (§ 12·7 دیکھیے)

نوٹ: جیسا کہ نیچے کی مثال 2 میں دیکھیں گے، کبھی کبھی تغیر کی تبدیلی سے دی ہوئی مساوات کلیرو کی مساوات بن جاتی ہے۔

مثالیں

1۔ حل کیجیے

$$y=px+\log p$$

کلیرو کی اِس مساوات کا حل

$$y=cx+\log c$$

ہے جوکہ p کی جگہ اختیاری مستقل c رکھنے پر ملتا ہے۔

2۔ حل کیجیے

$$x^2(y-px)=p^2y$$

ہم رکھتے ہیں

$$x^2=u, \qquad y^2=v$$

$$2x\,dx = du \quad \text{اور} \quad 2y\,dy = dv.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y\,dy}{x\,dx} = \frac{dv}{du} \Rightarrow p = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dv}{du}.$$

p کی اس قیمت کو دی ہوئی تفرقی مساوات میں رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$x^2\left(y - \frac{x^2}{y} \cdot \frac{dv}{du}\right) = \frac{x^2}{y}\left(\frac{dv}{du}\right)^2,$$

$$\Rightarrow \quad \left(y^2 - x^2\frac{dv}{du}\right) = \left(\frac{dv}{du}\right)^2,$$

$$\Rightarrow \quad \left(v - u\frac{dv}{du}\right) = \left(\frac{dv}{du}\right)^2,$$

$$\Rightarrow \quad v = u\frac{dv}{du} + \left(\frac{dv}{du}\right)^2,$$

جو کہ کلیرو کی مساوات ہے، لہٰذا حل

$$v = cu + c^2$$

یعنی $y^2 = cx^2 + c^2$ ہے۔

3۔ حل کیجیے

$$y = xf_1(p) + f_2(p)$$

یہ کلیرو کی مساوات نہیں ہے
x کی نسبت سے تفرق کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$p = f_1(p) + xf_1'(p)\frac{dp}{dx} + f_2'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} = \frac{f_1'(p)}{p - f_1(p)}\,x + \frac{f_2'(p)}{p - f_1(p)},$$

جو کہ خطی ہے اگر چہ p کو غیر تابع متغیر اور x کو تابع متغیر لیں۔
مان لیجیے اس خطی مساوات کو حل کرنے پر ہمیں

$$\varphi(x, p, c) = 0$$

ملے تو اِس حل اور دی ہوئی مساوات سے p اسقاط کرنے پر درکار حل ملتا ہے۔

مشقیں

1. $(y-px)(p-1) = p.$
2. $y = x\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2.$
3. $y = x\dfrac{dy}{dx} + e^{dy/dx}$
4. $(px-y)(py+x) = a^2p.$ (یہاں $x^2 = u, y^2 = v$ رکھیے)
5. $y + xp\log p = (2+3\log p)p^2.$
6. $y = 2px - p^2.$

جوابات

1. $(y-cx)(c-1) = c.$
2. $y = cx+c^2.$
3. $y = cx+e^c.$
4. $y^2 = cx^2 - a^2c/(1+c).$
5. $x = 3p^2 + cp^{-1}, y = 2p^3 - c\log p.$
6. $x = \frac{2}{3}p + cp^{-2}, y = \frac{1}{3}p^2 + 2cp^{-1}.$

12·6- پہلے رتبے کی تفرقی مساوات کا جیومیٹریائی مفہوم

کوئی تفرقی مساوات

$$\varphi(x, y, dy/dx) = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

لیجیے اور مان لیجیے کہ اِس کا عام حل

$$f(x, y, c) = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

ہے، جہاں کہ c اختیاری مستقل ہے۔

اختیاری مستقل c کی ہر قیمت کے لیے، مساوات (2) کسی منحنی کی مساوات ہے اِس

لیے مساوات (2) ایک قبیلۂ منحنی (family of curves) کی مساوات ہے جہاں کہ c اُس قبیلے کا پیرامیٹر ہے۔ اِس لیے ہم کہتے ہیں کہ پہلے رتبے کی ہر تفرقی مساوات ایک قبیلۂ منحنی کو ظاہر (represents) کرتی ہے۔

اب ہموار سطح پر کوئی نقطہ لے لیجیے اور اُس کے مختصات (x, y) کو (1) اور (2) میں رکھنے پر ملی ہوئی مساواتوں کو حل کیجیے جن میں dy/dx اور c ہیں۔ اِس طرح سے ملی ہوئی c کی قیمتیں پیرامیٹر کی وہ قیمتیں ہیں جن سے اُس قبیلے کے (x, y) سے گزرنے والے منحنی حاصل ہوتے ہیں اور حاصل کی ہوئی dy/dx کی قیمتیں دیے ہوئے نقطے پر اُن منحنیوں کے مماسوں کی ڈھال (slopes) ہیں۔ اِس طرح عام طور پر یہ امید کی جاتی ہے کہ مساوات (2) میں c کی ڈگری، مساوات (1) میں dy/dx کی ڈگری کے برابر ضرور ہونا چاہیے، جو کہ تفرقی مساوات کی ڈگری بھی ہے۔

12·7- واحد حل (Singular Solutions)

علاوہ عام حل اور مخصوص حلوں (particular solutions) کے، جو کہ عام حل میں اختیاری مستقلوں کو خاص قیمتیں دے کر حاصل کرتے ہیں، کسی تفرقی مساوات کے اور بھی حل ہو سکتے ہیں۔ ایسے دوسرے حل واحد حل (Singular solutions) کہلاتے ہیں۔ اِس سلسلے میں ذیل نتیجہ ملتا ہے۔

جب بھی قبیلۂ منحنی

$$f(x, y, c) = 0 \quad \cdots\cdots (1)$$

جنھیں تفرقی مساوات

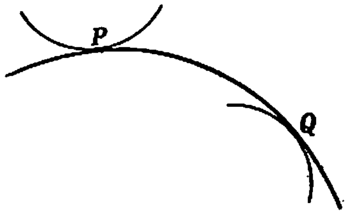
$$\varphi(x, y, dy/dx) = 0 \quad \cdots\cdots (2)$$

سے ظاہر کرتے ہوں، اُس کے لفاف (envelope) کا وجود ہو تو لفاف کی مساوات ہی تفرقی مساوات (2) کا واحد حل ہے۔

مان لیجیے کہ قبیلۂ منحنی کے لفاف کا وجود ہے۔ لفاف پر کوئی نقطہ $P(x, y)$ لے لیجیے اب قبیلۂ منحنی کا ایک منحنی ایسے ضرور ہوگا جو لفاف کو (x, y) پر چھوتا ہو۔ مان لیجیے وہ منحنی

$$f(x, y, c_1)=0$$

ہے۔ اب x, y اور dy/dx کی، P والے منحنی سے حاصل قیمتیں دی ہوئی تفرقی مساوات



تصویر 51

کو مطمین کریں گی۔ ساتھ ہی لفاف سے حاصل P والی اور dy/dx قیمتیں بھی انھیں قیمتوں کے برابر ہوں گی۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ لفاف پر ہر نقطہ والی x, y اور dy/dx کی قیمتیں دی ہوئی تفرقی مساوات کو مطمین کرتی ہے۔ اس لیے لفاف کی مساوات دی ہوئی تفرقی مساوات کا ایک حل ہے۔

اس حل میں کوئی اختیاری مستقل نہیں ہے اور عام طور پر یہ حل عام حل میں اختیاری مستقلوں کو خاص قیمتیں دے کر نہیں حاصل ہو سکتا۔

12.71- واحد حل حاصل کرنا

مان لیجیے

$$\varphi(x, y, dy/dx) = 0$$

کوئی تفرقی مساوات ہے اور $f(x, y, c)=0$ اس کا عام حل ہے۔ اب ہمیں معلوم ہے کہ کسی قبیلۂ منحنی

$$f(x, y, c)=0 \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

کے لفاف کی مساوات اُس طریق (Locus) کی مساوات میں شامل (*contained*) ہے جو کہ

(1) اور

$$\frac{\partial f(x, y, c)}{\partial c} = 0. \qquad (2)$$

سے c استقاط کرنے پر ملتا ہے۔ مان لیجیے یہ استقاطی (eliminant)

$$\psi(x, y) = 0. \qquad (3)$$

ہے۔

چونکہ (3) والا استقاطی لفاف کے علاوہ دوسرے طریق بھی ظاہر کر سکتا ہے اس لیے اِس کی جانچ کر لینا ضروری ہے کہ طریق (3) کا کوئی حصہ دی ہوئی تفرقی مساوات کا حل ہے یا نہیں ہے۔

دوسرا طریقہ : علم مساوات (Theory of equations) سے ہمیں معلوم ہے کہ مساوات (3) ایسے نقطوں (x, y) کا طریق ہے کہ اِس کے ہر نقطہ (x, y) کے لیے (1) سے حاصل c کی قیمتوں میں سے کم از کم دو قیمتیں برابر ہوتی ہیں، یعنی (x, y) سے گزرنے والے قبیلہ منحنی کے کم از کم دو منحنی ایک ہی ہوتے ہیں (coincide)۔ چونکہ $\varphi(x, y, dy/dx)=0$ یعنی $\varphi(x, y, p)=0$ سے (x, y) گزرنے والے قبیلہ منحنی کے مماسوں کی ڈھال (slopes) ملتی ہیں۔ اِس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ (3) پر کسی نقطہ (x, y) کے لیے، p کی کم از کم دو قیمتیں ضرور برابر ہونی چاہییں۔ لہٰذا ہم دیکھتے ہیں کہ لفاف اور اِس لیے واحد حل بھی، اُس طریق میں شامل ہے جو کہ مساواتوں

$$\varphi(x, y, p)=0, \quad \frac{\partial \varphi(x, y, p)}{\partial p}=0.$$

سے p استقاط کرنے پر ملتا ہے۔

مثالیں

1۔ کلیرو کی مساوات

$$y=px+f(p) \qquad (1)$$

کا واحد حل نکالیے۔

عام حل

$$y=cx+f(c) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

ہے۔ اس لیے اور

$$0=x+f'(c) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

سے c اسقاط کرنے پر واحد حل ملتا ہے، جہاں کہ (3), (2) کا بلحاظ c تفرق کرنے پر ملا ہے۔

اب کا بلحاظ p جزوی تفرق کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$0=x+f'(p) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

اس لیے، (1) اور (4) سے p اسقاط کرنے پر بھی واحد حل ملتا ہے۔ یہ بات ظاہر ہے کہ اسقاطی $c=$ ، اسقاطی $p=$ ایک ہی ہیں۔

2۔ مساوات

$$x^2p^2+yp(2x+y)+y^2=0$$

کو ماضی $y=u, \; xy=v$ کے ذریعے حل کیجیے اور اُس کا واحد نکالیے۔

ہم پاتے ہیں

$$y=u, \qquad x=v/u$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{du}=1, \quad \frac{dx}{du}=\frac{u\frac{dv}{du}-v}{u^2}$$

اِن سے ملتا ہے

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{u^2}{u\frac{dv}{du}-v}$$

دی ہوئی تفرقی مساوات میں یہ قیمتیں رکھنے پر، ہم پاتے ہیں

$$\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^2+(u^2+2v)\left(u\frac{dv}{du}-v\right)+v^2=0$$

$$\Rightarrow \quad v=u\frac{dv}{du}+\left(\frac{dv}{du}\right)^2$$

جو کہ کلیرو کی مساوات ہے۔ اس کا عام

$$v=cu+c^2$$

یعنی $xy=cy+c^2$ .... (1)

ہے۔ واحد حل نکالنے کے لیے بلحاظ c کے (1) کا جزوی تفرق کرنے پر ہم پاتے ہیں

$0=y+2c.$ .... (2)

اب (1) اور (2) سے c اسقاط کرنے پر ملتا ہے

$$y(y+4x)=0.$$

اب $y=0$ پر غور کیجیے۔ تفرق کرنے پر ہم $p=0$ پاتے ہیں۔ اب $y=0$ اور $p=0$ رکھنے پر دی ہوئی تفرقی مساوات مطمین ہوتی ہے۔

اب $y+4x=0$ پر غور کیجیے۔ اس سے $p=-4$ ملتا ہے۔ دی ہوئی تفرقی مساوات میں $y=-4x$ اور $p=-4$ رکھنے پر وہ مطمین ہوتی ہے۔

اس لیے $y=0$ اور $y+4x=0$ دونوں واحد حل ہیں۔

مشقیں

1۔ مساوات

$$y^2-2pxy+p^2(x^2-1)=m^2$$

کے عام اور واحد حل معلوم کیجیے۔

2۔ ثابت کیجیے کہ مساوات

$$y=px-(1+p^2)^{1/2}$$

کے لفاف کی مساوات $(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)+1=0$ ہے۔

3۔مساوات

$$9p^2(1-y)^2 = 4(2-y)$$

کے عام اور واحد حل نکالیے۔

4۔ثابت کیجیے کہ مساوات

$$x^3(y-px) = p^2y$$

کا کوئی واحد حل نہیں ہے۔

5۔مساوات $x^3p^2+x^2yp+a^3 = 0$ کو حل کیجیے اور اُس کے واحد حل کے لیے جانچ کیجیے۔

6۔مساوات

$$y = 2x\frac{dy}{dx}+y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

کو حل کیجیے اور اُس کا واحد حل بھی نکالیے۔

7۔ثابت کیجیے کہ $px+y = p^2x^4$ کا واحد حل $4x^2y+1 = 0$ ہے۔

جوابات

1. $(y-cx)^2 = m^2+c^2,\ y^2+m^2x^2 = m^2.$
3. $(x+c)^2 = (y+1)^2(2-y),\ y = 2.$
5. $c^2x-cxy+a^3 = 0,\ xy^2 = 4a^3.$
6. $y^2 = 2cx+c^3,\ 27y^4+32x^3 = 0.$

باب 12 پر مشقیں

حل کیجیے :۔

1۔ $p^2+py = x(x+y)$

2۔ $p = \sin(x-y)$

3۔ $p(p-y) = x(x+y)$

4۔ $p^2xy+p(4x^2-3y^2)-12xy = 0$

5۔ $(1+p^2)y = 2px$ 6۔ $p^2x^2-2pxy+y^2+4p = 0$

7۔ $p^2(p+m) = a(y+mx)$ 8۔ $y = 2px+f(p^2x)$

9۔ $y = 2px+y^{n-1}p^n$

10۔ مساوات $xp^2-(x-a)^2 = 0$ حل کیجیے اور واحد حل کے لیے جانچ کیجیے۔

11۔ اُسی منحنی کی مساوات حاصل کیجیے جو تفرقی مساوات $y = p^2(x-p)$ کو مطمئن کرے اور $x = \frac{1}{2}$ پر $p = 0$ ہو۔

12۔ مساوات $xp^2-py-y = 0$ حل کیجیے اور خطوں $y^2+4xy = 0$ اور اس تفرقی مساوات کے تکملی منحنیوں (integral curves) میں رشتے کی جانچ کیجیے۔

13۔ حل کیجیے

$$e^{3x}(p-1)+p^3e^{2y} = 0$$

14۔ ثابت کیجیے کہ مساوات

$$y+\frac{dy}{dx} = 1+\frac{dx}{dy}+x\frac{dy}{dx}$$

کے سبھی تکملی منحنی (integral curves) یا تو خط مستقیم (straight lines) ہیں یا مکافی ہیں۔

15۔ ذیل کو حل کیجیے اور واحد حل نکالیے۔

(i) $(px^2+y^2)(px+y) = (p+1)^2$ (ii) $4p^2x(x-1)(x-2) = (3x^2-6x+2)^2$

(عوضی $u = xy$ $v = x+y$ استعمال کیجیے)

16۔ مکمل طور پر حل کیجیے

$$y^2(y-px) = x^4p^2$$

(عوضی $u = 1/x$ $v = 1/y$ استعمال کیجیے)

جوابات

1. $(2y-x^2-c)(x+y-1-ce^{-x}) = 0.$ 2. $x+c = \cot[\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}(x-y)].$

3. $(y+x-1-ce^{x})(x^2+2y-c) = 0.$

4. $(y-cx^2)(y^2+4x^2+c) = 0.$

5. $x = c(1+p^2)/p^2, y = 2c/p.$

6. $c^2x^2-2cxy+4c+y^2 = 0.$

7. $x = \frac{1}{a}\left\{\frac{3}{2}p^2-mp+m^2\log(p+m)\right\}+c$

$y = \frac{1}{a}\left\{p^2\left(p-\frac{1}{2}m\right)+m^2p-m^3\log(p+m)\right\}-mc.$

8. $y = 2c\sqrt{x}+f(c^2.)$

9. $y = 2cx+c^2.$

10. $9(\pm y+c)^2 = 4x(x-3a)^2, x = 0.$

11. $(2x-1)^2 = 8y.$

12. $x = c(1+p)e^p, y = cp^2e^p.$

13. $e^y = ce^x+c^2.$

15. (*i*) $x+y = cxy+c^2,\ x^2y^2+4(x+y) = 0.$

(*ii*) $(y+c)^2 = x(x-1)(x-2)\ ;\ x = 0, x = 1, x = 2.$

16. $x = c+c^2xy\ ;\ y+4x^2 = 0.$

13

قبیلۂ منحنی کے مستدیر

(Trajectories of a Family of Curves)

13.1 ـ تعریف. وہ منحنی جو کہ ایک قبیلۂ منحنی کے ہر ممبر کو ایک دیے ہوئے اصول کے مطابق کاٹے، اُسے دیے ہوئے قبیلۂ منحنی کا مستدیر کہتے ہیں۔

ہم صرف اُس صورت پر غور کریں گے جبکہ مستدیر دیے ہوئے قبیلۂ منحنی کے ہر ممبر کو ایک مستقل زاویہ پر کاٹے۔ اگر وہ مستقل زاویہ 90 ڈگری ہو تو ایسے مستدیر کو عمودی مستدیر (Orthogonal Trajectory) کہتے ہیں۔

مثال کے طور پر، مبدا سے گزرنے والا ہر خط، مبدا پر مرکز رکھنے والے دائروں کے قبیلے کا عمودی مستدیر ہے۔

13.2 ـ کارٹیزی مختصات

وہ مستدیر حاصل کرنا جو کہ قبیلۂ منحنی $f(x, y, c) = 0$ (جہاں c پیرامیٹر ہے) کے ہر ممبر کو ایک مستقل زاویہ پر کاٹے۔

مساوات

$$f(x, y, c) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

کا بلحاظ x تفرق کرنے پر اور حاصل شدہ نتیجہ اور (1) سے c اسقاط کرنے پر ہمیں دیے ہوئے قبیلۂ منحنی کی تفرقی مساوات ملے گی۔ مان لیجیے وہ

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \qquad (2)$$

ہے۔

مان لیجیے (X, Y) مستدیر کے کسی نقطہ کے حالیہ مختصات (current co-ordinates) ہیں اور اس طرح dY/dX اس نقطہ پر مماس کی ڈھال (slope) ہے۔

اب (2) کے کسی ممبر اور مستدیر کے نقطۂ تقاطع (point of intersection) پر ہم پاتے ہیں

$$x = X \qquad (3)$$

$$y = Y \qquad (4)$$

$$\tan\alpha = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{dY}{dX}}{1 + \frac{dY}{dX}\,\frac{dy}{dx}} \qquad (5)$$

اب (5) سے ملتا ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dY}{dX} + \tan\alpha}{1 - \frac{dY}{dX}\tan\alpha} \qquad (6)$$

اب (2)، (3)، (4) اور (6) سے x, y اور dy/dx اسقاط کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\varphi\left(X, Y, \frac{\frac{dY}{dX} + \tan\alpha}{1 - \frac{dY}{dX}\tan\alpha}\right) = 0 \qquad (7)$$

یہ درکار مستدیروں کی تفرقی مساوات ہے۔ اس کو حل کرنے پر ہمیں قبیلۂ مستدیر کی کارٹیزی مساوات ملتی ہے۔

ضمنی نتیجہ۔ عمودی مستدیر: عمودی مستدیر کے لیے ہمیں (5) کی جگہ

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dY}{dX} = -1$$

لکھنا ہوتا ہے، یعنی

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dX}{dY}$$

اس طرح، عمودی مستدیر کے قبیلے کی تفرقی مساوات

$$\varphi\left(X, Y, -\frac{dX}{dY}\right) = 0$$

ہے۔

عام علامتوں میں ہم دیکھتے ہیں کہ قبیلۂ منحنی کی تفرقی مساوات

$$\varphi(x, y, dy/dx) = 0$$

سے متعلق عمودی مستدیروں کے قبیلے کی تفرقی مساوات

$$\varphi(x, y, -dx/dy) = 0$$

ہوتی ہے، جو کہ dy/dx کی جگہ $-dx/dy$ رکھنے پر ملتی ہے۔

13·3 - قطبی مختصات۔ عمودی مستدیر

قبیلۂ منحنی

$$f(r, \theta, c) = 0$$

کے لیے عمودی مستدیر حاصل کرنا، جہاں کہ c پیرامیٹر ہے۔

مساوات

$$f(r, \theta, c) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

کا بلحاظ θ تفرق کرنے پر اور حاصل شدہ نتیجہ اور (1) سے c اسقاط کرنے پر دیے ہوئے قبیلۂ منحنی کی تفرقی مساوات ملتی ہے۔ مان لیجیے وہ

$$\psi(r,\ \theta,\ dr/d\theta)=0 \qquad \text{(2)}$$

ہے۔ اب مان لیجیے (r', θ') مستدیر پر کسی نقطے کے حالیہ مختصات ہیں۔ مان لیجیے مستدیر اور (2) کے کسی ممبر کے مشترک نقطہ (common point) پر کھینچے گئے ان کے مماس مشترک نصف قطری سمتیہ (common radius vector) سے زاویہ φ اور φ' بناتے ہیں تو ہم پاتے ہیں

$$\tan\varphi=r\,\frac{d\theta}{dr},\quad \tan\varphi=r'\,\frac{d\theta'}{dr'}$$

ساتھ ہی

$$\varphi-\varphi'=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \varphi=\varphi'+\frac{\pi}{2}.$$

$$\Rightarrow \qquad \tan\varphi=-\cot\varphi'$$

$$\Rightarrow \qquad \tan\varphi\,\tan\varphi'=-1,$$

$$\Rightarrow \qquad r\,r'\,\frac{d\theta}{dr}\,\frac{d\theta'}{dr'}=-1. \qquad \text{(3)}$$

ساتھ ہی

$$r=r' \qquad \text{(4)}$$

$$\theta=\theta' \qquad \text{(5)}$$

ہم (3) کو دوسری طرح لکھتے ہیں

$$\frac{dr}{d\theta}=-rr'\,\frac{d\theta'}{dr'} \qquad \text{(6)}$$

اب (2)، (3)، (4) اور (6) سے r، θ اور $dr/d\theta$ اسقاط کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\psi\left(r',\ \theta',\ -r'^2\,\frac{d\theta'}{dr'}\right)=0, \qquad \text{(7)}$$

یہ قبیلۂ مستدیر کی تفرقی مساوات ہے۔

عام علامتوں میں ہم (7) کو یوں لکھ سکتے ہیں

$$\psi\left(r,\ \theta,\ -r^2\frac{d\theta}{dr}\right)=0.$$

جوکہ (1) میں r ، θ ، $dr/d\theta$ کی جگہوں پر ترتیب وار r ، θ ، $-r^2\, d\theta/dr$ رکھ کر حاصل کی جاسکتی ہے۔

مثالیں

1 قبیلۂ منحنی

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

کے عمودی مستدیر معلوم کیجیے، جہاں کہ λ قبیلۂ منحنی کا پیرامیٹر ہے۔

بلحاظ x کے (1) کا تفرق کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\frac{x}{a^2+\lambda}+\frac{y}{b^2+\lambda}\,\frac{dy}{dx}=0. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

اب ہمیں (1) اور (2) سے λ اسقاط کرنا ہے۔

اب (2) سے ملتا ہے

$$\lambda=-\frac{b^2x+a^2y\,\frac{dy}{dx}}{x+y\,\frac{dy}{dx}}.$$

$$\Rightarrow\quad \begin{cases} a^2+\lambda=\dfrac{(a^2-b^2)x}{x+y\,dy/dx}, \\[2ex] b^2+\lambda=\dfrac{(a^2-b^2)\,y\,dy/dx}{x+y\,dy/dx} \end{cases}$$

ان قیمتوں کو (1) میں رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$\left(x-y\,\frac{dx}{dy}\right)\left(x+y\,\frac{dy}{dx}\right)=a^2-b^2 \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

جوکہ دیے ہوئے قبیلے کی تفرقی مساوات ہے۔

اب dy/dx کی جگہ $-dx/dy$ رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)\left(x-y\frac{dx}{dy}\right)=a^2-b^2 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

جوکہ (3) ہی ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ قبیلہ (1) خود عمودی ہے، یعنی قبیلہ (1) کا ہر ممبر اسی قبیلے کے ہر ممبر کو عمودی طریقے پر کاٹتا ہے۔

2- ہم محاور دائروں (co-axial circles)

$$x^2+y^2+2gx+c=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

کے عمودی مستدیر حاصل کیجیے، جہاںکہ g پیرامیٹر ہے

(1) کا تفرق کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$x+y\frac{dy}{dx}+g=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

اب (1) اور (2) سے g اسقاط کرنے پر ملتا ہے۔

$$x^2+y^2-2x\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)+c=0,$$

$$\Rightarrow \quad y^2-x^2-2xy\frac{dy}{dx}+c=0.$$

اب dy/dx کی جگہ $-dx/dy$ رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ عمودی مستدیر کی تفرقی مساوات

$$y^2-x^2+2xy\frac{dx}{dy}+c=0,$$

یعنی $\quad 2xy\dfrac{dx}{dy}-x^2=-c-y^2 \quad$ ہے۔

اب $x^2=t$ رکھنے پر ہمیں ایک خطی مساوات ملتی ہے جس میں t تابع متغیر ہے۔ یہ بہ آسانی دیکھا جاسکتا ہے کہ حل

$$x^2+y^2+2fy-c=0$$

ہے جو کہ ہم محاور دائروں کا قبیلہ ہے جو کہ دیے ہوئے نظام پر عمود ہیں (یہاں f پیرامیٹر ہے)۔

3- کارڈائڈوں کے قبیلے

$$r = a\,(1+\cos\theta)$$

کا عمودی مستدیر نکالیے، جبکہ a پیرامیٹر ہے۔

مساوات

$$r = a\,(1+\cos\theta), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

کا θ کی نسبت سے تفرق کرنے پر ملتا ہے۔

$$\frac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

اب (1) اور (2) سے a اسقاط کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\frac{r}{dr/d\theta} = -\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

جو کہ دیے ہوئے قبیلے کی تفرقی مساوات ہے۔ اس میں $dr/d\theta$ کی جگہ $-r^2 d\theta/dr$ رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$\frac{r}{-r^2 d\theta/dr} = -\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \quad \ldots\ldots (3)$$

اور یہ عمودی مستدیر کی تفرقی مساوات ہے

اب (3) کو حل کرنے کے لیے ہم اُسے یوں لکھتے ہیں

$$\frac{dr}{r} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta = (\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta)\,d\theta$$

$$\Rightarrow \quad \log r = \log\tan\frac{\theta}{2} + \log\sin\theta + \log c$$

$$= \log\left(c\sin\theta\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad r = c\sin\theta\tan\theta/2 = 2c\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}$$

$$= 2c \sin^2 \frac{\theta}{2} = c(1-\cos\theta)$$

یا ہم

$$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\frac{\theta}{2}$$

لکھ کر بھی تکمل مکمل کر سکتے ہیں۔

مشقیں

1. نصف کعبی مکافیوں (semicubical parabolas) کے قبیلے $ay^2 = x^3$ کے عمودی مستدیر نکالیے جبکہ a پیرامیٹر ہے۔

2. مکافیوں کے قبیلے $y = ax^2$ کے عمودی مستدیر نکالیے۔

3. اگر λ پیرامیٹر ہو تو قبیلہ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2+\lambda} = 1$$

کے عمودی مستدیر نکالیے۔

4. ہم ماسکہ (confocal) اور ہم محاور (co-axial) مکافیوں

$$r = 2a/(1+\cos\theta)$$

کے عمودی مستدیر کی مساوات حاصل کیجیے۔

5. برابر سائز کے دائروں کے لیے جن کے مرکز ہم خط ہوں، عمودی مستدیر نکالیے۔ اُن میں سے کسی عمودی مستدیر کی ترسیم کیجیے۔

6. ذیل کے عمودی مستدیر نکالیے۔

(i) $r\theta = a$ (ii) $r = a\theta$

(iii) $r^n = a^n \cos n\theta$ (iv) $r^n \cos n\theta = a^n$

(v) $r = a(1-\cos\theta)$ (vi) $r = c\sin^2\theta$

7۔ منحنیوں کے ذیل قبیلوں کے عمودی مستدیر نکالیے

(*i*) $x^{2/3}+y^{2/3} = \lambda^{2/3}$. (*ii*) $r \sin 2\theta = \lambda$.

(*iii*) $r = \tan(\theta+\alpha)$. (*iv*) $x^2+y^2 = r^2$

جوابات

1. $3y^2+2x^2 = c^2$.
2. $x^2+2y^2 = c^2$.
3. $x^2+y^2+c = 2a^2 \log x$.
4. $r = 2b/(1-\cos\theta)$
5. $x = r(\tanh t - t)+c,\ y = r \operatorname{sech} t$

جبکہ دیا ہوا دائروں کا قبیلہ

$x^2+y^2-2gx+g^2 = r^2$ ہو۔

6. (*i*) $r^2 = ce^{\theta^2}$. (*ii*) $r = ce^{-\theta^2/2}$

(*iii*) $r^n = c^n \sin n\theta$. (*iv*) $r^n \sin n\theta = c^n$.

(*v*) $r = c(1+\cos\theta)$. (*vi*) $r^2 = c\cos\theta$

7. (*i*) $y^{4/3}-x^{4/3} = c^{4/3}$. (*ii*) $r^4 \cos 2\theta = c^4$.

(*iii*) $\theta+r = c+r^{-1}$. (*iv*) $y = mx$.

14

خطی مساواتیں

(Linear Equations)

14.1 - خطی تفرقی مساواتیں (Linear Differential Equations) وہ مساواتیں ہیں جن میں تابع متغیر اور اس کے تفرقی سر صرف پہلی ڈگری میں ہوں اور باہم ضرب نہ ہوئے ہوں۔ اِس طرح n ویں رتبے کی عام خطی تفرقی مساوات

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots + P_n y = X$$

ہوتی ہے، جہاں $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$ اور X صرف x کے فنکشن ہیں۔

عام مساوات پر بحث اِس کتاب کے معیار سے باہر ہے اور اس کتاب میں صرف مستقل ضربیوں (constant coefficients) والے خطی تفرقی مساوات اور ہم جنس مساوات (homogeneous equations) پر ہی غور کیا جائے گا۔ پہلے رتبہ کی خطی مساوات پر § 10.4 میں غور ہو ہی چکا ہے۔

14.2 - مستقل ضربیوں (constant coefficients) والی خطی تفرقی مساواتیں

تفرقی مساوات

$$(A) \ldots\ldots \quad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots + a_n y = X$$

حل کرنا، جہاں کہ $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ مستقل ہیں، اور X , x کا تفاعل ہے۔

پہلے تفرقی مساوات

$$(B) \cdots\cdots \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots + a_n y = 0$$

پر غور کیجیے جو کہ (A) کی بائیں جانب کو صفر کے برابر رکھنے پر ملتی ہے۔

اب ہم دیکھیں گے کہ اگر y_1 اور y_2 ، (B) کے دو حل ہوں تو $c_1y_1 + c_2y_2$ بھی (B). کا حل ہوگا، جہاں c_1 اور c_2 اختیاری مستقل ہیں۔

چونکہ y_1 y_2 دونوں (B) کے حل ہیں، اِس لیے ہم پاتے ہیں

$$(i) \cdots\cdots \frac{d^n y_1}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots + a_n y_1 = 0$$

$$(ii) \cdots\cdots \frac{d^n y_2}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y_2}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots + a_n y_2 = 0$$

اگر c_1 اور c_2 دو اختیاری مستقل ہوں، تو ہم پاتے ہیں

$$\frac{d^n (c_1y_1 + c_2y_2)}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} (c_1y_1 + c_2y_2)}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}(c_1y_1 + c_2y_2)}{dx^{n-2}} + \cdots$$

$$= c_1 \left(\frac{d^n y_1}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots \right)$$

$$+ c_2 \left[\frac{d^n y_2}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y_2}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots \right]$$

$$= c_1.0 + c_2.0 = 0$$ ((i) اور (ii) سے)

اِس طرح اوپر کہی گئی بات ثابت ہوجاتی ہے۔

چونکہ n ویں رتبہ کی تفرقی مساوات کے عام حل میں n اختیاری مستقل ہوتے ہیں، اِس لیے اوپر ثابت کیے گئے نتیجے سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر $y_1, y_2, \ldots, y_n$ مساوات (B) کے n غیر تابع (independent) حل ہوں، تو

(دیکھیے) $c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots\ldots + c_ny_n = u$

مساوات (B) کا عام حل ہوتا ہے، جہاںکہ $c_1, \ldots, c_n$ اختیاری مستقل ہیں۔
اب مان لیجیے v مساوات (A) کا کوئی خاص حل ہے، جس سے کہ ہم پاتے ہیں

$$\frac{d^nv}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + a_n v = X$$

ہم دیکھیں گے کہ

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots\ldots + c_ny_n + v = u + v$$

مساوات (A) کا عام حل ہے، جس میں کہ n اختیاری مستقل ہیں۔
اب ہم پاتے ہیں

$$\frac{d^n(u+v)}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}(u+v)}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + a_n(u+v)$$

$$= \frac{d^nu}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + a_nu$$

$$+ \frac{d^nv}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + a_nv$$

$$= 0 + X$$ (کیونکہ u , (B) کا حل ہے)

$$= X$$

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ $u+v$ ، مساوات (A) کا عام حل ہے۔
اس لیے ہمیں معلوم ہوا کہ تفرقی مساوات (A) کا حل معلوم کرنے کے لیے، جہاں $a_1, a_2 \ldots\ldots$ وغیرہ مستقل ہیں اور X ، x کا کوئی تفاعل ہے۔ ہمیں پہلے اُس سے متعلق مساوات (B) کے n غیر تابع حل $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ نکالنے ہوتے ہیں اور (A) کا کوئی ایک حل v چاہیے ہوتا ہے جس میں کوئی اختیاری مستقل نہ ہو، پھر

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots\ldots c_ny_n + v$$

مساوات (A) کا عام حل ہوتا ہے۔

حل کے حصہ $c_1y_1+\cdots\cdots+c_ny_n$ تمامی تفاعل (Complementary Function) اور v کو مخصوص تکملہ (Particular Integral) کہتے ہیں۔

اس طرح یہ معلوم ہوتا ہے کہ تفرقی مساوات (A) کو حل کرنے کے لیے ہمیں پہلے تفرقی مساوات (B) کا حل نکالنا سیکھنا ہوگا۔ یہ 14.5 § میں کیا گیا ہے۔ اس کی تیاری کے لیے ہم اگلے سیکشن میں عاملوں (operators) کے بارے میں بتائیں گے۔

مساوات (A) کا تکملہ خاص حاصل کرنے کا طریقہ 14.7 § میں دیا ہوا ہے۔

نوٹ : یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ جو نتائج اوپر نکالے گئے ہیں وہ عام خطی تفرقی مساوات کے لیے بھی صحیح ہیں، یعنی جبکہ ضربیے x کے فنکشن ہوں۔

14.3 - عامل (Operators)

تفرقی سر dy/dx کے حصے d/dx کو ایسا عامل (operator) تصور کرسکتے ہیں جس کے y پر عمل کے نتیجہ کے طور پر تفرقی ضربیہ dy/dx حاصل ہو۔

اس نقطۂ نظر سے، d/dx کو عامل کہتے ہیں اور تفاعل y کو متعمل (operand) کہتے ہیں۔ اسی طرح ہم d^2/dx^2 ، d^3/dx^3 ، . . . . کو بھی عامل تصور کرسکتے ہیں۔ آسانی کے لیے، عاملوں d/dx ، d^2/dx^2 ، . . . . . کو D ، D^2 . . . . سے ظاہر کرتے ہیں۔ D کی قوت (power) یہ بتاتی ہے کہ تفرق کتنی بار ہوا ہے۔ ان خیالات کی توسیع کرتے ہوئے ہم لکھتے ہیں۔

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots\cdots+a_n y$$

$$\equiv (D^n+a_1D^{n-1}+\cdots\cdots+a_n)\,y$$

$$\equiv f(D)\,y$$

$$D^n+a_1D^{n-1}+a_2D^{n-2}+\cdots\cdots+a_n \equiv f(D)$$

اب عامل ہے۔

14·31 - عاملوں کا حاصل ضرب (Product of operators)

اگر $f(D)$ اور $\varphi(D)$ دو عامل ہوں، تو $f(D)\varphi(D)$ بھی ایک عامل ہوتا ہے جو یہ ظاہر کرتا ہے کہ عامل $f(D)$ کو اس فنکشن پر عمل کرنا ہے جو کہ دیے ہوئے فنکشن پر $\varphi(D)$ کے عمل کرنے پر حاصل ہوا ہو۔ مثال کے طور پر ہم

$$(2D-3)(D^2-4D+5)\sin x$$

حاصل کر رہے ہیں۔ اب

$$(D^2-4D+5)\sin x = \frac{d^2\sin x}{dx^2} - 4\frac{d\sin x}{dx} + 5\sin x$$

$$= 4\sin x - 4\cos x$$

پھر

$$(2D-3)(4\sin x - 4\cos x)$$

$$= 2\frac{d}{dx}(4\sin x - 4\cos x) - 3(4\sin x - 4\cos x)$$

$$= 20\cos x - 4\sin x.$$

14·32 - یہ ثابت کرنا کہ

$$(D-\alpha)(D-\beta)y \equiv (D-\beta)(D-\alpha)y$$

جہاں کہ α اور β کوئی بھی مستقل ہیں۔

ہم پاتے ہیں

$$(D-\beta)y = \frac{dy}{dx} - \beta y.$$

$$\Rightarrow \quad (D-\alpha)(D-\beta)y = (D-\alpha)\left(\frac{dy}{dx} - \beta y\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx} - \beta y\right) - \alpha\left(\frac{dy}{dx} - \beta y\right)$$

$$= \frac{d^2y}{dx^2} - \beta\frac{dy}{dx} - \left(\alpha\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y\right)$$

$$= \frac{d^2y}{dx^2} - (\beta+\alpha)\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y$$
$$= [D^2 - (\alpha+\beta)\, D + \alpha\beta]\, y.$$

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$(D-\beta)\,(D-\alpha)\, y = [D^2 - (\alpha+\beta)\, D + \alpha\beta]\, y.$$
$$\therefore \quad (D-\alpha)\,(D-\beta)\, y = (D-\beta)\,(D-\alpha)\, y,$$

لہٰذا عامل جزوں کی ترتیب کوئی اہمیت نہیں رکھتی

نتیجہ صریح: ہم دیکھ چکے ہیں کہ

$$(D-\alpha)\,(D-\beta)\, y = [D^2 - (\alpha+\beta)\, D + \alpha\beta]\, y$$

لہٰذا، عامل

$D^2 - (\alpha+\beta)\, D + \alpha\beta$ اور $(D-\alpha)\,(D-\beta)$ ایک ہی ہیں۔

اگر D الجبرائی مقدار ہوتی، یعنی اگر یہ کوئی نمبر ہوتا تو ضرب کے اصولوں سے ہم جانتے ہیں کہ

$$(D-\alpha)\,(D-\beta) = D^2 - (\beta+\alpha)\, D + \alpha\beta.$$

عام طور پر، مان لیجیے کہ

$$f(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} D + a_n.$$

اب D کو ایک نمبر لیتے ہوئے، ہم $f(D)$ کے اجزا نکال سکتے ہیں: اس طرح ہیں

$$(1) \quad \cdots\cdots \quad f(D) \equiv (D-m_1)\,(D-m_2)\ldots\ldots(D-m_n)$$

مل سکتا ہے۔

اب اوپر کے نتیجے سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ D کو عاملی حیثیت دینے پر بھی (1) صحیح ہے اور یہ بھی ثابت ہوتا ہے کہ عمل کرتے وقت (1) کے داہنی جانب کے اجزا کی ترتیب کو ہم جس طرح چاہیں بدل سکتے ہیں۔

14.5 - تفرقی مساوات

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

کو حل کرنا

اس مساوات کو علامتی شکل (symbolic form) میں لکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$f(D)y = (D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \dots + a_{n-1} D + a_n)y = 0$$

مان لیجیے α_1 ذیل مساوات کا ایک ہی بار آنے والا ریشہ (root) ہے :-

$$(1) \cdots\cdots \quad f(D) \equiv D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \dots + a_{n-1} D + a_n = 0$$

اب D کو کوئی نمبر تصور کرنے پر ہم لکھتے ہیں

$$f(D) = \varphi(D)(D - \alpha_1)$$

جہاں کہ $\varphi(D)$ و D کا کثیر رکنی (polynomial) ہے ۔

ہم پاتے ہیں

$$(2) \cdots\cdots\cdots \quad 0 \equiv f(D)y \equiv \varphi(D)(D - \alpha_1)y$$

اب مساوات

$$(3) \cdots\cdots\cdots \quad (D - \alpha_1)y = 0$$

کا حل دی ہوئی مساوات (2) حل بھی ہوگا ۔ اب (3) سے ملتا ہے ۔

$$\frac{dy}{dx} - \alpha_1 y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} - \alpha_1 dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad \log y = \alpha_1 x$$

$$\Rightarrow \quad y = e^{\alpha_1 x}$$

جہاں کہ اختیاری مستقل نظر انداز کیا گیا ہے ۔

لہذا $e^{\alpha_1 x}$ دی ہوئی تفرقی مساوات (2) کا ایک حل ہے ۔

اب اگر $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ مساوات (1). کے مختلف ریشے ہوں تو جیسا کہ اوپر ثابت کیا جا چکا ہے،

$$e^{\alpha_1 x}, \ldots\ldots, e^{\alpha_n x}$$

دی ہوئی تفرقی مساوات کے n مختلف غیر تابع (independent) حل ہوں گے۔
لہٰذا جیسا §14.2 میں دکھایا جا چکا ہے۔

$$c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots\ldots + c_n e^{\alpha_n x}$$

دی ہوئی تفرقی مساوات کا عام حل ہوگا، جہاں کہ $c_1, \ldots\ldots, c_n$ اختیاری مستقل ہیں۔

وہ صورت جبکہ کئی بار آنے والے ریشے (repeated Roots.) ہوں

اگر کچھ ریشے برابر ہوں تب اوپر بتائے طریقے سے چلنے پر n سے کم غیر تابع حل ملیں گے اور اس سے پہلے حاصل ہونے والا حل عام حل نہیں ہوگا۔ ایسی صورت میں ہم ذیل طریقہ اختیار کرتے ہیں :-

پہلے، یہ ماننے پر کہ α کوئی دو بار آنے والا ریشہ ہے، ہم لکھ سکتے ہیں

$$f(D) = \psi(D)\,(D-\alpha)^2$$

$$\Rightarrow \quad 0 = f(D)y = \psi(D)\,(D-\alpha)^2 y$$

اب مساوات

$$(i) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (D-\alpha)^2 y = 0$$

کا حل صاف طور پر مساوات

$$f(D)y = 0$$

کا حل بھی ہوگا۔

ہم پاتے ہیں

$$(D-\alpha)(D-\alpha)y = 0$$

مان لیجیے

$$(D-\alpha)y = z \quad \cdots\cdots\cdots \quad (ii)$$

تاکہ

$$(D-\alpha)z = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} - \alpha z = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{z} - \alpha dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad z = c_1 e^{\alpha x}$$

جس عام حل میں کہ c_1 اختیاری مستقل ہے۔ اب z کی اس قیمت کو (i) میں رکھنے پر ہم پاتے ہیں،

$$(D-\alpha)y = c_1 e^{\alpha x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} - \alpha y = c_1 e^{\alpha x}$$

اس خطی مساوات کو تکملی جزو $e^{-\alpha x}$ سے ضرب کرکے تکمل کرنے پر، ہم پاتے ہیں

$$ye^{-\alpha x} = c_1 \int e^{-\alpha x} e^{\alpha x} dx + c_2$$

$$= c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow \quad y = (c_1 x + c_2)e^{\alpha x}$$

جو کہ اس صورت میں (i) کا عام حل ہے، جہاں کہ c_1 اور c_2 دو اختیاری مستقل ہیں۔
لہذا دو بار آنے والے ایک ریشے کے ہونے پر، ہمیں ایسا حل ملتا ہے جس میں دو اختیاری مستقل ہوتے ہیں۔

عام طور پر، اسی طرح سے ہم دکھا سکتے ہیں کہ اگر ایک ریشہ α ایسا ہو جو r بار آتا ہو تو حل

$$(c_1x^{r-1}+c_2x^{r-2}+\ldots\ldots+c_{r-1}x+c_r)\,e^{\alpha x}$$

ہوگا جس میں r اختیاری مستقل ہیں۔

نوٹ: اگر مساوات

$$f(D)=0$$

کے ضر سیے حقیقی (real) ہوں تو اس کے ریشے (roots) یا تو حقیقی ہوں گے یا جوڑے دار (pairs) زوجی خیالی (conjugate imaginary) ہوں گے۔

$$f(D)\,y=0.$$

کا حل اس طرح لکھا جاتا ہے کہ اس میں خیالی مقداریں نہ ہوں۔ ایسا کرنے کے لیے آیلر کے مسئلے (Euler's Theorem) کا استعمال کرتے ہیں جس کے مطابق

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

مان لیجیے $\alpha+i\beta$ اور $\alpha-i\beta$ مساوات $f(D)=0$ کی جو زوجی خیالی ریشے ہیں تب ان سے متعلق حل کا حصہ یہ ہوگا :-

$$c_1e^{(\alpha+i\beta)x}+c_2e^{(\alpha-i\beta)x}$$

$$=e^{\alpha x}\,[c_1e^{i\beta x}+c_2e^{-i\beta x}]$$

$$=e^{\alpha x}\,[c_1(\cos\beta x+i\sin\beta x)+c_2(\cos\beta x-i\sin\beta x)]$$

$$=e^{\alpha x}\,[(c_1+c_2)\cos\beta x+i(c_1-c_2)\sin\beta x]$$

$$=e^{\alpha x}\,(p_1\cos\beta x+p_1\sin\beta x),$$

جہاں کہ ہم نے $c_1+c_2=p_1$ اور $i(c_1-c_2)=p_2$ لکھا ہے۔

اسی طرح یہ بھی دکھایا جا سکتا ہے کہ اگر $\alpha+i\beta$ اور $\alpha-i\beta$ زوجی خیالی ریشے ہوں جو r بار آئے ہوں تو ان سے متعلق حل کا حصہ

$$e^{\alpha x}[(p_1+p_2x+\ldots+p_{r-1}x^{r-1})\cos\beta x+(q_1+q_2x+\ldots+q_{r-1}x^{r-1})\sin\beta x].$$ ہوگا

مثالیں

1- حل کیجیے

(i) $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=0$, (ii) $4\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+y=0$

(iii) $2\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+4y=0$.

(i) ہم پاتے ہیں

$$(D^2-5D+6)\,y=0$$

چونکہ $D^2-5D+6=0$ کے ریشے 2 اور 3 حقیقی ہیں، اس لیے عام حل

$y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ ہے۔

(ii) ہم پاتے ہیں

$$(4D^2+4D+1)\,y=0$$

چونکہ $4D^2+4D+1=0$ کے دونوں ریشے $-\frac{1}{2}$ کے برابر ہیں، اس لیے عام حل

$y=(c_1x+c_2)\,e^{-x/2}$ ہے

(iii) ہم پاتے ہیں

$$(2D^2+3D+4)\,y=0$$

چونکہ $2D^2+3D+4=0$ کے ریشے $\frac{1}{4}[-3\pm i\sqrt{23}]$ ہیں، یعنی

$$-\frac{3}{4}\pm i\,\frac{\sqrt{23}}{4}$$

اس لیے عام حل

$$e^{-3x/4}\left[c_1\cos\frac{\sqrt{23}}{4}x+c_2\sin\frac{\sqrt{23}}{4}x\right]$$

ہے، جہاں c_1 ، c_2 اختیاری مستقل ہیں۔

2۔ تفرقی مساوات

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} + 5\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

حل کیجیے

ہم پاتے ہیں

$$(D^4 - 2D^3 + 5D^2 - 8D + 4)\, y = 0.$$

اب

$$D^4 - 2D^3 + 5D^2 - 8D + 4 = (D-1)^2 (D^2+4)$$

اس لیے مساوات $D^4 - 2D^3 + 5D^2 - 8D + 4 = 0$ کے ریشے

$$1, 1, 2i, -2i;$$

ہیں۔ اس میں ریشہ 1 دو بار آیا ہے۔ لہٰذا حل

$y = (c_1 + c_2 x)\, e^x + (c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x)$ ہے۔

3۔ حل کیجیے

$$(D^3+1)\, y = 0$$

ہم پاتے ہیں

$$D^3 + 1 = (D+1)(D^2 - D + 1)$$

لہٰذا مساوات $D^3+1 = 0$ کے ریشے وہ ہیں جو $D+1=0$ اور $D^2-D+1=0$ کے ریشے ہیں۔ اس طرح، ریشے

$-1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$ ہیں۔

$$\therefore\ y = c_1 e^{-x} + e^{x/2}\left(c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

مشقیں

ذیل تفرقی مساواتیں حل کیجیے :—

1۔ $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0$ 2۔ $(D^3+D+1)y=0$

3۔ $(9D^2+12D+4)y=0$ 4۔ $(D^2+7D+10)y=0$

5۔ $\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=0$ 6۔ $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+13y=0$

7۔ $(8D^2-6D-5)y=0$ 8۔ $16\frac{d^2y}{dx^2}+24\frac{dy}{dx}+9y=0$

9۔ $\frac{d^4y}{dx^4}-y=0$ 10۔ $(D^3+3D^2+3D+1)y=0$

11۔ y کی وہ قیمت معلوم کیجیے جو مساوات

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}-12y=0$$

کو مطمئن کرے جبکہ یہ دیا ہوا ہے کہ $x=0$ پر $y=0$ اور $dy/dx=1$ ہے۔

12۔ مساوات

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+5y=0$$

حل کیجیے جبکہ یہ دیا ہوا ہے کہ $x=0$ پر $y=1$ اور $dy/dx=2$ ہے۔

13۔ مساوات

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mu x=0,\ \mu>0$$

حل کیجیے جبکہ یہ دیا ہوا ہے کہ $t=\pi/\sqrt{\mu}$ پر $x=a$ اور $dx/dt=0$ ہے۔

جوابات

1. $y = ae^{x} + be^{2x}$
2. $y = e^{-\frac{x}{2}}\left(a \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + b \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$
3. $y = (a+bx)e^{-2x/3}$.
4. $y = ae^{-5x} + be^{-2x}$
5. $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax$.
6. $y = (a \cos 3x + b \sin 3x)e^{-2x}$.
7. $y = ae^{-\frac{x}{2}} + be^{3x/4}$
8. $y = (a+bx)\, e^{-3x/4}$.
9. $y = ae^{x} + be^{-x} + c \cos x + d \sin x$.
10. $y = (a+bx+cx^2)e^{-x}$.
11. $y = -\frac{1}{8}{}^{-6x} + \frac{1}{8}e^{2x}$.
12. $y = e^{2x} \cos x$.
13. $x = -a \cos \sqrt{\mu}t$.

14.6 ـ معکوس عامل (Inverse operators)

عامل $\frac{1}{D-\alpha}$ جہاں α کوئی مستقل ہے۔

تعریف: اگر X ، x کا کوئی تفاعل ہو تو

$$\frac{1}{D-\alpha}X$$

وہ تفاعل ظاہر کرتا ہے جس پر $(D-\alpha)$ کے عمل سے تفاعل X حاصل ہو۔

اس طرح $\frac{1}{D}X$ ، X کے تکملہ کو ظاہر کرتا ہے۔

$\frac{1}{D-\alpha}X$ حاصل کرنا

ہم لکھتے ہیں

$$y=\frac{1}{D-\alpha}X$$

تعریف سے ہی، y ایسا تفاعل ہے کہ $(D-\alpha)$ کے اس پر عمل کرنے پر نتیجہ X ہو

یعنی

$$(D-\alpha)\,y = X$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - \alpha y = X$$

جو کہ ایک خطی تفرقی مساوات ہے۔

دونوں طرف تکملی جزو $e^{-\alpha x}$ سے ضرب کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ حل یہ ہے :-

$$ye^{-\alpha x} = \int Xe^{-\alpha x}dx + c$$

جس سے کہ

$$y = e^{\alpha x}\{\int Xe^{-\alpha x}dx + c\}.$$

$$\therefore\ y = \frac{1}{D-\alpha}X = e^{\alpha x}\left\{\int Xe^{-\alpha x}dx + c\right\}$$

اگر $\frac{1}{D-\alpha}X$ کی کوئی ایک قیمت درکار ہوتی ہے تو ہم مستقل c نظر انداز کرتے ہیں اور لکھتے ہیں

$$\frac{1}{D-\alpha}X = e^{\alpha x}\int Xe^{-\alpha x}dx$$

علامت $\frac{1}{(D-\beta)(D-\alpha)}X$ کا مطلب یہ ہے کہ $\frac{1}{D-\beta}$ کو $\frac{1}{D-\alpha}X$ پر عمل کرنا ہے۔

مان لیجیے کہ

$$y = \frac{1}{(D-\beta)(D-\alpha)}X$$

تب تعریف سے ہی

$$(D-\beta)y = \frac{1}{D-\alpha}X$$

پھر تعریف سے ہی

$$(D-\alpha)(D-\beta)y = X$$

لہٰذا علامت $\frac{1}{(D-\beta)}\frac{1}{(D-\alpha)}X$ ، y کی وہ قیمت ظاہر کرتی ہے جو کہ تفرقی مساوات $(D-\alpha)(D-\beta)y = X$ کو مطمئن کرے۔

مثالیں

ذیل کی صرف مخصوص قیمتیں حاصل کیجیے :۔

(i) $\frac{1}{D}x^3.$ (ii) $\frac{1}{D^2}x^4.$ (iii) $\frac{1}{D-2}\sin x.$

(iv) $\frac{1}{(D-2)(D-3)}e^{2x}.$

(i) $\frac{1}{D}x^3 = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}.$

(ii) $\frac{1}{D^2}x^4 = \frac{1}{D}\cdot\frac{1}{D}x^4 = \int\left[\int x^4 dx\right]dx = \int\frac{x^5}{5}dx = \frac{x^6}{30}$

(iii) $\frac{1}{D-2}\sin x = e^{2x}\int e^{-2x}\sin x\, dx$

$$= e^{2x}\frac{e^{-2x}}{\sqrt{5}}\sin\left(x+\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\left(x+\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$$

(iv) $\frac{1}{D-3}e^{2x} = e^{3x}\int e^{-3x}.e^{2x}dx = -e^{2x}.$

$$\frac{1}{D-2}\cdot\left(\frac{1}{D-3}e^{2x}\right) = \frac{1}{D-2}(-e^{2x})$$

$$= e^{2x}\int e^{-2x}(-e^{2x})\,dx = e^{2x}\int -1\,.\,dx = -x\,e^{2x}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{(D-2)(D-3)}e^{2x} = -xe^{2x}.$$

مشقیں

ذیل کی صرف مخصوص قیمتیں حاصل کیجیے :۔

(i) $\frac{1}{D^3}\, e^{-x}$; (ii) $\frac{1}{(D+1)(D-1)} \cos x$,

(iii) $\frac{1}{D+2}\,(x+e^{x})$, (iv) $\frac{1}{(D+1)(D-1)}\, e^{x}$,

(v) $\frac{1}{D+2}\, x^{2}$, (vi) $\frac{1}{(D+3)(D-3)}\,(\sin 2x+2e^{3x})$.

جوابات

(i) e^{-x}. (ii) $-\frac{1}{2}\cos x$. (iii) $-\frac{x}{4}-1/16-\frac{1}{3}e^{x}$.

(iv) $\frac{1}{2}x^{2}e^{x}$. (v) $\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$. (vi) $-\frac{1}{13}\sin 2x+\frac{1}{3}xe^{3x}$.

14.7- مساوات $f(D)\,y = X$ .... (1)

کا مخصوص تکملہ (particular integral) حاصل کرنا

تعریف کے مطابق

$$\frac{1}{f(D)}\,X \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ایسا تفاعل ہے جس پر $f(D)$ کے اعمال سے تفاعل X ملے، لہٰذا علامت (2) سے تفرقی مساوات (1) کا حل ظاہر ہوتا ہے۔

مان لیجیے

$$f(D) \equiv (D-m_1)(D-m_2)\ldots(D-m_n).$$

اس لیے مخصوص تکملہ

$$= \frac{1}{f(D)}X = \frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\ldots(D-m_n)}X$$

$$= \frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\ldots(D-m_{n-1})}\, e^{m_n x}\int X e^{-m_n x}\,dx.$$

ہم لکھتے ہیں

$$X' = e^{m_n x}\int X e^{-m_n x}\,dx$$

اس لیے مخصوص تکملہ

$$= \frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\ldots(D-m_{n-1})}X'$$

$$= \frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\ldots(D-m_{n-1})}\, e^{m_{n-1}x}\int X' e^{-m_{n-1}\cdot x}\,dx$$

اسی طرح سے بڑھنے پر کچھ ہی مرتبہ بعد، ہمیں درکار مخصوص تکملہ مل جائے گا۔

دوسرا طریقہ : جزوی کسروں (partial fractions) میں توڑنے پر ہم پاتے ہیں۔

$$\frac{1}{f(D)} = \frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\ldots(D-m_n)}$$

$$= \frac{A_1}{D-m_1} + \frac{A_2}{D-m_2} + \ldots + \frac{A_n}{D-m_n}$$

اس لیے مخصوص تکملہ

$$= A_1 e^{m_1 x}\int X e^{-m_1 x}\,dx + A_2 e^{m_2 x}\int X e^{-m_2 x}\,ax + \ldots$$

$$+ \ldots + A_n e^{-m_n x}\int X e^{-m_n x}\,dx.$$

نوٹ 1 : یہ نہایت ہی عام طریقہ ہے جو کسی بھی صورت میں مخصوص تکملہ نکالنے کے لیے استعمال ہو سکتا ہے۔ اگلے سیکشنوں میں تفاعل X کی شکل (form) پر منحصر چھوٹے طریقے

بھی بتائے جائیں گے۔

نوٹ 2 : چونکہ ہمیں صرف ایک مخصوص تکملہ درکار ہوتا ہے اِس لیے تکمل کرتے وقت اختیاری مستقل لکھنے کی ضرورت نہیں ہے۔

مثالیں

1۔ مساوات

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=e^{2x}$$

حل کیجیے

اِسے یوں لکھ سکتے ہیں

$$(D^2-3D+2)\,y=e^{2x}$$

چونکہ $D^2-3D+2=0$ کے ریشے 1 اور 2 ہیں اِس لیے تمامی فنکشن

$$c_1e^x+c_2e^{2x}$$

ہے۔

مخصوص تکملہ نکالنے کے لیے ہمیں

$$\frac{1}{(D-2)(D-1)}\,e^{2x}.$$

حاصل کرنا ہے۔ اب

$$\frac{1}{(D-1)}\,e^{2x}=e^x\int e^{-x}\,.\,e^{2x}\,dx=e^{2x}$$

پھر

$$\frac{1}{D-2}\,\frac{1}{D-1}\,e^{2x}=\frac{1}{D-2}\,e^{2x}$$

$$=e^{2x}\int e^{-2x}\,.\,e^{2x}\,dx=xe^{2x}$$

اِس لیے

$$y = c_1e^{x}+c_2e^{2x}+xe^{2x},$$

عام حل ہے۔

2. تفرقی مساوات

$$\frac{d^2y}{dx^2}+9y = \sec 3x$$

حل کیجیے۔

ہم پاتے ہیں

$$(D^2+9)\,y = \sec 3x$$

چونکہ $D^2+9 = 0$ کے ریشے $\pm 3i$ ہیں، اس لیے تمامی تفاعل

$$= a_1 \cos 3x+a_2 \sin 3x$$

پھر مخصوص تکملہ

$$= \frac{1}{D^2+9}\sec 3x$$

$$= \frac{1}{(D+3i)(D-3i)}\sec 3x,$$

$$= \frac{1}{6i}\left(\frac{1}{D-3i}-\frac{1}{D+3i}\right)\sec 3x$$

$$= \frac{1}{6i}\left[\frac{1}{D-3i}\sec 3x-\frac{1}{D+3i}\sec 3x\right]$$

$$= \frac{1}{6i}\left[e^{3ix}\int e^{-3ix}\sec 3x\,dx-e^{-3ix}\int e^{3ix}\sec 3x\,dx\right]$$

اب

$$\int e^{-3ix}\sec 3x\,dx = \int(\cos 3x-i\sin 3x)\sec 3x\,dx$$

$$= \int(1-i\tan 3x)\,dx = x+\frac{i}{3}\log\cos 3x$$

ساتھ ہی

$$\int e^{3ix} \sec 3x\, dx = \int (\cos 3x + i \sin 3x) \sec 3x\, dx$$

$$= \int (1 + i \tan 3x)\, dx = x - \frac{i}{3} \log \cos 3x$$

اس لیے مخصوص تکملہ

$$= \frac{1}{6i}\left[e^{3ix}\left(x + \frac{i}{3} \log \cos 3x\right) - e^{-3ix}\left(x - \frac{i}{3} \log \cos 3x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{6i}\left[\left(\cos 3x + i \sin 3x\right)\left(x + \frac{i}{3} \log \cos 3x\right)\right.$$

$$\left. -\left(\cos 3x - i \sin 3x\right)\left(x - \frac{i}{3} \log \cos 3x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{6i}\left[2ix \sin 3x + \frac{2i}{3} \cos 3x \log \cos 3x \right]$$

$$= \frac{x}{3} \sin 3x + \frac{\cos 3x}{9} \log \cos 3x$$

$$\therefore\ y = a_1 \cos 3x + a_2 \sin 3x + \frac{x}{3} \sin 3x + \frac{\cos 3x}{9} \log \cos 3x$$

مشقیں

ذیل مساواتیں حل کیجیے :۔

1. $9 \dfrac{d^2y}{dx^2} - y = e^{-x}$.
2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = 2x$.
3. $(D^2 - 2D + 1)\, y = x^2 - 1$.
4. $(6D^2 - D - 2)\, y = xe^{-x}$
5. $(D^2 + 4)\, y = \tan 2x$.
6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = \sec ax$.

جوابات

1. $y = ae^{-x/3} + be^{x/3} + \frac{1}{8}e^{-x}$.
2. $y = ae^{-2x} + be^{x} - (x + \frac{1}{2})$.
3. $y = (a + bx)e^{x} + (x^2 + 4x + 5)$.
4. $y = ae^{2x/3} + be^{-x/2} + \frac{1}{5}(12/5 + x)e^{-x}$.

5. $y = a\cos 2x + b\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x \log\tan(x+\frac{\pi}{4})$.

6. $y = a_1\cos ax + a_2\sin ax + \frac{1}{a}x\sin ax + \frac{1}{a^2}\cos ax\log\cos ax$.

14·81- مخصوص تکملہ نکالنے کا عملی اصول، جبکہ تفاعل X e^{mx}. جیسا ہو

ہمیں y کی ایک مخصوص قیمت نکالنا ہے جو تفرقی مساوات

$$f(D)\,y = e^{mx}$$

کو مطمئن کرے، یعنی ہمیں علامت

$$\frac{1}{f(D)}e^{mx}$$

کی قیمت حاصل کرنا ہے، جبکہ

$$f(D) \equiv D^n + a_1D^{n-1} + a_2D^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}D + a_n.$$ ہو۔

ہم جانتے ہیں کہ

$$D^re^{mx} = m^re^{mx}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ f(D)e^{mx} &= (D^n + a_1D^{n-1} + a_2D^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}D + a_n)e^{mx} \\ &= D^ne^{mx} + a_1D^{n-1}e^{mx} + a_2D^{n-2}e^{mx} + \ldots\ldots \\ &\qquad + a_{n-1}De^{mx} + a_ne^{mx} \\ &= m^ne^{mx} + a_1m^{n-1}e^{mx} + a_2m^{n-2}e^{mx} + \ldots\ldots \\ &\qquad + a_{n-1}me^{mx} + a_ne^{mx} \\ &= (m^n + a_1m^{n-1} + a_2m^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}m + a_n)\,e^{mx} \\ &= f(m)\,e^{mx}. \end{aligned}$$

لہذا، ہم نے دیکھا کہ

$$f(D)e^{mx} = f(m)e^{mx}$$

(I) مان لیجیے

$$f(m) \neq 0$$

اب دونوں طرف $1/f(D)$ سے عمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$e^{mx} = \frac{1}{f(D)} f(m)e^{mx} = f(m)\frac{1}{f(D)} e^{mx}$$

چونکہ $f(m) \neq 0$ ہے اس لیے $f(m)$ سے تقسیم کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\frac{1}{f(m)} e^{mx} = \frac{1}{f(D)} e^{mx}$$

(ii) اب مان لیجیے $f(m) = 0$ جس سے کہ m مساوات $f(D) = 0$ کا ریشہ ہے۔ مان لیجیے m ایسا ریشہ جو r بار آتا ہے۔ تو $(D-m)^r$, $f(D)$ کا ایک جزو ہوگا۔

مان لیجیے

$$f(D) = (D-m)^r \varphi(D),$$

جہاں کہ $\varphi(m) \neq 0$.

$$\frac{1}{f(D)} e^{mx} = \frac{1}{(D-m)^r \varphi(D)} e^{mx} = \frac{1}{(D-m)^r} \cdot \frac{1}{\varphi(D)} e^{mx}$$

جیسے کہ (i) میں ثابت کیا جا چکا ہے، ہم پاتے ہیں

$$\frac{1}{\varphi(D)} e^{mx} = \frac{1}{\varphi(m)} e^{mx}$$ (کیونکہ $\varphi(m) \neq 0$.)

$$\therefore \frac{1}{f(D)} e^{mx} = \frac{1}{(D-m)^r} \frac{1}{\varphi(m)} e^{mx}$$

$$= \frac{1}{\varphi(m)} \frac{1}{(D-m)^r} e^{mx}.$$

اب

$$\frac{1}{D-m} e^{mx} = e^{mx} \int e^{-mx} . e^{mx} \, dx = xe^{mx}$$

$$\frac{1}{(D-m)^2} e^{mx} = \frac{1}{D-m} \frac{1}{D-m} e^{mx}$$

$$= \frac{1}{D-m} xe^{mx}$$

$$= e^{mx} \int e^{-mx} x \, e^{mx} \, dx = \frac{x^2}{2} e^{mx}.$$

$$\frac{1}{(D-m)^3}e^{mx}=\frac{1}{D-m}\,\frac{1}{(D-m)^2}e^{mx}$$
$$=\frac{1}{D-m}\,\frac{x^2}{2}\,e^{mx}$$
$$=e^{mx}\int e^{-mx}.\,\frac{x^2}{2}\,dx=\frac{x^3}{3\,!}\,e^{mx}.$$

اسی طرح سے چلنے پر ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{1}{(D-m)^r}e^{mx}=\frac{x^r}{r\,!}\,e^{mx}.$$
$$\therefore\ \frac{1}{f(D)}\,e^{mx}=\frac{1}{\varphi(m)}\,\frac{x^r}{r\,!}\,e^{mx},$$

جہاں کہ $f(D)=(D-m)^r\,\varphi(D)$

مثالیں

حل کیجیے

1. $4\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}-3y=e^{2x}.$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}+3y=e^{-3x}.$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+6\dfrac{dy}{dx}+9y=2e^{-3x}.$

1۔ ہم پاتے ہیں

$$(4D^2+4D-3)y=e^{2x}$$

اب $4D^2+4D-3=0$ کے ریشے $\frac{1}{2}$ اور $-\frac{3}{2}$ ہیں۔ اس لیے تمامی تفاعل

$$=c_1e^{x/2}+c_2e^{-3x/2}$$

مخصوص تکملہ

$$=\frac{1}{4D^2+4D-3}e^{2x}=\frac{1}{4(2)^2+4(2)-3}e^{2x}=\frac{e^{2x}}{21}$$

اس لیے حل $y = c_1e^{x/2}+c_2e^{3x/2}+\frac{2}{51}e^{3x}$ ہے۔

2۔ ہم پاتے ہیں

$$(D^2+4D+3)y = e^{-3x}$$

اب $D^2+4D+3=0$ کے ریشے -1 اور -3 ہیں۔

اس لیے تمامی تفاعل

$$= c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}$$

مخصوص تکملہ

$$= \frac{1}{D^2+4D+3}e^{-3x}$$

اب $D=-3$, D^2+4D+3 پر صفر ہو جاتا ہے۔ لہٰذا ہم لکھتے ہیں

مخصوص تکملہ

$$= \frac{1}{(D+3)(D+1)}e^{-3x} = \frac{1}{D+3}\cdot\frac{1}{(-3+1)}e^{-3x}$$

$$= \frac{1}{D+3}\cdot\frac{1}{-2}e^{-3x} = -\frac{x}{2}e^{-3x}.$$

اس لیے

$$y = c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}-\tfrac{1}{2}xe^{-3x}$$

عام حل ہے۔

3۔ ہم پاتے ہیں

$$(D^2+6D+9)y = 2e^{-3x}$$

اب $D^2+6D+9=0$ کے دونوں ریشے -3 ہی ہیں۔ اس لیے تمامی تفاعل

$$= (c_1x+c_2)\,e^{-3x}$$

مخصوص تکملہ

$$= \frac{1}{D^2+6D+9}\cdot 2e^{-3x} = \frac{1}{(D+3)^2}\cdot 2e^{-3x}$$

$$= 2.\frac{1}{(D+3)^2}e^{-3x} = 2.\tfrac{1}{2}x^2 e^{-3x} = x^2e^{-3x}$$

اس لیے $y = (c_1x+c_2)\,e^{-3x}+x^2\,e^{-3x}$ عام حل ہے۔

مشقیں

ذیل تفرقی مساواتیں حل کیجیے :-

1. $6\frac{d^2y}{dx^2}+17\frac{dy}{dx}+12y = e^{-x}$. 2. $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+y = e^{2x}+e^{x}$.

3. $3\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-y = e^{x/3}+2e^{3x}$. 4. $(D^2-4)y = 3e^{2x}-4e^{-2x}$

5. $\frac{d^2y}{dx^2}-(a+b)\frac{dy}{dx}+aby = e^{ax}+e^{bx}$.

6. $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y = e^{x/2}+e^{-x/2}$.

7. $9\frac{d^2y}{dx^2}+12\frac{dy}{dx}+4y = e^{-2x/3}$.

8. $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y = e^{2x}$.

9. $(3D^2-4D+5)y = e^{x}-2e^{2x}+3e^{3x}$.

10. $(D-3)^2\, y = 2e^{3x}+e^{-x}$.

11. $(D^2-2D+1)y = (1+e^{-x})^2$

12. $(D^2+5D+6)y = e^{2x}$ (جبکہ $x=0$ پر $y=0$ اور $dy/dx=0$)

13. $(D^2-7D+6)y = 2e^{3x}$ (جبکہ $x=0$ پر $y=1$ اور $dy/dx=0$)

جوابات

1. $y = ae^{-3x/2}+be^{4x/3}+e^{-x}$.

2. $y = \left(a\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+b\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{x/2}+e^{x}+\frac{e^{2x}}{4}$

3. $y = ae^{x/3}+be^{-x}+\frac{4}{9}e^{x/3}+\frac{1}{18}e^{2x}$.
4. $y = ae^{2x}+be^{-2x}+\frac{3}{4}xe^{2x}+xe^{-2x}$.

5. $y = c_1e^{ax}+c_2e^{bx}+\frac{x}{a-b}(e^{ax}-e^{bx})$.
6. $y = (a+bx)e^{-x}+e^{x/2}+4e^{-x/2}$.

7. $y = (a+bx)e^{-2x/3}+\frac{1}{18}x^2e^{-2x/3}$.
8. $y = ae^{x}+be^{2x}+ce^{-2x}+\frac{x}{4}e^{2x}$.

9. $y = e^{2x/3}\left(a\cos\frac{\sqrt{11}}{3}x+b\sin\frac{\sqrt{11}}{3}x\right)+\frac{1}{4}e^{x}-\frac{2}{9}e^{2x}-\frac{3}{20}e^{3x}$

10. $y = (a+bx)e^{3x}+\frac{1}{16}e^{-x}+x^2e^{3x}$.
11. $y = (a+bx)e^{x}+1+\frac{1}{9}e^{-2x}+\frac{1}{8}e^{-x}$.

12. $y = \frac{3}{8}e^{-3x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+\frac{1}{30}e^{2x}$.
13. $y = \frac{3}{5}e^{x}-\frac{1}{15}e^{6x}-\frac{1}{3}e^{3x}$.

14·82 مخصوص تکملہ حاصل کرنا جبکہ X کی شکل cos mx یا sin mx جیسی ہو

یہاں ہمیں y کی ایک مخصوص قیمت نکالنا ہے جو کہ تفرقی مساوات

$$f(D)\,y = \sin mx$$

کو مطمئن کرے، اِس طرح ہمیں ذیل حاصل کرنا ہے:۔

$$\frac{1}{f(D)}\sin mx.$$

پہلے ہم اُس صورت پر غور کرتے ہیں جبکہ $f(D)$ میں D کی صرف جفت قوتیں ہوں، یعنی وہ D^2 کا تفاعل ہو۔ مان لیجیے

$$f(D) = \phi(D^2) = (D^2)^n+a_1(D^2)^{n-1}+a_2(D^2)^{n-2}+\ldots a_{n-1}D^2+a_n$$

ہم پاتے ہیں

$$D\sin mx = m\cos mx$$
$$D^2\sin mx = (-m^2)\sin mx$$
$$D^4\sin mx = (-m^2)^2\sin mx$$
$$D^6\sin mx = (-m^2)^3\sin mx$$

وغیرہ۔

اِن کی مدد سے ہم بہ آسانی دیکھ سکتے ہیں کہ

$$\varphi(D^2)\sin mx = \varphi(-m^2)\sin mx$$

مان لیجیے ، $\varphi(-m^2) \neq 0$ ۔ اب دونوں طرف $1/\varphi(D^2)$ سے عمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\sin mx = \frac{1}{\varphi(D^2)}\varphi(-m^2)\sin mx$$

$$= \varphi(-m^2)\frac{1}{\varphi(D^2)}\sin mx.$$

چونکہ $\varphi(-m^2) \neq 0$ صفر نہیں ہے، اِس لیے اِس سے تقسیم کرنے پر ملتا ہے

$$\frac{1}{\varphi(-m^2)}\sin mx = \frac{1}{\varphi(D^2)}\sin mx$$

اِسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{1}{\varphi(D^2)}\cos mx = \frac{1}{\varphi(-m^2)}\cos mx, \quad [\varphi(-m^2) \neq 0 \text{ اگر}]$$

جب $4(-m^2) = 0$ ہو تو یہ طریقہ نہیں لگ سکتا اور اب جو طریقہ لگانا ہوتا ہے وہ آگے مثال 2 میں بتایا گیا ہے

اب مان لیجیے کہ $f(D)$ میں D کی طاق قوتیں بھی ہیں۔ ایسی صورت میں $f(D)$ کو طاق اور جفت حصوں میں توڑنے پر، ہم لکھ سکتے ہیں

$$f(D) = \varphi_1(D^2) + D\varphi_2(D^2)$$

ہم پاتے ہیں

$$\frac{1}{f(D)}\sin mx = \frac{1}{\varphi_1(D^2)+D\varphi_2(D^2)}\sin mx$$

$$= [\varphi_1(D^2)-D\varphi_2(D^2)]\frac{1}{[\varphi_1(D^2)+D\varphi_2(D^2)][\varphi_1(D^2)-D\varphi_2(D^2)]}\sin mx$$

$$= [\varphi_1(D^2)-D\varphi_2(D^2)]\frac{1}{[\varphi_1(D^2)]^2-D^2[\varphi_2(D^2)]^2}\sin mx$$

$$= [\varphi_1(D^2) - D\varphi_2(D^2)] \frac{1}{[\varphi_1(-m^2)]^2 - (-m^2)[\varphi_2(-m^2)]^2} \sin mx$$

ہم لکھتے ہیں

$$[\varphi_1(-m^2)] = p, \; [\varphi_2(-m^2)] = q.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{f(D)} \sin mx = \frac{1}{p^2+m^2q^2}[\varphi_1(D^2) - D\varphi_2(D^2)] \sin mx$$

$$= \frac{1}{p^2+m^2q^2}[\varphi_1(-m^2) - D\varphi_2(-m^2)] \sin mx$$

$$= \frac{1}{p^2+m^2q^2}[\varphi_1(-m^2) \sin mx - m\,\varphi_2(-m^2) \cos mx]$$

$$= \frac{p \sin mx - mq \cos mx}{p^2+m^2q^2}$$

نیچے دیے ہوئے چھوٹے طریقے کی دلیل (justification) اوپر حاصل شدہ نتیجے سے ملتی ہے۔ ہم لکھتے ہیں

$$\frac{1}{f(D)} \sin mx = \frac{1}{\varphi_1(D^2) + D\varphi_2(D^2)} \sin mx$$

$$= \frac{1}{\varphi_1(-m^2) + D\varphi_2(-m^2)} \sin mx$$

$$= \frac{1}{p+Dq} \sin mx$$

$$= (p-Dq) \frac{1}{(p+Dq)(p-Dq)} \sin mx$$

$$= (p-Dq) \frac{1}{p^2-D^2q^2} \sin mx$$

$$= (p-Dq) \frac{1}{p^2+m^2q^2} \sin mx$$

$$= \frac{1}{p^2+m^2q^2}(p-Dq) \sin mx.$$

$$= \frac{1}{p^2+m^2q^2}(p \sin mx - mq \cos mx)$$

جو کہ وہی ہے جو کہ اوپر مل چکا ہے۔

اگر X , $\cos mx$ جیسا ہو تب بھی اسی طرح مخصوص تکملہ نکال سکتے ہیں

مثالیں

1. حل کیجیے

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=\sin 3x.$$

ہم پاتے ہیں

$$(D^2-5D+6)\,y=\sin 3x$$

اب $D^2-5D+6=0$ کے ریشے 2 اور 3 ہیں اور اس لیے تمامی تفاعل

$$c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$$

ہے۔ ساتھ ہی، مخصوص تکملہ

$$=\frac{1}{D^2-5D+6}\sin 3x.$$

اب D^2 کی جگہ -3^2 یعنی -9 لکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$\text{مخصوص تکملہ}=\frac{1}{-9-5D+6}\sin 3x$$

$$=\frac{1}{-3-5D}\sin 3x$$

$$=-(3-5D)\frac{1}{(3-5D)(3+5D)}\sin 3x$$

$$=-(3-5D)\frac{1}{9-25D^2}\sin 3x$$

$$=-(3-5D)\frac{1}{9-25(-9)}\sin 3x$$

$$=-\frac{1}{234}(3-5D)\sin 3x$$

$$= -\frac{1}{234}(3\sin 3x - 15\cos 3x)$$

$$= -\frac{1}{78}(\sin 3x - 5\cos 3x)$$

$$\therefore\ y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} - \frac{1}{78}(\sin 3x - 5\cos 3x)$$

2۔ حل کیجیے $(D^2+4)y = \cos 2x$

اب $D^2+4=0$ کے ریشے $2i$ اور $-2i$ ہیں، اس لیے

تمامی تفاعل $= c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$

ساتھ ہی

مخصوص تکملہ $= \frac{1}{D^2+4}\cos 2x$

چونکہ D^2 کی جگہ پر -2^2 یعنی -4، رکھنے پر D^2+4 صفر ہو جاتا ہے اس لیے یہاں § 14·82 میں بتایا گیا طریقہ نہیں لگ سکتا۔

اب جو طریقہ اختیار کرنا ہے وہ یہ ہے:۔

حقیقی حصہ (real part) کا مخصوص تکملہ

$$\frac{1}{D^2+4}e^{2ix}$$

اب $D=2i$ رکھنے پر D^2+4 صفر ہو جاتا ہے اس لیے ہم لکھتے ہیں

$$D^2+4 = (D-2i)(D+2i)$$

$$\frac{1}{D^2+4}e^{2ix} = \frac{1}{(D-2i)(D+2i)}e^{2ix}$$

$$= \frac{1}{4i}\ \frac{1}{D-2i}e^{2ix}$$

$$= \frac{1}{4i}xe^{2ix}$$

$$= -\tfrac{1}{4}ix\,(\cos 2x + i\sin 2x)$$

$$= \tfrac{1}{4}x\sin 2x - i.\,\tfrac{1}{4}x\cos 2x$$

$$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \tfrac{1}{4}x\sin 2x$$

3۔ حل کیجیے

$$(D^3+1)\,y = \cos 2x$$

یہ بہ آسانی دیکھ سکتے ہیں کہ تمامی تفاعل

$$= c_1e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + c_3\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$$

ساتھ ہی

مخصوص تکملہ $= \dfrac{1}{D^3+1}\cos 2x$

$$= \frac{1}{D.D^2+1}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{D(-2^2)+1}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{1-4D}\cos 2x$$

$$= (1+4D)\frac{1}{(1+4D)(1-4D)}\cos 2x$$

$$= (1+4D)\quad\frac{1}{1-16D^2}\cos 2x$$

$$= (1+4D)\frac{1}{1-16(-4)}\cos 2x$$

$$= \tfrac{1}{65}(1+4D)\cos 2x = \tfrac{1}{65}(\cos 2x - 8\sin 2x)$$

$$\therefore\quad y = c_1e^{-x} + e^{x/2}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + c_3\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$$

$$+\tfrac{1}{65}(\cos 2x - 8\sin 2x).$$

مشقیں

ذیل تفرقی مساواتیں حل کیجیے:۔

1. $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=\cos 2x.$

2. $(D^2+4D-3)y=2\sin 3x.$

3. $\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=\sin ax.$

4. $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=\cos 3x+\sin 3x.$

5. $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=e^x-\cos 2x.$

6. $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+y=2\sin 3x.$

7. $2\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+4y=3\cos\frac{x}{2}$

8. $(D^2-8D+9)y=40\sin 5x.$

9. $(4D^2+16D-9)y=4e^{x/2}+3\sin\frac{1}{2}x.$

10. $\frac{d^3y}{dx^3}-4y=\cos^3 x.$

11. $(D^2+D+1)y=(1+\sin x)^2.$

12. $(D^4-2D^2+1)y=\cos x.$

13. $(D^3+D^2+D+1)y=\sin 2x.$

14. Solve $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+10y+37\sin 3x=0$

اور $x=\frac{\pi}{2}$ پر y معلوم کیجیے جبکہ یہ دیا ہوا ہو کہ $x=0$ پر $y=3$ اور $dy/dx=0$

جوابات

1. $y=ae^{2x}+be^{x}-\frac{1}{20}\cos 2x-\frac{3}{20}\sin 2x.$

2. $y=ae^{(-2+\sqrt{7})x}+be^{(-2-\sqrt{7})x}-\frac{1}{12}(\cos 3x+\sin 3x).$

3. $y=c_1\cos ax+c_2\sin ax-\frac{x\cos ax}{2a}.$

4. $y=a\cos 2x+b\sin 2x-\frac{1}{5}(\cos 3x+\sin 3x).$

5. $y=a\cos 3x+b\sin 3x+\frac{1}{10}e^{x}-\frac{1}{5}\cos 2x.$

6. $y = ae^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x} + be^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}x} + \frac{18}{145}\cos 3x - \frac{16}{145}\sin 3x.$

7. $y = \left(a\cos\frac{\sqrt{23}}{4}x + b\sin\frac{\sqrt{23}}{4}x\right)e^{3x/4} + \frac{8}{58}\left(7\cos\frac{x}{2} - 3\sin\frac{x}{2}\right)$

8. $y = ae^{(4+\sqrt{7})x} + be^{(4-\sqrt{7})x} + \frac{5}{58}(5\cos 5x - 2\sin 5x).$

9. $y = ae^{x/2} + be^{-9x/8} + \frac{2}{5}xe^{x/2} - \frac{48}{1625}\left(4\cos\frac{x}{4} + \frac{37}{4}\sin\frac{x}{4}\right)$

10. $y = ae^{2x} + be^{-2x} - \frac{1}{8}(1 + \frac{1}{2}\cos 2x).$

11. $y = \left(a\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + b\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-x/2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{26}(3\cos 2x - 2\sin 2x) - 2\cos x.$

12. $y = (a+bx)e^{x} + (c+dx)e^{-x} + \frac{1}{4}\cos x.$

13. $v = a\cos x + b\sin x + ce^{-x} + \frac{1}{10}(2\cos 2x - \sin 2x).$

14. $y = e^{-x}(a\cos 3x + b\sin 3x) + 6\cos 3x - \sin 3x.\ \ y = 1.$

14.83۔ مخصوص تکملہ حاصل کرنا جبکہ X کی شکل x^m جیسی ہو، جہاں کہ m مثبت کامل عدد ہے

یہاں ہمیں

$$\frac{1}{f(D)}x^m$$

حاصل کرنا ہے۔

عام طریقہ یہ ہے کہ D کو ایک نمبر تصور کرتے ہوئے $1/f(D)$ کو D کی صعودی (ascending) کامل عدد قوتوں (integral powers) میں کھولا جائے اور پھر ہر رکن x^m پر عمل کرے اور اِن اعمال سے حاصل نتائج کا جوڑ درکار قیمت ہوگی۔ چونکہ x^m کی $(m+1)$ واں اور اُس سے بڑے تفرقی سر صفر ہیں اس لیے یہ کافی ہے کہ $1/f(D)$ کو D کی صعودی قوتوں میں صرف m ویں قوت تک کھولا جائے۔ اِس طرح سے کھولنے کی توجیہہ (justification) نیچے دیے مباحث (discussion) سے واضح ہو جائے گی۔

§ 14.7 کی طرح $1/f(D)$ کو جزوی کسروں میں توڑنے پر ہم پاتے ہیں

$$\frac{1}{f(D)} = \frac{A_1}{D-\alpha_1}+\frac{A_2}{D-\alpha_2}+\ldots\ldots+\frac{A_n}{D-\alpha_n}$$

اب D کو ایک نمبر تصور کرتے ہوئے $1/(D-\alpha_1)$ کو یوں کھولتے ہیں

$$\frac{1}{D-\alpha_1} = -\frac{1}{\alpha_1}\left(1-\frac{D}{\alpha_1}\right)^{-1}$$
$$= -\frac{1}{\alpha_1}\left(1+\frac{D}{\alpha_1}+\frac{D^2}{\alpha_1^2}+\frac{D^3}{\alpha_1^3}+\cdots\right)$$

اب D کو عامل لینے پر بھی اِس رشتے کے صحیح ہونے کی دلیل دینی ہے، یعنی یہ ثابت کرنا ہے کہ

$$\frac{1}{D-\alpha_1}\,X = -\frac{1}{\alpha_1}\left(1+\frac{D}{\alpha_1}+\frac{D^2}{\alpha_1^2}+\frac{D^3}{\alpha_1^3}+\cdots\right)X.$$

جہاں کہ X، x کا تفاعل ہے۔ معکوس عامل (inverse operator) کی تعریف کے مطابق ایسا تبھی ہوگا جبکہ

$$(D-\alpha_1)\left[-\frac{1}{\alpha_1}\left(1+\frac{D}{\alpha_1}+\frac{D^2}{\alpha_1^2}+\cdots\right)X\right] = X.$$

اور ہم بہ آسانی دیکھ سکتے ہیں کہ یہ حقیقت (fact) ہے۔

اِس طرح ہم نے دیکھا کہ $1/f(D)$ کی جزوی کسریں، بہ دلیل، D کی صعودی کامل عدد قوتوں کے ارقام میں کھولی جا سکتی ہیں اور یہ بھی دیکھا کہ اگر خود $1/f(D)$ کو D کی صعودی کامل عدد قوتوں کے ارقام میں کھولتے تو وہی ملتا جو جزوی کسروں کے اِس طرح کھولنے پر اُن کا جوڑ ہوتا ہے۔

مثال

حل کیجیے

$$(D^3+2D^2+4D+8)y = x^2$$

ہم پاتے ہیں

$$D^3+2D^2+4D+8 = D^2(D+2)+4(D+2)$$
$$= (D+2)(D^2+4)$$

اِس لیے $D^3+2D^2+4D+8 = 0$ کے ریشے -2 ، $2i$ اور $-2i$ ہیں۔

لہٰذا تمامی تفاعل

$$= c_1e^{-2x}+c_2 \cos 2x+c_3 \sin 2x$$

پھر مخصوص تکملہ

$$= \frac{1}{D^3+2D^2+4D+8}x^2$$
$$= \frac{1}{8}\left[1+\frac{4D+2D^2+D^3}{8}\right]^{-1} x^2$$
$$= \tfrac{1}{8}[1-\tfrac{1}{2}D+0D^2+\ldots]\, x^2$$
$$= \tfrac{1}{8}[x^2-x].$$

$$\therefore \qquad y = c_1e^{-2x}+c_2 \cos 2x+c_3 \sin 2x+\tfrac{1}{8}\,(x^2-x).$$

مشقیں

حل کیجیے۔

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+y = 2x+x^2$
2. $\dfrac{d^3y}{dx^3}-\dfrac{d^2y}{dx^2}-6\dfrac{dy}{dx} = 1+x^2.$
3. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4y = x^2.$
4. $(D^4+D^3+D^2-D-2) = x^2.$

جوابات

1. $y = (a+bx)\,e^{-x}+x^2-2x+2.$
2. $y = a+be^{3x}+ce^{-2x}-\frac{1}{6}\left(\frac{25}{18}x+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{3}\right)$

3. $y = ae^{2x}+be^{-2x}-\frac{1}{4}(x^2+\frac{1}{2})$.

4. $y = ae^{-x}+be^{x}+e^{-\frac{1}{2}x}\left(c\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x+d\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)-(x^2-x+\frac{1}{2})$

14·9 ۔ اگلے دو سیکشنوں میں ہم وہ فارمولے حاصل کریں گے جو کہ مخصوص تکملہ نکالنے کے لیے اُس وقت کارآمد ہوتے ہیں جبکہ تفرقی مساوات ذیل شکلوں میں ہو ۔

$$f(D)\,y = e^{ax}\,V$$

$$f(D)\,y = xV$$

جہاں کہ V , x کا کوئی تفاعل ہے۔

14·91 ۔ یہ ثابت کرنا کہ

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax}\,V = e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}\,V$$

جہاں کہ V , x کا کوئی تفاعل ہے۔

پہلے ہم x کے کسی تفاعل V_1 پر غور کرتے ہیں جسے بعد میں V کے ارقام میں حاصل کریں گے۔

ہم پاتے ہیں

$$D(e^{ax}V_1) = e^{ax}DV_1+ae^{ax}V_1$$

$$= e^{ax}(D+a)V_1$$

عام طور سے تفرقی حساب کے لبنیز کے مسئلے (Leibnitzs theorem) سے

$$D^r(e^{ax}V_1) = e^{ax}D^rV_1+{}^rC_1\,ae^{ax}D^{r-1}V_1+{}^rC_2\,a^2e^{ax}D^{r-2}V_1 +\ldots\ldots+a^r e^{ax}V_1$$

$$= e^{ax}(D^r+{}^rC_1aD^{r-1}+{}^rC_2\,a^2D^{r-2}+\ldots\ldots+a^r)\,V_1$$

$$= e^{ax}(D+a)^r\,V_1$$

$$\therefore f(D)\, e^{ax}V_1 = (D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots\cdots + a_n)\, e^{ax}\, V_1$$

$$= e^{ax}\,[(D+a)^n + a_1 (D+a)^{n-1} + \cdots\cdots + a_n]\, V_1$$

$$= e^{ax} f(D+a)\, V_1$$

$$(1) \cdots\cdots \therefore f(D) e^{ax}\, V_1 = e^{ax} f(D+a)\, V_1.$$

اب مان لیجیے کہ V_1 ذیل سے ملتا ہے:۔

$$f(D+a)\, V_1 = V$$

تو

$$(2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; V_1 = \frac{1}{f(D+a)}\, V$$

اب (1) اور (2) سے

$$f(D)\, e^{ax} \frac{1}{f(D+a)}\, V = e^{ax}\, V$$

دونوں طرف $\frac{1}{f(D)}$ سے عمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$e^{ax} \frac{1}{f(D+a)}\, V = \frac{1}{f(D)}\, e^{ax}\, V.$$

لہٰذا ہمیں درکار نتیجہ حاصل ہو گیا۔

مثال

حل کیجیے

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 4y = e^x \cos x$$

ہم پاتے ہیں

$$(D^2 - 2D + 4)\, y = e^x \cos x$$

اب $D^2 - 2D + 4 = 0$ کے ریشے $1 \pm \sqrt{3}i$ ہیں، اس لیے تمامی تفاعل

$$= e^x (c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3}x)$$

پھر خصوص تکملہ

$$= \frac{1}{D^2-2D+4} e^x \cos x$$

$$= e^x \frac{1}{(D+1)^2-2(D+1)+4} \cos x$$

$$= e^x \frac{1}{D^2+3} \cos x = e^x \frac{1}{(-1^2)+3} \cos x$$

$$= \tfrac{1}{2} e^x \cos x$$

$$\therefore \quad y = e^x \, (c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3}x) + \tfrac{1}{2} e^x \cos x$$

مشقیں

حل کیجیے

1. $(D^2+3D+2)y = e^{2x} \sin x.$
2. $\frac{d^2y}{dx^2}+2y = x^2e^{3x}+e^x \cos 2x.$
3. $(D^3-D^2+3D+5) = e^x \cos 2x.$
4. $(D^3-7D-6)y = e^{2x}(1+x).$

جوابات

1. $y = ae^{-2x}+be^{-x}+\frac{1}{130}(11 \sin x-7 \cos x)e^{2x}.$
2. $y = a \cos \sqrt{2}x+b \sin \sqrt{2}x-\frac{1}{17}(\cos 2x-4 \sin 2x)\, e^x$
   $+\frac{1}{11}(x^2-12x/11+50/121)\, e^{3x}.$
3. $y = ae^{-x}+(b \cos 2x+c \sin 2x)\, e^x-\frac{1}{16}xe^x(\cos 2x-\sin 2x).$
4. $y = ae^{-x}+be^{3x}+ce^{-2x}-\frac{1}{12}(17/12+x)e^{2x}.$

14·92 - یہ ثابت کرنا کہ

$$\frac{1}{f(D)} xV = \left[x - \frac{1}{f(D)} f'(D)\right] \frac{1}{f(D)} V$$

یہاں بھی، ہم x کا کوئی تفاعل V_1 لے کر چلتے ہیں جسے V کے ارقام میں بعد میں حاصل کریں گے۔

ہم پاتے ہیں

$$D(xV_1) = xDV_1+V_1 = xDV_1+(D)'\,V_1,$$
$$D^2(xV_1) = xD^2V_1+2DV_1 = xD^2V_1+(D^2)'\,V_1,$$

وغیرہ

عام طور سے

$$D^r\,(xV_1) = xD^rV_1+rD^{r-1}\,V_1 = xD^rV_1+(D^r)'\,V_1.$$
$$\therefore\quad f(D)xV_1 = (D^n+a_1D^{n-1}+a_2\,D^{n-2}+\ldots\ldots+a_n)x\,V_1$$

$$(1)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots = xf(D)\,V_1+f'(D)\,V_1$$

اب ہم V_1 ایسا معلوم کرتے ہیں کہ

$$(2)\quad \ldots\ldots\ldots\quad f(D)V_1 = V \Rightarrow V_1 = \frac{1}{f(D)}\,V$$

(1) اور (2) سے ہم پاتے ہیں

$$f(D)\,x\,\frac{1}{f(D)}V = xV+f'(D)\,\frac{1}{f(D)}V$$

اب $1/f(D)$ سے عمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$x\,\frac{1}{f(D)}\,V = \frac{1}{f(D)}\,xV+\frac{1}{f(D)}f'(D)\,\frac{1}{f(D)}V$$

$$\therefore\quad \frac{1}{f(D)}xV = x\,\frac{1}{f(D)}\,V-\frac{1}{f(D)}\,f'(D)\frac{1}{f(D)}\,V$$

$$= \left[x-\frac{1}{f(D)}f'(D)\right]\frac{1}{f(D)}\,V.$$

مثالیں

1 حل کیجیے

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4y = x \sin x.$$

ہم پاتے ہیں

$$(D^2+4)y = x \sin x$$

چونکہ $D^2+4 = 0$ کے ریشے $\pm 2i$ ہیں، اس لیے ہم پاتے ہیں

تمامی تفاعل $= c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

مخصوص تکملہ $= \frac{1}{D^2+4} x \sin 2x$

$$= \left[x - \frac{1}{D^2+4} 2D\right] \frac{1}{D^2+4} \sin x$$

$$= \left(x - \frac{1}{D^2+4} 2D\right) \frac{1}{3} \sin x$$

$$= \frac{x}{3} \sin x - \frac{2}{3} \quad \frac{1}{D^2+4} \cos x$$

$$= \frac{x}{3} \sin x - \frac{2}{9} \cos x$$

$$\therefore \; y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{x}{3} \sin x - \frac{2}{9} \cos x.$$

2۔ حل کیجیے

$$\frac{d^4y}{dx^4} - y = x^2 \sin x$$

ہم پاتے ہیں

$$(D^4-1)\, y = x^2 \sin x.$$

یہ بہ آسانی دیکھا جا سکتا ہے کہ تمامی تفاعل

$$= c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

پھر تکملۂ خاص

$$= \frac{1}{D^4-1} x^2 \sin x$$

اب

$$x^2 \sin x = x(x \sin x)$$

لکھ کر اور اوپر ثابت کیے گئے نتیجے میں $x \sin x =$ لیتے ہوئے اس نتیجے کا استعمال کر سکتے ہیں لیکن یہ طریقہ مشکل ہو جاتا ہے۔ اس سے چھوٹا طریقہ یہ ہے:۔

ہم پاتے ہیں

مخصوص تکملہ = $\frac{1}{D^4-1} x^2 e^{ix}$ کا خیالی حصہ

اب

$$\frac{1}{D^4-1}x^2 e^{ix} = e^{ix}\frac{1}{(D+i)^4-1}x^2$$

$$= e^{ix}\frac{1}{D^4+4D^3i-6D^2-4Di} x^2$$

$$= e^{ix}\frac{1}{-4Di}\left[1+\frac{-6D+4D^2i+D^3}{4i}\right]^{-1}x^2$$

$$= -\frac{e^{ix}}{4i}\frac{1}{D}\left[1+\frac{-6D+4D^2i+D^3}{4i}+\left(\frac{-6D+\dots}{4i}\right)^2\right]$$

$$= i\frac{e^{ix}}{4}\frac{1}{D}\left[1-\frac{3D}{2i}-\frac{5}{4}D^2\dots\dots\right]x^2$$

$$= \frac{i}{4}e^{ix}\frac{1}{D}\left[x^2+3ix-\frac{5}{2}\right]$$

$$= \frac{i}{4}e^{ix}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3i}{2}x^2-\frac{5}{2}x\right]$$

$$= \frac{i\cos x-\sin x}{4}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3i}{2}x^2-\frac{5}{2}x\right)$$

جس کا کہ خیالی حصہ

$$\frac{\cos x}{4}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x\right)-\frac{3}{8}x^2\sin x$$ ہے۔

$\therefore\quad y = c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x$
$$+\frac{\cos x}{4}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x\right)-\frac{3}{8}x^2\sin x.$$

مشقیں

حل کیجیے

1. $(D^2+2D+1)\,y = x\sin x.$
2. $(D^2+1)\,y = x^2\sin 2x$

جوابات

1. $y = (a+bx)\,e^{-x}+\frac{1}{2}(1-x)\cos x+\frac{1}{2}\sin x.$
2. $y = a\cos x+b\sin x-\frac{1}{3}(x^2-\frac{26}{9})\sin 2x-\frac{4}{9}x\cos 2x.$

14·10- ہم جنس خطی مساواتیں (Homogeneous linear Equations)

مساوات

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_2x^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots\ldots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny = X$$

حل کرنا، جہاں کہ a_1, a_2 ..... a_n مستقل ہوں اور X, x کا کوئی تفاعل ہو۔

استحالہ (transformation) $z = \log x$ یعنی $x = e^z$ سے دی ہوئی مساوات مستقل ضربیوں (constant coefficients) میں بدل جائے گی۔

ہم پاتے ہیں

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dy}{dz} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right)$$

اسی طرح

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{d^3y}{dz^3} - 3\frac{d^2y}{dz^2} + 2\frac{dy}{dz}\right)\frac{1}{x^3}$$

اب ہم لکھتے ہیں

$$D \equiv \frac{d}{dz}$$

لہذا ہم اوپر کے نتائج کو دوبارہ یوں لکھ سکتے ہیں :-

$$x\frac{dy}{dx} = Dy,$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)\,y,$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} = (D^3 - 3D^2 + 2D)\,y = D(D-1)(D-2)\,y.$$

اب ریاضیاتی توسیع (mathematical induction) سے ہمیں ذیل نتیجہ ملے گا۔

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n} = D(D-1)(D-2)\ldots\ldots(D-n+1) = y$$

اس لیے دی ہوئی مساوات تبدیل ہو کر

$$[D(D-1)(D-2)\ldots\ldots(D-n+1) + a_1 D(D-1)\ldots\ldots(D-n+2) + \ldots\ldots a_n]\,y = Z$$

یعنی $\varphi(D)\,y = Z$

ہو جاتی ہے، جہاں کہ Z ، z کا وہ تفاعل ہے جو کہ X سے عوضی $z = \log x$ کرکے حاصل ہوا ہے۔

یہاں z غیر تابع متغیر ہے۔

اب یہ مساوات پہلے بتائے گئے طریقوں سے حل ہو سکتی ہے۔

مثال

حل کیجیے

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}+2x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2y = 10\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

استعمال $z = \log x$ کرنے پر مساوات یہ ہوجاتی ہے :-

$$[D(D-1)(D-2)+2D(D+1)+2]y = 10\,(e^z+e^{-z})\ ;\ D=d/dz$$

یا $(D^3-D^2+2)y = 10(e^z+e^{-z}).$

یہاں z غیر تابع اور y تابع متغیر ہیں۔

اب، طریقہ آزمایش (by trial) سے مساوات $D^3-D^2+2 = 0$ کا ایک ریشہ $1-$ ہے اس لیے D^3-D^2+2 کا ایک جزو $D+1$ ہے۔

دراصل ہم پاتے ہیں

$$\begin{aligned}D^3-D^2+2 &= D^3+D^2-2D^2+2\\ &= D^2(D+1)-2(D^2-1)\\ &= (D+1)(D^2-2D+2).\end{aligned}$$

اب $D^2-2D+2 = 0$ کے ریشے $1 \pm i$ ہیں اس لیے $D^3-D^2+2 = 0$ کے ریشے $1-i\ ,\ 1+i\ ,\ -1$ ہیں۔ لہٰذا تمامی تفاعل

$$\begin{aligned}&= c_1e^{-z}+e^z(c_2\cos z+c_3\sin z)\\ &= c_1x^{-1}+x(c_2\cos\log x+c_3\sin\log x)\end{aligned}$$

ساتھ ہی مخصوص تکملہ

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{D^3-D^2+2}10(e^z+e^{-z})\\ &= 10\frac{1}{D^3-D^2+2}e^z+10\frac{1}{D^3-D^2+2}e^{-z}\end{aligned}$$

$$= 10\frac{1}{1^3-1^2+2}e^z+10\frac{1}{(D+1)(D^2-2D+2)}e^{-z}$$

$$= 5e^z+10\frac{1}{D+1}\quad\frac{e^{-z}}{(-1)^2-2(-1)+2}$$

$$= 5e^z+2z\,e^{-z} = 5x+2x^{-1}\log x.$$

$$\therefore\ y = c_1x^{-1}+x(c_2\cos\log x+c_3\sin\log x)+5x+2x^{-1}\log$$

مشقیں

حل کیجیے

1. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+7x\frac{dy}{dx}+5y = 2x^6.$ 2. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-4y = x^3.$

3. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+y = (1-x)^2$

4. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y = x+x^2\log x+x^3.$

5. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}-20y = (x+1)^2.$

جوابات

1. $y = ax^{-5}-bx^{-1}+\frac{2}{77}x^6.$ 2. $y = ax^2+bx^{-2}+\frac{1}{5}x^3.$

3. $y = (a+b\log x)x^{-1}+1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{9}x^2.$

4. $y = ax^2+bx+\frac{1}{2}x^3-x\log x+x^2[\frac{1}{2}(\log x)^2-\log x]$

5. $y = c_1x^4+c_2x^{-5}-\frac{1}{14}x^2-\frac{1}{9}x-\frac{1}{20}.$

باب 14 پر مشقیں

حل کیجیے

1. $\frac{d^2y}{dx^2}-2m\frac{dy}{dx}+m^2y = \sin nx.$ 2. $\frac{d^2y}{dx^2}+4y = \sin 3x\cos x.$

3. $\frac{d^3y}{dx^3}-6\frac{dy}{dx}+8y=(e^{2x}-1)^2$ 4. $\frac{d^2y}{dx^2}-y=1$

(جبکہ $x=0$ پر $y=0$ اور $x\to-\infty$ پر y متناہی ہو)

5. $4\frac{d^3y}{dx^3}-y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 6. $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}-13y=e^{x/2}-\sin\frac{x}{3}$

7. $4\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+2y=\cos^2\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)$. 8. $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+y=e^{2x}\sin 2x$.

9. $\frac{d^4y}{dx^4}-y=e^x\cos x$. 10 $\frac{d^4y}{dx^4}+2\frac{d^2y}{dx^2}+y=x^2\cos x$.

11. $(D^3-1)y=xe^x+\cos^2x$. 12. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=\cos 2x+x^2$.

13. $\frac{d^2y}{dx^2}+y=xe^{2x}$. 14. $(D^2+4)y=x\cos 2x$.

15. $(D^2+3D+2)y=x^2\cos x$ 16. $(D^2-4D-5)y=xe^{-x}$.

17. $(D^2+9)y=\cos^2\frac{3x}{2}$

18. $(D^5+D^4+4D^3+4D^2+4D+4)y=\cos 3x\cos x$.

19. $(x^2D^2+xD-4)y=x^2$. 20. $(x^3D^3+3x^2D^2+xD+1)y=x\log x$.

21. $x\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x}$ 22. $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{6}{x^2}y=x\log x$.

23. $(x+1)^2\frac{d^2y}{dx^2}-3(x+1)\frac{dy}{dx}+4y=x^2$.

24. $x^2D^2y-3xDy+5y=x^2\sin(\log x)$.

25. $(x+3)^2\frac{d^2y}{dx^2}-4(x+3)\frac{dy}{dx}+6y=x$.

26. $(D^4+D^2+1)y=e^{(-x/2)}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}$

جوابات

1. $y=(a+bx)e^{mx}+\frac{(m^2-n^2)\sin nx+2mn\cos nx}{(m^2+n^2)^2}$

2. $y=a\cos 2x+b\sin 2x-\frac{1}{24}\sin 4x-\frac{1}{4}x\cos 2x$.

3. $y = ae^{4x}+be^{2x}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}xe^{4x}+xe^{2x}$. 4. $y = e^{x}-1$.

5. $y = ae^{-x/2}+be^{\cdot x/2}-\frac{1}{2}(\sin x+\sqrt{3}\cos x)$.

6. $y = ae^{(2+\sqrt{17})x}+be^{(2-\sqrt{17})x}-\frac{4}{85}e^{x/3}-$ [illegible] $(-59\sin {x/_3}+6\cos {x/_3})$

7. $y = \left(a\cos\frac{x}{2}+b\sin\frac{x}{2}\right)e^{x/2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{520}[(7+4\sqrt{3})\cos 2x$
$+(4-7\sqrt{3})\sin 2x]$.

8. $y = ae^{(2+\sqrt{3})x}+be^{(2-\sqrt{3})x}-\frac{1}{7}e^{2x}\sin 2x$

9. $y = ae^{-x}+be^{x}+c\cos x+d\sin x-\frac{e^{x}}{5}\cos x$.

10. $y = (a+bx)\cos x+(c+dx)\sin x-\frac{1}{48}(9x^2-x^4)\cos x+\frac{1}{12}x^3\sin x$.

11. $y = ae^{x}+[b\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x]\,e^{-\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(x^2/2-x)e^{x}$
$-\frac{1}{130}(8\sin 2x+\cos 2x)$.

12. $y = (a\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+b\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)\,e^{-\frac{x}{2}}-\frac{1}{13}(3\cos 2x-2\sin 2x)+(x^2-2x)$

13. $y = (a\cos x+b\sin x)+\frac{1}{5}(x-\frac{4}{5})e^{2x}$.

14. $y = (a\cos 2x+b\sin 2x)+\frac{1}{16}x\cos 2x+\frac{x^2}{8}\sin 2x$.

15. $y = ae^{-2x}+be^{-2x}+\frac{1}{10}(\cos x+3\sin x)x^2-\frac{1}{50}(17\sin x-6\cos x)$
$+\frac{1}{500}(81\sin x-133\cos x)$

16. $y = ae^{6x}+be^{-x}-\frac{1}{14}x(1+3x)e^{-x}$.

17. $y = a\cos 3x+b\sin 3x+\frac{1}{36}(3x\sin 3x+2)$.

18. $y = ae^{-x}+(bx+c)\cos\sqrt{2}x+(dx+e)\sin\sqrt{2}x+$ [illegible] $(\cos 4x+4\sin 4x)$
$+\frac{1}{40}(\cos 2x+2\sin 2x)$.

19. $y = ax^2+bx^{-2}+\frac{x^2}{4}\log x$.

20. $y = ax^{-1}+\sqrt{x}[b\cos(\frac{1}{2}\sqrt{3}\log x)+c\sin(\frac{1}{2}\sqrt{3}\log x)]+\frac{x}{2}\log x-\frac{3x}{4}$.

21. $y = a+(b\log x+c)x+\frac{x}{2}(\log x)^2$.

22. $y = ax^3+bx^{-3}+\frac{1}{36}(5\log x-2)x^3\log x$.

23. $y = (x+1)^2[a\log(x+1)+b]+\frac{1}{4}[2(x+1)^2\{\log(x+1)\}^2-8x-7]$.

24. $y = x^2[a\cos(\log x)+b\sin(\log x)]-\frac{x^2}{9}\log x\cos(\log x)$.

25. $y = a(x+3)^2+b(x+3)^3+\frac{1}{2}(x+2)$.

26. $y = e^{-\frac{x}{2}}\left\{\left(\frac{1}{4}x+a\right)\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+\left(b+\frac{x}{4\sqrt{3}}\right)\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right\}$
$+ce^{x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}+d\right)$.

متفرق مشقیں 4

ذیل تفرقی مساواتیں حل کیجیے:-

1- $\frac{dy}{dx}-\frac{\tan y}{1+x}=(1+x)\,e^{x}\sec y$

2- $(y\sin x-1)\,dx+\cos x\,dy=0$

3- $(x+y)^2\,dx=xy\,dy.$

4- $(x+y)^2\,dx=dy$

5- $2xy^2\,dx=e^{x}\,(dy-y\,dx).$

6- $\frac{x+y-a}{x+y-b}\,\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+a}{x+y+b}$

7- $\frac{dy}{dx}+y\cot x=\sin x.$

8- $x\frac{dy}{dx}-2y=x^2+\sin\frac{1}{x^2}$

9- $x\frac{dy}{dx}-y=2x^2\operatorname{cosec}2x.$

10- $2\cos x\,\frac{dy}{dx}+4y\sin x=\sin 2x,$

(جبکہ $x=\pi/3$ پر $y=0$ ہو)

11- $x\frac{dy}{dx}+3y=x^4y^3\,e^{1/x^2}.$

12- $xy-\frac{dy}{dx}=y^3\,e^{-x^2}$

13- $\frac{dy}{dx}=\frac{y(x+y)}{x(x-y)}$

14- $\frac{dy}{dx}=\frac{6x-4y+3}{3x-2y+1}$

15- $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y+1}{x+2y-3}$

16- $x^2y\frac{dy}{dx}=xy^2-e^{-1/x^3}$

17- $3e^{x}\tan y+(1-e^{x})\sec^2 y\,\frac{dy}{dx}=0$

18- $(x+y+1)\,dy=dx.$

19- $x\frac{dy}{dx}+y\log y=xye^{x}$

20- $(3x-2y+1)\,dx+(2x-3y+4)\,dy=0$

21- $(2xy+y-\tan y)\,dx+(x^2-x\tan^2 y+\sec^2 y)\,dy=0$

22- $x\frac{dy}{dx}+2y=x^2+\tan\frac{1}{x^2}$

23- مساوات $\frac{dy}{dx}+2y\tan x=\sin x$ حل کیجیے اور y کی کم از کم قیمت معلوم کیجیے جب کہ $x=0$ پر $y=2$ ہو۔

24- $(x^2+3x+2)\dfrac{dy}{dx}+(2x+1)\,y=(xy+2y)^2$

25- $(x+2y^3)\dfrac{dy}{dx}=y$

26- ثابت کیجیے کہ $y=\tan x+c$ کے عمودی مستدیر منحنی

$$4y+2x+\sin 2x+c=0$$

ہوتے ہیں۔

27- ثابت کیجیے کہ قبیلہ منحنی $x^2-y^2=c$. کا ہر ممبر قبیلہ منحنی $xy=a$ کے ہر ممبر کو $90°$ پر کاٹتا ہے۔

28- ثابت کیجیے کہ قبیلہ منحنی $r\sin^2\theta=A$ کے عمودی مستدیر منحنی $r^2\cos\theta=A$ ہوتے ہیں۔

29- ثابت کیجیے کہ قبیلہ منحنی $(r^2-1)\sin\theta=cr$ کے عمودی مستدیر

$$(r^2+1)\cos\theta=cr$$

ہوتے ہیں۔

30- وہ قبیلہ منحنی معلوم کیجیے جن کے کسی نقطے پر قطبی تحت مماس (polar sub-tangent) اس نقطہ پر نصف قطری سمتیہ (radius vector) سے متناسب (proportional) ہو۔

31- وہ قبیلہ منحنی معلوم کیجیے جن کے کسی نقطہ پر مماس اور اسی نقطہ کے نصف قطری سمتیہ کے درمیان کا زاویہ سمتیہ زاویہ (vectorial angle) کا m گنا ہو۔

32- قبیلہ منحنی

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{a}{x}$$

کے عمودی مستدیر نکالیے۔

33- ثابت کیجیے کہ ہموار سطح پر سبھی مکافیوں کی تفرقی مساوات

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-2/3} = 0$$ ہے۔

34۔ اُس منحنی کی کارٹیزی مساوات معلوم کیجیے جس کے لیے مبدا سے ڈالے گئے کسی مماس پر عمود کی لمبائی نقطہ تماس (point of contact) کے فصلے کے برابر ہو۔

35۔ ایسا منحنی معلوم کیجیے کہ اُس کے x-محور کے اور کسی دو عرضوں کے درمیان گھرا ہوا رقبہ اُن دونوں عرضوں کے درمیان کے قوس سے متناسب (proportional) ہو۔

36۔ تفرقی مساوات

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y = e^{-x}$$

کا وہ حل نکالیے جس میں $x = 0$ رکھنے پر $y = 0$ اور $dy/dx = 0$ ہوں۔

37۔ مساوات

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+4y = x^2$$

حل کیجیے جبکہ دیا ہوا ہے کہ $x = 1$ پر $y = 0$ اور $x = e$ پر $y = e^2$ ہے۔

38۔ تفرقی مساوات

$$4xy\frac{dy}{dx} = 4y^2-x^2.$$

کا وہ حل نکالیے جس میں $x = 1$ رکھنے پر $y = 0$ ہو۔

39۔ حل کیجیے

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(\sin x+\cos x)\, y\,\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}y^2\sin 2x = 0$$

40۔ تفرقی مساوات

$$(D^3+D^2-2)\, y = x^3e^x$$

کا وہ حل نکالیے جو کہ ذیل شرائط پوری کرے۔

$x = 0$ پر $y = 0$ ہو اور $x \to -\infty$ پر $y \to 0$ ہو۔

41۔ حل کیجیے

$$(D^4+2D^2+1)\,y = 24\,x\sin x.$$

42۔ حل کیجیے

$$(D-1)^2\,(D^2+1)^2 y = \sin^2\frac{x}{2}+e^x$$

جوابات

1. $(1+x)(e^x+c) = \sin y.$
2. $y = c\cos x+\sin x.$
3. $cx^3(x+2y) = e^{2y/x}.$
4. $x+y = \tan(x+c).$
5. $e^x+(c+x^2)\,y = 0$
6. $2(x-y+c) = (b-a)\log[(x+y)^2-ab]$
7. $(2y+\cos x)\sin x = c+x$
8. $2y = cx^2+2x^2\log x+x^2\cos(x^{-2}),$
9. $y = cx+x\log\tan x.$
10. $y\sec^2 x = \sec x-2$
11. $y^2x^6(c+e^{1/x^2}) = 1$
12. $y^2(c+2x) = e^{x^2}.$
13. $xy^{-1}+\log xy = c.$
14. $4x-2y-2\log(3x-2y+3) = c.$
15. $xy+y^2-3y = x^2+x+c.$
16. $3y^2+2x^2e^{-1/x^2} = cx^2.$
17. $\sqrt[3]{\tan y} = c(1-e^x).$
18. $x+y+2 = ce^y.$
19. $x\log y = (x-1)e^x+c.$
20. $(y-x-1)(y+x-3)^5 = c.$
21. $x^2y+xy-x\tan y+\tan y = c.$
22. $xy^{-2} = \log x+\frac{1}{2}\cos x^{-2}+c.$
23. $y = \cos x+c\cos^2 x\,;\ -\frac{1}{2}.$
24. $x+1 = y(x+2)^2+cy(x+2)^3$
25. $x = y^3+cy.$
30. مساوی زاویہ اسپائرل
31. $r^m = a^m\sin m\theta$
32. $(x^{2/3}+c^{2/3})^3 = \frac{9}{4}ay^2$
34. $x^2+y^2 = 2cx.$
35. $y = k\cosh\frac{x+c}{k}$ (قبیلہ زنجیرہ) جہاں کہ k دیا ہوا تناسبی مستقل ہے۔

36. $y = (x-1)e^{-x} + e^{-2x}.$

37. $x^2 \log x \log (ex) = 2y.$

38. $xe^{2y^2/x^2} = 1.$

39. $(cy - e^{-\sin x})(cy - e^{\cos x}) = 0.$

40. $y = e^{x}\left(\frac{x^4}{20} - \frac{4x^3}{25} + \frac{33x^2}{125} - \frac{144x}{625}\right).$

41. $y = (c_1x + c_2)\cos x + (c_3x + c_4)\sin x - (3\cos x + x\sin x)x^2.$

42. $y = (c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\sin x + (c_5 + c_6x + \frac{1}{2}x^2)e^{x} - \frac{1}{16}x^2\sin x + \frac{1}{2}$

ضمیمہ I (APPENDIX I)

بیٹا اور گاما تفاعل

A·1 - غیر واجب تکملوں (improper integrals) کا تقارب (Convergence)

غیر واجب معین تکملوں کے تصور سے باب I میں ہی واقفیت ہو چکی ہے۔ اب ہم مثبت تکاملیوں کے غیر واجب تکملوں کے وجود (جسے تقارب (convergence) بھی کہتے ہیں) کے لیے دو موازنی جانچیں (comparison tests) بھی حاصل کریں گے۔ یہ اس لیے کر رہے ہیں تاکہ بیٹا (Beta) اور گاما (Gamma) تفاعلوں کا تعارف بحیثیت معین تکملوں کے کرایا جا سکے۔

A·21 - وہ صورت جب کہ قطعۂ تکمل (Region of Integration) لامتناہی (Infinite) ہو

اگر X کے ∞ کی طرف مائل ہونے پر

$$\varphi(X) = \int_a^X f(x)\,dx$$

ایک متناہی انتہا (finite limit) کی طرف مائل ہو تو ہم کہتے ہیں کہ غیر واجب تکملہ

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

∞ پر تقارب کر رہا ہے اور وہ انتہا تکملہ (1) کی قیمت کہلاتی ہے۔

اگر x کی a سے بڑی ہر قیمت کے لیے f(x) مثبت ہو تو معین تکملہ کے رقبے والے مفہوم سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ φ(X), X کا ایک کیفی صعودی (monotonically increasing) تفاعل ہے۔ اِس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ غیر واجب تکملہ

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

تب اور صرف تبھی ∞ پر تقارب کرے گا جب کہ φ(X) اوپر حد سے محدود ہو (bounded above)، یعنی ایسے مثبت نمبر k کا وجود ہو کہ x کی ہر قیمت کے لیے

$$\varphi(X) \leqslant k$$

اِس سلسلے میں تقارب کے لیے کارآمد اور کافی جانچ (sufficient test) یہ ہے:-

مسئلہ (Theorem): اگر x کی a کے برابر یا اُس سے بڑی ہر قیمت کے لیے f(x) اور F(x) دو مثبت تفاعل ہوں اور اگر

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = l$$

جہاں l نہ تو صفر ہے اور نہ ∞ تو یا

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{اور} \quad \int_a^\infty F(x)\,dx$$

دونوں تکملے متقارب (convergent) ہوں گے یا دونوں غیر متقارب (non convergent) ہوں گے۔

مان لیجیے کہ ε کوئی مثبت نمبر ہے۔ تب ایک ایسے نمبر X_0 کا وجود ہوگا کہ

$$\left|\frac{f(x)}{F(x)} - l\right| < \varepsilon \quad \text{ہر} \quad x \geqslant X_0 \quad \text{کے لیے}$$

یعنی

$$(l-\varepsilon)\,F(x) < f(x) < (l+\varepsilon)\,F(x) \quad \text{ہر} \quad x \geqslant X_0 \quad \text{کے لیے} \quad \ldots\ldots (2)$$

اب* (2) سے ہم پاتے ہیں

$$\int_{X_0}^{X}(l-\epsilon)\,F(x)dx \leqslant \int_{X_0}^{X} f(x)dx \leqslant \int_{X_0}^{X}(l+\epsilon)F(x)dx \quad \ldots\ldots (3)$$

اب مان لیجیے کہ

$$\int_a^{\infty} F(x)\,dx$$

تقارب کرتا ہے، تب

$$\int_{X_0}^{\infty} F(x)\,dx$$

بھی تقارب کرے گا، جس سے کہ

$$\int_{X_0}^{X} F(x)\,dx$$

اور اُسی سے

$$(l+\epsilon)\int_{X_0}^{X} F(x)\,dx$$

کی اوپر سے محدود (bounded above) ہے۔ اب (3) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\int_{X_0}^{X} f(x)\,dx$$

اوپر سے محدود ہے۔ لہٰذا

$$\int_{X_0}^{\infty} f(x)\,dx$$

اور اسی لیے

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

بھی متقارب ہیں۔

دوسری صورتوں میں بھی (3) سے اسی قسم کے نتائج نکل سکتے ہیں۔

---

* معین تکملوں کے جیومیٹریائی مفہوم سے یہ نتیجہ نکلتا ہے۔

A·22.- وہ صورت جبکہ تکاملیہ لامتناہی ہو

اب مان لیجیے کہ وقفہ $(a, b-h)$ میں $f(x)$ مسلسل (continuous) ہے اور مان لیجیے کہ جب $x \to b$ تو $f(x) \to \infty$

ہم لکھتے ہیں

$$\varphi(h) = \int_a^{b-h} f(x)\, dx$$

اب اگر h کے مائل بہ صفر ہونے پر $\varphi(h)$ کسی متناہی انتہا کی طرف مائل ہو تو ہم کہتے ہیں کہ غیر واجب تکملہ

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

b پر تقارب کرتا ہے اور اس حد کو (4) کی قیمت کہتے ہیں

اگر $f(x)$ مثبت ہو تو h کے کم ہونے پر $\varphi(h)$ یک کیفی صعودی ہوگا اور اس لیے مثبت تکاملیہ کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ تکملہ (4) تب اور صرف تبھی متقارب ہوگا جب کہ $\varphi(h)$ اوپر سے محدود ہو، یعنی ایسے نمبر k کا وجود ہو کہ

$$\varphi(h) < k\,, \quad (h \text{ کے ہر مثبت قیمت کے لیے})$$

جیسا کہ تکملہ کی لامتناہی حدیں ہونے کی صورت میں دکھایا گیا، یہاں ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر $f(x)$ اور $F(x)$ مثبت ہوں اور

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{F(x)} = l$$

جہاں l نہ تو صفر ہے اور نہ ∞، تب یا

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad \text{اور} \quad \int_a^b F(x)dx$$

دونوں تکملے b پر متقارب ہوں گے یا دونوں غیر متقارب ہوں گے۔

اسی طرح کے نتائج a پر تقارب کے لیے ثابت کیے جا سکتے ہیں۔

A·3 - تین اہم موازنی تکملے (Comparison Integrals)

$$(i)\ \int_a^\infty \frac{dx}{x^\mu},\ (a>0).\quad (ii)\ \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\mu},\quad (iii)\ \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\mu}$$

(i) تکملہ

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\mu}$$

تب اور صرف تبھی متقارب ہوگا جبکہ $1 < \mu$ ہو۔

اگر $\mu \neq 1$ ہو تو ہم پاتے ہیں

$$\varphi(X) = \int_a^X \frac{dx}{x^\mu} = \frac{1}{1-\mu}\left|\frac{1}{x^{\mu-1}}\right|_a^X = \frac{1}{1-\mu}\left[\frac{1}{X^{\mu-1}} - \frac{1}{a^{\mu-1}}\right]$$

چونکہ X کے مائل بہ ∞ ہونے پر $1/(\mu-1)a^{\mu-1}$ پر مائل ہوگا اگر $1 < \mu$ اور مائل بہ ∞ ہوگا اگر $1 > \mu$ ہو۔

اگر $\mu = 1$ تو ہم پاتے ہیں

$$\varphi(X) = \int_a^X \frac{dx}{x} = \log X - \log a$$

چونکہ $X \to \infty$ ہونے پر مائل بہ ∞ ہوتا ہے، اس لیے نتیجہ ثابت ہوگیا

(ii) تکملہ

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\mu}$$

تب اور صرف تبھی متقارب ہوگا جب کہ $1 > \mu$ ہوگا۔

اگر $\mu \neq 1$ ہو، تو ہم پاتے ہیں

$$\varphi(h) = \int_a^{b-h} \frac{dx}{(b-x)^\mu} = \frac{1}{\mu-1}\left|\frac{1}{(b-x)^{\mu-1}}\right|_a^{b-h}$$

$$= \frac{1}{\mu-1}\left[\frac{1}{h^{\mu-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\mu-1}}\right],$$

جوکہ $h \to o$ ہونے پر مائل بہ $1/(1-\mu)(b-a)^{\mu-1}$ ہوگا اگرچہ $\mu < 1$ ہو اور مائل بہ ∞ ہوگا اگرچہ $\mu > 1$ ہو۔

اگر $\mu = 1$ ہو تو ہم پاتے ہیں

$$\varphi(h) = \int_a^{b-h} \frac{dx}{b-x} = -\Big|\log(b-x)\Big|_a^{b-h} = \log(b-a) - \log h \cdot$$

جوکہ h کے مائل بہ صفر ہونے پر لامتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے۔ اس طرح نتیجہ ثابت ہوگیا۔

(iii) تکملہ

$$\int_a^{o} \frac{dx}{(x-a)^{\mu}}$$

تب اور صرف تبھی متقارب ہوگا جب کہ $\mu < 1$ ہو۔

یہ نتیجہ بھی اوپر (ii) کی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے۔

مثالیں

1 ذیل کے تقارب کی جانچ کیجیے :۔

(i) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x\,dx}{(1+x)^3}$. (ii) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}(1+x)^{\frac{1}{2}}}$

(i) ہم پاتے ہیں

$$f(x) = \frac{x}{(1+x)^3}$$

مان لیجیے

$$F(x) = \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$$

تب

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(1+x)^3} = 1$$

اِس لیے

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \quad \text{اور} \quad \int_1^\infty F(x)\,dx$$

ایک ہی صفت رکھتے ہیں لیکن § A·3 (i) کے مطابق بعد والا تکملہ متقارب ہے۔ لہذا دیا ہوا تکملہ بھی متقارب ہے۔

(ii) ہم پاتے ہیں

$$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}\,(1+x)^{\frac{1}{2}}}$$

مان لیجیے

$$F(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}\,x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{5}{6}}}$$

تب

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{3}}\,(1+x)^{\frac{1}{2}}} = \lim \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} = 1$$

اب § A·3 (i) سے تکملہ

$$\int_1^\infty F(x)dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^{5/6}}\,dx,\ \mu = \tfrac{5}{6} < 1$$

متقارب نہیں ہے۔ لہذا دیا ہوا تکملہ بھی متقارب نہیں ہے۔

2- ذیل کے تقارب کی جانچ کیجیے :-

$$(i)\ \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}\,(1+x^2)} \quad (ii)\ \int_0^1 \frac{dx}{x^2(1+x)^2} \quad (iii)\ \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^{1/3}(1-x)^{1/3}}$$

(i) تکاملیہ $1/x^{1/3}(1+x^2)$ مثبت ہے اور x کی ہر قیمت کے لیے یہ مسلسل تفاعل ہے، سوائے زیریں حد صفر پر اور یہ $x \to 0$ ہونے پر مائل بہ ∞ ہوتا ہے۔

ہم لکھتے ہیں

$$f(x) = \frac{1}{x^{1/3}(1+x^2)}$$

اور مان لیتے ہیں

$$F(x) = \frac{1}{(x-0)^{1/3}} = \frac{1}{x^{1/3}}$$

تب

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{F(x)} = 1$$

اور (iii) § A·3 سے

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}} dx \quad , (\mu = \tfrac{1}{3} < 1)$$

متقارب ہے۔ لہٰذا دیا ہوا تکملہ بھی متقارب ہے۔

(ii) ہم لکھتے ہیں

$$f(x) = \frac{1}{x^2(1+x)^2}$$

اور مان لیجیے

$$F(x) = \frac{1}{x^2}$$

تب

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{F(x)} = 1$$

اور $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx \quad , \quad (\mu = 2 > 1)$

متقارب نہیں۔ لہٰذا دیا ہوا تکملہ متقارب نہیں۔

(iii) وقفہ $[\tfrac{1}{2}, 1]$ میں x کی قیمت کے لیے تکاملیہ مثبت اور مسلسل ہے، سوائے اوپری حد 1 کے لیے اور یہ $x \to 1$ ہونے پر ∞ کی طرف مائل ہوتا ہے۔ ہم لکھتے

ہیں

$$f(x) = \frac{1}{x^{1/3}(1-x)^{1/3}}$$

اور مان لیجیے

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)^{1/3}}$$

تب

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{F(x)} = 1$$

اور (ii) § A·3 سے

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} F(x)\, dx. \;, \quad \left(\mu = \tfrac{1}{3} < 1\right)$$

متقارب ہے۔ اس لیے دیا ہوا تکملہ بھی متقارب ہے۔

مشقیں

ذیل کے تقارب کی جانچ کیجیے:۔

(i) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ (ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx.$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{x}}{\sin x}\,dx.$ (iv) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{[(x-1)^6(x-2)]^{1/6}}$

جوابات

(i) متقارب (ii) متقارب اگرچہ $a > 0$

(iii) متقارب (iv) غیر متقارب

A·4- بیٹا تفاعل $B(m,n)$ (Beta Function)

تکملہ

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

پر غور کیجیے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ

(i) اگر $m \geqslant 1$ ہو تو تکاملیہ $x = 0$ پر مسلسل ہے اور اگر $m < 1$ ہو تو x کے مائل بہ صفر ہونے پر تکاملیہ مائل بہ ∞ ہوتا ہے۔

(ii) اگر $n \geqslant 1$ ہو تو تکاملیہ $x = 1$ پر مسلسل ہے اور اگر $n<1$ ہو تو x کے 1 کی طرف مائل ہونے پر تکاملیہ مائل بہ ∞ ہوتا ہے۔

(iii) 0 اور 1 کے علاوہ تکاملیہ x کی ہر قیمت کے لیے مسلسل ہے۔

اس لیے اگر $m \geqslant 1$ اور $n \geqslant 1$ ہوں تو تکملہ

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

ایک واجب تکملہ ہوگا اور اس شکل میں اس کا تعارف دو متغیروں m اور n کے ایک تفاعل کی حیثیت سے ہے، جہاں کہ

$$m \geqslant 1,\ n \geqslant 1$$

اب ہم یہ مان کر کہ $m < 1$ یا $n < 1$ ہے، غیر واجب تکملوں

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \text{ اور } \int_0^{\frac{1}{2}} x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx.$$

کے 0 اور 1 پر تقارب کی جانچ کرتے ہیں۔

0 پر تقارب:

ہم لکھتے ہیں

$$f(x) = x^{m-1}(1-x)^{n-1} = (1-x)^{n-1}/x^{1-m}$$

مان لیجیے

$$F(x) = \frac{1}{x^{1-m}}$$

اس لیے x کے مائل بہ صفر ہونے پر $f(x)/F(x) \to 1$۔

چونکہ

$$\int_0^{\frac{1}{2}} F(x)\, dx$$

تب اور صرف تبھی متقارب ہے جب کہ $1 - m < 1 \Leftrightarrow m > 0$ ہو۔ اس لیے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ تکملہ

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{m-1} (1-x)^{n-1}\, dx$$

0 پر تب اور صرف تبھی متقارب ہوگا جب کہ m مثبت ہو۔

1 پر تقارب

یہاں

$$f(x) = x^{m-1} (1-x)^{n-1} = x^{m-1}/(1-x)^{1-n}$$

لکھنے اور یہ مان لینے پر کہ $F(x) = 1/(1-x)^{1-n}$، ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ تکملہ

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1}\, dx$$

1 پر تب اور صرف تبھی متقارب ہوگا جب کہ n مثبت ہو۔

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ علامت

$$\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1}\, dx$$

تبھی معنی رکھتا ہے جب کہ m اور n مثبت ہوں۔

m اور n کی مثبت قیمتوں کے لیے متعارف (defined) تفاعل

$$\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1}\, dx$$

بیٹا تفاعل (Beta function) کہلاتا ہے اور ہم لکھتے ہیں

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1}\, dx. \quad , \quad (m > 0, n > 0)$$

، پ $\sin^2\theta$ — x رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں ،

$$B(m, n) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta \cdot d\theta$$

اس لیے اگر $2m-1$ اور $2n-1$ مثبت کامل اعداد ہوں اور دونوں جفت نہ ہوں تو ہم پاتے ہیں

$$B(m, n) = 2\, \frac{(2m-2)(2m-4)\ldots\ldots(2n-2)(2n-4)\ldots\ldots}{(2m+2n-2)(2m+2n-4)\ldots\ldots}$$

لیکن اگر دونوں جفت ہوں تو اوپر کی کسر کو $\frac{\pi}{2}$ سے ضرب دینے پر $B(m\ n)$ کی قیمت ملتی ہے۔

مشقیں

1۔ ثابت کیجیے:۔

(i) $$\frac{B(p, q+1)}{q} = \frac{B(p+1, q)}{p} = \frac{B(p, q)}{p+q}$$

(ii) $$B(p, q) = B(p+1, q)+B(p, q+1).$$

2۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^1 \sin^p\theta \cos^q\theta\, d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$$

جہاں کہ $q>-1$ اور $p>-1$ ۔

3۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^1 x^{m-1} (1-x^2)^{n-1}\, dx = \tfrac{1}{2} B\left(\tfrac{m}{2}, n\right)$$

4۔ حاصل کیجیے:

(i) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^5)}}$ (ii) $\int_0^2 x^4(8-x^3)^{-1/3}dx$

5۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^p x^m(p^q-x^q)^n\,dx = \frac{p^{qn+m+1}}{q}\,B\left(n+1,\ \frac{m+1}{q}\right)$$

اگرچہ $p > 0, q > 0, m+1 > 0, n+1 > 0$ ہوں۔

6۔ حاصل کیجیے:

$$\int_a^b (x-a)^{l-1}(b-x)^{m-1}\,dx. \qquad (l > 0,\ m > 0)$$

(یہاں $x=py+q$ رکھیے جہاں $y=0$ پر $x=a$ اور $y=1$ پر $x=b$ ہو)

7۔ (a) ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx = B(p,q)$$

یہاں $t = x/(1+x)$ رکھیے تاکہ x کے 0 سے ∞ تک بدلنے پر t، 0 سے 1 تک بدلے۔

(b) ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{(a+bx)^{m+n}} = \frac{1}{a^n b^m}B(m,n)$$

8۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^1 \frac{x^{m+1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx = B(m,n)$$

(ہم پاتے ہیں

$$B(m,n) = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$$

اب سب سے داہنی طرف کے تکملہ میں $x = 1/t$ رکھیے)

9۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx = 2\,B(m, n)$$

10۔ $\frac{x}{1-x} = \frac{at}{1-t}$ رکھتے ہوئے a کو مناسب طریقے سے لے کر ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^1 x^{-1/3}(1-x)^{-2/3}(1+2x)^{-1}dx = \frac{1}{9^{1/3}}\,B(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3})$$

11۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^1 \frac{x^{l-1}(1-x)^{m-1}}{(b+cx)^{l+m}}\,dx = \frac{B(l, m)}{(b+c)^l\, b^m}$$

12۔ حاصل کیجیے

$$\int_0^1 \frac{(1-x^4)^{3/4}}{(1+x^4)^2}\,dx$$

13۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2m-1}\theta\,\sin^{2n-1}\theta}{(a\cos^2\theta+b\sin^2\theta)^{m+n}}\,d\theta = \frac{B(m, n)}{2a^m\, b^n}$$

(پہلے لکھیے

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2m-1}\theta\,\sin^{2n-1}\theta}{(a\cos^2\theta+b\sin^2\theta)^{m+n}}\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2m-1}\theta\,\sin^{2n-1}\theta}{[a+(b-a)\sin^2\theta]^{m+n}}\,d\theta$$

$$\left(= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{n-1}(1-x)^{m-1}}{[a+(b-a)x]^{m+n}}\,dx\right]$$

14۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{n-1}x}{(a+b\cos x)^n}\,dx = \frac{2^{n-1}}{(a^2-b^2)^{n/2}}\,B(\tfrac{1}{2}n, \tfrac{1}{2}n)$$

اگر $a^2 > b^2$ ہو۔

15۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = n^x B(x, n+1) = \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

جہاں $x > 0$ ہے اور $n = 1, 2, \ldots$ ۔

جوابات

4. (i) $\frac{1}{5}B\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$ (ii) $\frac{16}{3}B\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

6. $(b-a)^{l+m-1}B(l, m)$. 12. $\frac{1}{4(2)^{1/4}}B\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{4}\right)$

A·5 - گاما تفاعل (Gamma function)

تکملہ

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx$$

پر غور کیجیے۔

اگر $a \geqslant 1$ ہو، تو $x = 0$ پر تکاملیہ مسلسل ہے اور اگر $a < 1$ ہو تو x کے مائل بہ صفر ہونے پر تکاملیہ مائل بہ ∞ ہوجاتا ہے۔

اب ہمیں دو تکملوں

$$\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}\,dx \quad \text{اور} \quad \int_1^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx$$

کے ترتیب وار 0 اور ∞ پر تقارب کی جانچ کرنا ہے۔

0 پر تقارب

ہم لکھتے ہیں

$$f(x) = x^{a-1}e^{-x} = e^{-x}/x^{1-a}$$

اور مان لیجیے

$$F(x) = 1/x^{1-a}$$

چونکہ

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{F(x)} = 1$$

اور تکملہ

$$\int_0^1 F(x)\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{1-a}}\,dx$$

تب اور صرف تبھی متقارب ہے جب کہ $(1-a) < 1$ یعنی $a > 0$ اِس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\int_0^1 x^{a-1} e^{-x}\,dx$$

0 پر تب اور صرف تبھی متقارب ہے جب کہ $a > 0$ ہو

∞ پر تقارب

اِس صورت میں، موازنی جانچ جس شکل میں دی گئی ہے وہ کارآمد ثابت نہیں ہوتی۔ ہم جانتے ہیں کہ a کی ہر قیمت کے لیے

$$e^{x} > x^{a+1}$$

$$\therefore \qquad e^{-x} < x^{-a-1}$$

اور

$$x^{a-1} e^{-x} < x^{a-1}\, x^{-a-1} = 1/x^2$$

$$\therefore \qquad \int_1^X x^{a-1} e^{-x}\,dx < \int_1^X \frac{1}{x^2}\,dx.$$

ساتھ ہی

$$\int_0^X \frac{1}{x^2}\,dx = \left|-\frac{1}{x}\right|_1^X = -\frac{1}{x} + 1 < 1 \quad (\text{ہر } X > 1 \text{ کے لیے})$$

لہٰذا $\int_1^X x^{a-1} e^{-x} dx$ اوپر سے محدود ہے۔
اِس لیے a کی ہر قیمت کے لیے $\int_1^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$ پر متقارب ہے۔
اوپر جو بتایا گیا، اُس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{x} dx$$

تب معنی رکھتا ہے جب کہ a کوئی مثبت نمبر ہو۔

تفاعل

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$$

جس کا تعارف a کی مثبت قیمتوں کے لیے ہے، اسے **گاما تفاعل** (Gamma Function) کہتے ہیں اور ہم لکھتے ہیں

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$$

حصہ سے تکمل کر کے، ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$$

اِس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر a مثبت کامل عدد ہو، تو $\Gamma(a) = (a-1)!$۔

A·6 بیٹا اور گاما تفاعلوں میں رشتہ

اب ہم ذیل سے ثابت کریں گے

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \quad (m>0,\ n>0)$$

ہم پاتے ہیں

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1}\theta \sin^{2n-1}\theta\, d\theta$$

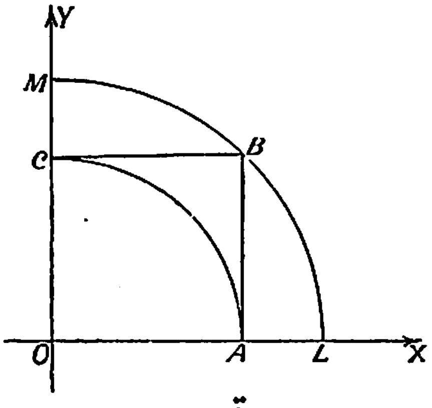
($x = \sin^2\theta$ رکھنے پر)

اور

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x}\, dx$$

$$= 2\int_0^\infty r^{2m-1} e^{-r^2}\, dr \qquad (2)$$

($x = r^2$ رکھنے پر)



تصویر 52

مان لیجیے کہ E وہ مربع ہے جو کہ خطوط

$$x = 0, x = R;\ y = 0, y = R$$

کے درمیان گھرا ہوا ہے۔

ہم پاتے ہیں

$$4\iint_E x^{2m-1} y^{2n-1} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$$

$$= \left[\int_0^R 2x^{2m-1} e^{-x^2}\, dx\right]\left[\int_0^R 2y^{2n-1} e^{-y^2}\, dy\right]$$

اب دائرہ $x^2+y^2 = R^2$ کا مثبت ربع، مربع E کا حصہ ہے اور خود R دائرہ $x^2+y^2 = 2R^2$ کے مثبت ربع کا ایک حصہ ہے۔ اِن دائروں کے مثبت ربعوں کو ہم ترتیب وار E_1 اور E_2 سے ظاہر کرتے ہیں۔

چونکہ تکاملیہ مثبت ہے، اِس لیے ہم پاتے ہیں

$$4\iint_{E_1} x^{2m-1} y^{2n-1} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy \leqslant 4\iint_R x^{2m-1} y^{2n-1} e^{-x^2-y^2} dx\, dy$$

$$\leqslant 4\iint_{E_2} x^{2m-1} y^{2n-1} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy.$$

اب متغیروں کو r, θ میں بدلنے پر، جہاں کہ $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$ ہے، ہم پاتے ہیں

$$4\iint_{E_1} x^{2m-1}\,y^{2n-1}\,e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\cos^{2m-1}\theta\,\sin^{2n-1}\theta\,d\theta\int_0^{R} e^{-r^2}\,r^{2m+2n-1}\,dr$$

$$= 2B(m,n)\int_0^{R} e^{-r^2}\,r^{2m+2n-1}\,dr.$$

اسی طرح،

$$4\iint_{E_2} x^{2m-1}\,y^{2n-1}\,e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = 2B(m,n)\int_0^{2\sqrt{R}} e^{-r^2}\,r^{2m+2n-1}\,dr$$

لہٰذا ہم پاتے ہیں

$$B(m,n)\int_0^{R} 2e^{-r^2}\,r^{2(m+n)-1}\,dr$$

$$\leqslant \left[\int_0^{R} 2e^{-x^2}\,x^{2m-1}\,dx\right]\left[\int_0^{R} 2e^{-y^2}\,y^{2n-1}\,dy\right]$$

$$\leqslant B(m,n)\int_0^{2\sqrt{R}} 2e^{-r^2}\,r^{2(m+n)-1}\,dr.$$

اب مان لیجیے $R\to\infty$ ہم پاتے ہیں

$$B(m,n)\,\Gamma(m+n)\leqslant\Gamma(m)\,\Gamma(n)\leqslant B(m,n)\,\Gamma(m+n).$$

$$\Rightarrow\quad B(m,n)\,\Gamma(m+n)=\Gamma(m)\,\Gamma(n),$$

$$(1)\cdots\Rightarrow\quad B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

ضمنی نتیجہ 1 (Cor 1) $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

$m=n=\frac{1}{2}$ لینے پر ہم دیکھتے ہیں

$$B(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})=\frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^2}{\Gamma(1)}$$

ساتھ ہی اور

$$B(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})=2\int_0^{\pi/2}\cos^{\circ}\theta\,\sin^{\circ}\theta\,d\theta=\pi$$

اور

$$\Gamma(1) = \int_0^1 e^{-x}\,dx = 1$$

$$\therefore\ [\Gamma(\tfrac{1}{2})]^2 = \pi$$

$$\Rightarrow\ \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

کیونکہ $\Gamma(\frac{1}{2})$ یقیناً مثبت ہے۔

طالب علم اِس نتیجہ کو براہ راست اِسی طرح ثابت کر سکتے ہیں جس طرح رشتہ (1) ثابت کیا تھا۔

ضمنی نتیجہ 2 (Cor. 2)

یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

ضمنی نتیجہ 3 (Cor 3)

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2m) = 2^{2m-1}\,\Gamma(m)\,\Gamma(m+\tfrac{1}{2})$$

ہم پاتے ہیں

$$(1)\ldots\ldots \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = B(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta\,\cos^{2n-1}\theta\,d\theta$$

اب $m = n$ لینے پر ہم پاتے ہیں

$$\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(m)}{\Gamma(2m)} = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta\,\cos^{2m-1}\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2^{2m-2}}\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2^{2m-1}}\int_0^{\pi} \sin^{2m-1}\varphi\,d\varphi \qquad (2\theta = \varphi)$$

$$(2)\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{2^{2m-2}}\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\varphi\,d\varphi$$

اب (1) میں $n = \frac{1}{2}$ رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(m+\frac{1}{2})} = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta\, d\theta. \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

اب (2) اور (3) سے ہم پاتے ہیں

$$\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(m)}{\Gamma(2m)} = \frac{1}{2^{2m-1}}\,\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(m+\frac{1}{2})}$$

$$\Rightarrow\ 2^{2m-1}\,\Gamma(m)\,\Gamma(m+\tfrac{1}{2}) = \Gamma(\tfrac{1}{2})\,\Gamma(2m)$$

$$= \sqrt{\pi}\,\Gamma(2m) \quad \left(\text{کیونکہ } \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\right)$$

لہذا نتیجہ ثابت ہو گیا۔

مشقیں

1۔ ذیل کو گاما تفاعل کے ارقام میں رکھیے:۔

$$I_n = \int_0^1 x^p (1-x^q)^n\, dx$$

جہاں q, p اور n مثبت ہوں۔

2۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \frac{\sqrt{\pi}}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)} = 2^{\frac{2-n}{n}}\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2}{n\,\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$$

3۔ ثابت کیجیے کہ

(i) $B(m, m)\,B(m+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}) = \pi\, m^{-1}\, 2^{1-4m}$.

(ii) $B(x, x) = 2^{1-2x}\, B(x, \frac{1}{2})$.

4۔ ثابت کیجیے کہ

$$\Gamma(\tfrac{1}{4})\,\Gamma(\tfrac{3}{4}) = \sqrt{2}\,\pi$$

5. ثابت کیجیے کہ

(i) $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(\sin\theta)}} \times \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\sin\theta)}\, d\theta = \pi.$

(ii) $\int_0^{\infty} \sqrt{y}\, e^{-y^2} dy \times \int_0^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{y}}\, dy = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

(iii) $\int_0^{\infty} x\, e^{-x^8} dx \times \int_0^{\infty} x^2\, e^{-x^4} dx = \frac{\pi}{16\sqrt{2}}$

(iv) $\left\{\int_0^{\pi/2} \sin^p x\, dx\right\}\left\{\int_0^{\pi/2} \sin^{p+1} x\, dx\right\} = \frac{\pi}{2\,(p+1)}$

6. ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^1 \sqrt{(1-x^4)}\, dx = \frac{1}{12}\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2$$

7. ثابت کیجیے کہ لیمنسکیٹ $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ کا محیط $\frac{a}{\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2$ ہے۔

8. اگر n مثبت کامل عدد ہو تو ثابت کیجیے کہ منحنیوں

$x^{2n}+y^{2n} = 1$ اور $x^2+y^2 = 1$

سے گھرے رقبوں کا تناسب $n2^{1/n}/(n+1)$ ہوتا ہے۔

ضمیمہ 2 (APPENDIX 2)

تکملی علامت کے تحت تفرق

A-7۔ دو متغیروں کے تفاعل $f(x, y)$ جو کہ خطوط

$$x = a, x = b\,;\, y = c, y = d$$

سے گھرے مستطیل (rectangle) پر متعارف (defined) ہے، اُس کے تکملہ

$$\int_a^b f(x, y)\, dx$$

پر غور کیجیے۔ صاف طور پر، یہ y کا تفاعل ہے۔ ہم لکھتے ہیں

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ $\varphi(y)$, y کا مسلسل تفاعل ہے۔

ہم یہ بھی مان لیتے ہیں کہ بہ لحاظ y , $f(x, y)$ کے پہلے رتبے کے جزوی تفرقی سر $f_y(x, y)$ کا وجود ہے۔ یہ مانتے ہوئے کہ $f(x, y)$ اور $f_y(x, y)$ مسلسل ہیں، یہ ثابت کیا جائے گا کہ

$$\varphi'(y) = \int_a^b f_y(x, y)\, dx$$

یا دوسرے الفاظ میں

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\, dx$$

یعنی تفرق اور تکمل کی ترتیب باہم بدلی جاسکتی ہے۔

ہم پاتے ہیں

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

مان لیجیے Δy سے y میں کسی تبدیلی کو ظاہر کرتے ہیں۔ تب ہم پاتے ہیں

$$\varphi(y+\Delta y) = \int_a^b f(x, y+\Delta y)\, dx.$$

$$\therefore \quad \varphi(y+\Delta y)-\varphi(y) = \int_a^b [f(x, y+\Delta y)-f(x, y)]\, dx.$$

اب تفرقی احصاء کے لیگرانجے (Lagrange's) کے اوسط قیمت مسئلہ (mean value theorem) کا استعمال کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y) = \int_a^b \Delta y\, f_y(x, y+\theta\,\Delta y)\, dx,\ 0 < \theta < 1$$

$$= \Delta y \int_a^b f_y(x, y+\theta\,\Delta y)\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y} = \int_a^b f_y(x, y+\theta\,\Delta y)\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y} = \int_a^b f_y(x, y)\, dx + \int_a^b [f_y(x, y+\theta\,\Delta y) - f_y(x, y)]\, dx.$$

مان لیجیے ε پہلے سے دیا ہوا مثبت نمبر ہے۔ تب $f_y(x, y)$ کے مسلسل ہونے کی وجہ سے ایسے مثبت نمبر δ کا وجود ہوگا کہ جب $|\Delta y| < \delta$ ہو تو

$$(2) \ldots\ldots\ldots \quad |f_y(x, y+\theta\,\Delta y) - f_y(x, y)| < \varepsilon$$

یہ ثابت کیا جا سکتا ہے δ، x پر منحصر نہیں۔ اس طرح سے وقفہ [a, b] میں x کی ہر قیمت کے لیے غیر مساوی (inequality) (2) صحیح ہے۔

اس طرح جب $|\Delta y| \leqslant \delta$ ہو تو

$$\left|\int_a^b [f_y(x, y+\theta\,\Delta y)-f_y(x, y)]\,dx\right| < \varepsilon(b-a)$$

یعنی

$$\left|\frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y} - \int_a^b f_y(x, y)\,dx\right| < \varepsilon(b-a)$$

جب کہ $|\Delta y| < \delta$ ہو۔

لہٰذا

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y} = \int_a^b f(x, y)\,dx$$

یعنی

$$\varphi'(y) = \int_a^b f_y(x, y)\,dx.$$

نوٹ: یہ ہو سکتا ہے کہ طالب علم (1) میں $\Delta y \to 0$ کی صورت میں انتہائیں لے کر نتیجہ نکالنا چاہیں۔ لیکن غور کرنے کی بات ہے کہ اس طرح ہم انتہا کے وجود کو مان لینے کے علاوہ، اصل مشکل اور دلچسپی کی بات نظر انداز کر دیتے ہیں۔

اس طرح (1) میں $\Delta y \to 0$ ہونے پر انتہائیں لینے پر ہم پاتے ہیں

$$\varphi'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \int_a^b f_y(x, y+\theta\,\Delta y)\,dx$$

---

* یہ یکساں تسلسل (uniform continuity) کا نتیجہ ہے۔ ثبوت اس کتاب کے معیار کے باہر ہے۔

† معین تکملہ کے رقبے کے مفہوم سے بہ آسانی دیکھ سکتے ہیں کہ اگر $|f(x)| < k$ ہو تو

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| < k(b-a)$$

اور اگر اب ہم لکھیں

$$\lim_{\Delta y \to 0} \int_a^b f_y\,(x, y+\theta\,\Delta y)\,dx$$

$$= \int_a^b \lim_{\Delta y \to 0} f_y(x, y+\theta\,\Delta y)\,dx$$

$$= \int_a^b f_y(x, y)\,dx$$

تو ہم یہ مان کر ایسا کر رہے ہیں کہ تکملہ کی انتہا، انتہا کے تکملہ کے برابر ہے۔ یعنی انتہا اور تکملہ کے عمل باہم بدل سکتے ہیں۔ دراصل جو ثبوت دیا گیا ہے وہ یہ مان لینے کی توجیہہ (justification) دیتا ہے۔

A·8 ۔ وہ صورت جب کہ تکملی حدیں متغیر ہوں (variable limits of integration)

$$\varphi(y) = \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\,dx,$$

پر غور کیجیے جہاں کہ تکمل کی حدیں $g(y)$ اور $h(y)$ خود ہی y کے تفاعل ہیں۔

ہم مان لیتے ہیں کہ بلحاظ y، $g(y)$ اور $h(y)$ کے پہلے رتبے کے تفرقی سروں کا وجود ہے اور یہ ثابت کریں گے کہ

$$\varphi'(y) = \int_{g(y)}^{h(y)} f_y(x, y)\,dx + h'(y)\,f\,[h(y), y] - g'(y)\,f\,[g(y), y].$$

لیما (Lemma) : اب ہمیں ذیل نتیجہ کی ضرورت ہوگی جسے تکملی احصا کا اوسط قیمت مسئلہ (Mean value theorem of the Integral Calculus) کہتے ہیں۔

اگر $f(x)$ وقفہ $[a, b]$ میں مسلسل ہو تو a اور b کے درمیان ایسے نمبر ξ کا وجود ہوگا کہ

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi)$$

معین تکملہ کے رقبے والے مفہوم اور اس کے انتہائے مجموعہ کی انتہا والے مفہوم سے بھی یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

جہاں m اور M وقفہ $[a, b]$ میں $f(x)$ کی اعلیٰ ترین (greatest values) اور کمترین (least) قیمتیں ہیں۔ اس طرح m اور M کے درمیان ایسے نمبر k کا وجود ہوگا کہ

$$\int_a^b f(x) = k\,(b-a)$$

چونکہ کوئی بھی مسلسل تفاعل اپنی اعلیٰ ترین اور کم ترین قیمتوں کے درمیان کی ہر قیمت لیتا ہے، اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایسے نمبر ξ کا وجود ہوگا کہ $k = f(\xi)$ لہٰذا

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi)$$

اب ہم مسئلہ ثابت کریں گے

ہم پاتے ہیں

$$\varphi(y) = \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\,dx,$$

$$\varphi(y+\Delta y) = \int_{g(y+\Delta y)}^{h(y+\Delta y)} f(x, y+\Delta y)\,dx$$

$$= \int_{g(y+\Delta y)}^{g(y)} f(x, y+\Delta y)dx + \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y+\Delta y)dx$$

$$+ \int_{h(y)}^{h(y+\Delta y)} f(x, y+\Delta y)\,dx.$$

$$\therefore\ \varphi(y+\Delta y)-\varphi(y) = \int_{g(y)}^{h(y)} [f(x, y+\Delta y)-f(x, y)]dx$$

$$+\int_{h(y)}^{h(y+\Delta y)} f(x, y+\Delta y)dx - \int_{g(y)}^{g(y+\Delta y)} f(x, y+\Delta y)dx$$

اب تکملی احصا کے اوسط قیمت مسئلہ سے

$$\int_{h(y)}^{h(y+\Delta y)} f(x, y+\Delta y)dx = [h(y+\Delta y)-h(y)]f(\xi, y+\Delta y)$$

اور

$$\int_{g(y)}^{g(y+\Delta y)} f(x, y+\Delta y)\, dx = [g(y+\Delta y)-g(y)]\, f(\eta, y+\Delta y)$$

جہاں کہ ξ ایسا نمبر ہے جو $h(y)$ اور $h(y+\Delta y)$ کے درمیان ہے اور η ایسا نمبر ہے جو $g(y)$ اور $g(y+\Delta y)$ کے درمیان ہے۔

$$\therefore\ \varphi(y+\Delta y)-\varphi(y) = \int_{g(y)}^{h(y)} \Delta y\, f_y(x, y+\theta\Delta y)dx$$

$$+[h(y+\Delta y)-h(y)]f(\xi, y+\Delta y)-[g(y+\Delta y)-g(y)]f(\eta, y+\Delta y).$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y} = \int_{g(y)}^{h(y)} f_y(x, y+\theta\Delta y)dx$$

$$+\frac{h(y+\Delta y)-h(y)}{\Delta y}f(\xi, y+\Delta y)$$

$$-\frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta y}f(\eta, y+\Delta y) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

اب § A·7 کی طرح سے

$$\lim_{\Delta y\to 0}\int_{g(y)}^{h(y)} f_y(x, y+\theta\,\Delta y)\, dx = \int_{g(y)}^{h(y)} f_y(x, y)\, dx.$$

اس لیے جب $\Delta y \to 0$ ہو تو (1) میں انتہائیں لینے پر ہم پاتے ہیں

$$\varphi'(y) = \int_{g(y)}^{h(y)} f_y(x, y)dx+h'(y)\, f\,[h(y), y] = g'(y)\, f\,[g(y), y]$$

A·9 غیر واجب تکملوں کے لیے تکملی علامت کے تحت تفرق

اوپر جو نتائج حاصل کیے گئے ہیں اُن کا استعمال غیر واجب تکملوں کے لیے نہیں کیا جا سکتا۔ اس سلسلے میں مزید جانچ کی ضرورت ہے کہ یہ نتائج غیر واجب تکملوں کے لیے بھی

صحیح ہیں یا نہیں۔ لیکن یہ بات اِس کتاب کے معیار کے باہر ہے۔ آگے جب بھی کسی غیر واجب تکملہ سے سابقہ ہوگا تو یہ مان لیں گے کہ اِن نتائج کے بجا ہونے کی ضروری شرائط پوری ہو رہی ہیں۔

مشقیں

1 حاصل کیجیے

$$\int_0^{\pi/2} \log(\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta)\,d\theta, \quad (\alpha>0,\beta>0)$$

$$\varphi(\alpha,\beta)=\int_0^{\pi/2}\log(\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$\therefore\ \varphi_\alpha(\alpha,\beta)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\theta}{\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$(1)\ \cdots\cdots\cdots\ =\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\alpha+\beta\tan^2\theta}$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(\alpha+\beta^2 t)}$$

($t=\tan\theta$ رکھنے پر)

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{\beta}{\alpha+\beta t^2}\right)dt \qquad (\text{اگر } \alpha\neq\beta)$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left|\tan^{-1}t-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}\tan^{-1}\sqrt{\beta}\,t\right|_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{\pi}{2}-\sqrt{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}\frac{\pi}{2}\right]=\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}$$

اگر $\alpha=\beta$ ہو تو (1) سے ہم پاتے ہیں

$$\varphi_\alpha(\alpha,\beta)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\theta}{\alpha}\,d\theta=\frac{\pi}{4\alpha}$$

اِس سے ثابت ہوتا ہے کہ ہمیشہ

$$\varphi_\alpha(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}$$

اب α کی نسبت سے تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\varphi(\alpha, \beta) = \pi \log(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})+c \qquad \ldots\ldots (2)$$

جہاں کہ c، α پر منحصر نہیں ہے۔

ساتھ ہی ہم پاتے ہیں

$$\varphi(\alpha, \beta) = \int_0^{\pi/2} \log(\alpha \cos^2\theta+\beta \sin^2\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log\left[\alpha \cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\beta \sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right] d\theta$$

(دیکھیے § 4·92)

$$= \int_0^{\pi/2} \log(\alpha \sin^2\theta+\beta \cos^2\theta)\, d\theta = \varphi(\beta, \alpha) \qquad \ldots\ldots (3)$$

چونکہ $\varphi(\alpha, \beta) = \varphi(\beta, \alpha)$ اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ (2) میں c، β پر منحصر نہیں ہے۔
لہٰذا c ایک مطلق مستقل (absolute constant) ہے۔

اب

$$\varphi(1, 1) = \int_0^{\pi/2} \log(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\, dx = 0$$

پھر (2) میں $\alpha = \beta = 1$ رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$0 = \varphi(1, 1) = \pi \log 2+c$$

یعنی

$$c = -\pi \log 2$$

$$\varphi(\alpha, \beta) = \pi \log(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})-\pi \log 2$$

$$= \pi \log\left[\tfrac{1}{2}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\right].$$

2. حاصل کیجیے

$$\int_0^a \frac{\log(1+ax)}{1+x^2}\, dx$$

اور ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{8} \log 2$$

ہم لکھتے ہیں

$$(1) \cdots\cdots\cdots \quad \varphi(a) = \int_0^a \frac{\log(1+ax)}{1+x^2}dx.$$

$$\therefore \quad \varphi'(a) = \int_0^a \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\log(1+ax)}{1+x^2}\right)dx + 1.\frac{\log(1+a^2)}{1+a^2}$$

$$= \int_0^a \frac{x}{(1+ax)(1+x^2)}dx + \frac{\log(1+a^2)}{1+a}$$

جزوی کسروں میں توڑنے پر ہم پاتے ہیں

$$\frac{x}{(1+ax)(1+x^2)} = -\frac{a}{(1+a^2)(1+ax)} + \frac{x+a}{(1+a^2)(1+x^2)}.$$

$$\therefore \int_0^a \frac{x}{(1+ax)(1+x^2)}dx = -\frac{1}{1+a^2}\Big|\log(1+ax)\Big|_0^a$$

$$+\Big|\frac{1}{2(1+a^2)}\log(1+x^2)\Big|_0^a + \Big|\frac{a\tan^{-1}x}{1+a^2}\Big|_0^a$$

$$= -\frac{1}{2(1+a^2)}\log(1+a^2) + \frac{a}{1+a^2}\tan^{-1}a$$

$$\therefore \quad \varphi'(a) = \frac{1}{2(1+a^2)}\log(1+a^2) + \frac{a}{1+a^2}\tan^{-1}a.$$

اب تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\varphi(a) = \frac{1}{2}\left[\int\frac{1}{1+a^2}\log(1+a^2)\,da + \int\frac{a}{1+a^2}\tan^{-1}a\,da\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}a\log(1+a^2) - \int\frac{2a}{1+a^2}\tan^{-1}a\,da\right]$$

$$+\int\frac{a}{1+a^2}\tan^{-1}a\,da + c,$$

جہاں کہ داہنی طرف کے پہلے تکملہ پر حصہ سے تکمل کا اصول لگایا گیا ہے اور c اختیاری مستقل ہے۔

اس طرح

$$(2) \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \varphi(a) = \tfrac{1}{2}\tan^{-1}a\log(1+a^2) + c$$

اب (1) سے ہم دیکھتے ہیں کہ $\varphi(0) = 0$. پھر (2) میں $a = 0$ رکھنے پر $c=0$ ملتا

ہے۔ اِس لیے

$$\varphi(a) = \tfrac{1}{2}\tan^{-1} a \log(1+a^2)$$

اِس میں $a = 1$ رکھنے پر

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx = \varphi(1) = \tfrac{1}{2}\tan^{-1} 1 \log 2 = \frac{\pi}{8}\log 2.$$

3۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^\infty \frac{\tan^{-1} ax}{x(1+x^2)}dx = \frac{\pi}{2}\log(1+a) \quad (a \geqslant 0 \text{ اگر})$$

اور $a < 0$ ہونے پر اِس تکملہ کی قیمت نکالیے۔

ہم لکھتے ہیں

$$(1) \cdots\cdots \quad \varphi(a) = \int_0^\infty \frac{\tan^{-1} ax}{x(1+x^2)}dx.$$

تکملی علامت کے تحت تفرق کو سمجھتے ہوئے ہم پاتے ہیں

$$\varphi'(a) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+a^2x^2)}dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{1-a^2}\left[\frac{1}{1+x^2} - \frac{a^2}{1+a^2x^2}\right]dx$$

$$= \frac{1}{1-a^2}\Big|\tan^{-1} x - a\tan^{-1} ax\Big|_0^\infty$$

$$(2) \cdots\cdots \quad = \frac{1}{1-a^2}\left(\frac{\pi}{2} - a\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2(1+a)}$$

یہاں a مثبت ہونے پر ہم پاتے ہیں

$$\lim_{x\to\infty}(\tan^{-1} ax) = \frac{\pi}{2}$$

یہ بہ آسانی دیکھ سکتے ہیں کہ (2) اُس وقت بھی صحیح ہے جب کہ $a = 0$ ہو۔

اب (2) کا بلحاظ a تکمل کرکے ہم پاتے ہیں

$$(3) \cdots\cdots \quad \varphi(a) = \frac{\pi}{2}\log(1+a) + c$$

جہاں c اختیاری مستقل ہے۔
ساتھ ہی (1) سے

$$\varphi(0) = 0$$

اس طرح (3) میں $a = 0$ رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$c = 0$$

$$\therefore \quad \varphi(a) = \tfrac{1}{2}\pi \log(1+a)$$

اب مان لیجیے کہ a منفی ہے۔ ہم پاتے ہیں

$$\varphi'(a) = \frac{1}{1-a^2}\Big|\tan^{-1} x - a\tan^{-1} ax\Big|_0^\infty$$

$$(4) \quad \ldots\ldots = \frac{1}{1-a^2}\left[\frac{\pi}{2} - a\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2(1-a)}$$

کیونکہ a منفی ہے، اس لیے

$$\lim_{x\to\infty} (\tan^{-1} ax) = -\tfrac{\pi}{2}$$

اب (4) کا تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\varphi(a) = -\frac{\pi}{2}\log(1-a) + c.$$

پہلے کی طرح یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ $c = 0$ ہے۔ لہٰذا ہم پاتے ہیں

$$\varphi(a) = -\frac{\pi}{2}\log(1-a)$$

4۔ حاصل کیجیے

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin \beta x}{x}\,dx, \quad (\alpha \geqslant 0 \text{ جہاں})$$

اور یہ نتیجہ نکالیے کہ

$$\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x}\,dx = \begin{cases} \tfrac{\pi}{2} & (\beta > 0 \text{ اگر}) \\ 0 & (\beta = 0 \text{ اگر}) \\ -\tfrac{\pi}{2} & (\beta < 0 \text{ اگر}) \end{cases}$$

ہم لکھتے ہیں

$$\varphi(\alpha,\beta)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

تکملی علامت کے تحت تفرق کو بجا سمجھتے ہوئے بلحاظ β تفرق کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\varphi_\beta(\alpha,\beta)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$ (اگر $\alpha>0$ دیکھیے مثال 2 §2.7)

اب بلحاظ β تکمل کرنے پر ملتا ہے۔

$$\varphi(\alpha,\beta)=\tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}+c \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

جہاں c کوئی مستقل ہے۔ اب (1) سے ہم پاتے ہیں

$$\varphi(\alpha,0)=C \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

اور (2) میں $\beta=0$ رکھنے پر $c=0$ ملتا ہے۔ لہذا

$$\varphi(\alpha,\beta)=\tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

جہاں کہ $\alpha>0$.

ساتھ ہی ہم مان لیتے ہیں کہ $\varphi(\alpha,\beta)$, α کا مسلسل تفاعل ہے اگر $0\le\alpha$ ہو۔
(1) سے ہم پاتے ہیں

$$\varphi(0,\beta)=\int_0^\infty\frac{\sin\beta x}{x}\,dx,$$

اور (4) سے ملتا ہے

$$\lim_{\alpha\to 0}\varphi(0,\beta)=\lim_{\alpha\to 0}\left(\tan^{-1}\frac{\beta}{c}\right)=\begin{cases}\pi/2, & (\text{اگر } \beta>0)\\ 0, & (\text{اگر } \beta=0)\\ -\pi/2, & (\text{اگر } \beta<0)\end{cases}$$

ساتھ ہی تسلسل (continuity) کی وجہ سے

$$\lim_{\alpha \to 0} \varphi(\alpha, \beta) = \varphi(0, \beta)$$

$$\therefore \quad \int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x}\, dx = \begin{cases} \pi/2 & (\beta > 0 \text{ اگر}) \\ 0 & (\beta = 0 \text{ اگر}) \\ -\pi/2 & (\beta < 0 \text{ اگر}) \end{cases}$$

خاص کر ہم پاتے ہیں

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

5۔ تکملی علامت کے تحت تفرق کو بجا مان کر ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos \alpha x\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{1}{4}\alpha^2}$$

ہم لکھتے ہیں

$$(1) \ \ldots\ldots\ldots\ \varphi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos \alpha x\, dx.$$

$$\therefore \quad \varphi'(\alpha) = -\int_0^\infty x e^{-x^2} \sin \alpha x\, dx$$

حصہ سے تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\varphi'(\alpha) = \left| \tfrac{1}{2} e^{-x^2} \sin \alpha x \right|_0^\infty - \frac{\alpha}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} \cos \alpha x\, dx$$

$$= 0 - \frac{\alpha}{2}\varphi(\alpha) = \frac{-\alpha}{2}\varphi(\alpha),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = -\frac{\alpha}{2}$$

تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں۔

$$(2) \ \ldots\ldots\ \log \varphi(\alpha) = -\tfrac{1}{4}\alpha^2 + c_1 \Rightarrow \varphi(\alpha) = c e^{-\frac{1}{4}\alpha^2}$$

اب (1) میں $\alpha = 0$ رکھنے پر ہم پاتے ہیں۔

$$\varphi(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

(§ A·6 کا ضمنی نتیجہ 2 دیکھیے)

اب (2) میں $\alpha = 0$ رکھنے پر $\varphi(0) = c$، اس لیے

$$\varphi(\alpha) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-2\alpha^2}$$

6۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}\alpha x \tan^{-1}\beta x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\log\left[\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha \beta^\beta}\right]$$

ہم لکھتے ہیں

$$\varphi(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{\tan^{-1}\alpha x \tan^{-1}\beta x}{x^2}\,dx \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

تکملی علامت کے تحت تفرق کو بجا مانتے ہوئے، ہم پاتے ہیں

$$\varphi_\alpha(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{\tan^{-1}\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}\,dx. \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\varphi_{\beta\alpha}(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+\beta^2x^2)(1+\alpha^2x^2)}\,dx$$

$$= \frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\int_0^\infty \left(\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2x^2} - \frac{\beta^2}{1+\beta^2x^2}\right)dx,$$

(اگر $\alpha \neq \beta$)

$$= \frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\Big|\alpha\tan^{-1}\alpha x - \beta\tan^{-1}\beta x\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{\pi}{2(\alpha+\beta)} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

جہاں α, β مثبت مانے گئے ہیں۔

یہ آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ نتیجہ (3) تب بھی صحیح رہتا ہے جب کہ $\alpha = \beta$ ہو۔

اب بلحاظ β (3) کا تکمل کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\varphi_\alpha(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2}\log(\alpha+\beta) + f(\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

جہاں $f(\alpha)$ ، α کا اختیاری تفاعل ہے۔
اب (2) سے

$$\varphi_\alpha(\alpha, 0) = 0 \qquad \ldots\ldots (5)$$

پھر (4) اور (5) سے ہم پاتے ہیں

$$0 = \frac{\pi}{2} \log \alpha + f(\alpha),$$

$$\Rightarrow \quad f(\alpha) = -\frac{\pi}{2} \log \alpha.$$

$$\varphi_\alpha(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2} \log(\alpha+\beta) - \frac{\pi}{2} \log \alpha \qquad \ldots\ldots (6)$$

اسی طرح ہمیں مل سکتا ہے

$$\varphi_\beta(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2} \log(\alpha+\beta) - \frac{\pi}{2} \log \beta \qquad \ldots\ldots (7)$$

اب بلحاظ α ، (6) کا تکمل کرنے پر، ہم پاتے ہیں

$$\varphi(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2}[(\alpha+\beta)\log(\alpha+\beta) - (\alpha+\beta)] - \frac{\pi}{2}(\alpha \log \alpha - \alpha) + g(\beta) \qquad \ldots (8)$$

جہاں کہ $g(\beta)$ ، β کا کوئی اختیاری تفاعل ہے۔
(8) سے ہم پاتے ہیں

$$\varphi_\beta(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2} \log(\alpha+\beta) + g'(\beta) \qquad \ldots\ldots (9)$$

پھر (7) اور (9) سے ملتا ہے

$$g'(\beta) = -\frac{\pi}{2} \log \beta$$

$$\therefore \quad g(\beta) = -\frac{\pi}{2}[\beta \log \beta - \beta] + c \qquad \ldots\ldots (10)$$

اب (8) اور (1) سے

$$0 = \varphi(\alpha, 0) = g(0) \qquad \ldots\ldots (11)$$

پھر (10) اور (11) سے ہمیں $c = 0$ ملتا ہے، اس لیے

$$\varphi(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2}[(\alpha+\beta)\log(\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)]$$
$$-\frac{\pi}{2}(\alpha\log\alpha-\alpha)-\frac{\pi}{2}(\beta\log\beta-\beta)$$
$$=\frac{\pi}{2}[(\alpha+\beta)\log(\alpha+\beta)-\alpha\log\alpha-\beta\log\beta]$$
$$=\frac{\pi}{2}\log\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^{\alpha}\,\beta^{\beta}}$$

مشقیں

(ذیل کے غیر واجب تکملوں کے لیے تکملی علامت کے تحت تفرق کو بجا مان سکتے ہیں)

1۔ تکملہ

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{a+b\cos x},\qquad a>0,\ |b|<a.$$

کی قیمت حاصل کیجیے اور یہ نتیجہ نکالیے کہ

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{(a+b\cos x)^2}=\frac{\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$$ اور $$\int_0^{\pi}\frac{\cos x\,dx}{(a+b\cos x)^2}=-\frac{\pi b}{(a^2-b^2)^{3/2}}$$

2۔ نتائج

$$\int_0^{\infty}e^{-ax}dx=\frac{1}{a},\ a>0,\quad \int_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1},\ n>-1$$

سے شروع کرکے یہ نتائج نکالیے کہ

$$\int_0^{\infty}x^m e^{-ax}\,dx=\frac{m!}{a^{m+1}},\quad \int_0^1 x^n(\log x)^m\,dx=\frac{(-1)^m\,m!}{(n+1)^{m+1}}$$

جہاں m کوئی مثبت کامل عدد ہے۔

3۔ کسی مناسب تکملہ سے شروع کرکے ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{x}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}$$

4۔ تکملی علامت کے تحت تکملوں

$$\int_0^{\infty}e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},\quad \int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}};\ a>0.$$

کا تفرق کر کے ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n a^{n+\frac{1}{2}}}.$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n\, n!\, a^{n+\frac{1}{2}}}.$$

5. ثابت کیجیے کہ اگر $y > 0$ ہو تو

$$\int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} y.$$

6. اگر $|a| \leqslant 1$ تو ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^\pi \log(1+a\cos x)dx = \pi \log\left[\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{(1-a^2)}\right].$$

7. اگر $|a| < 1$ ہو تو ثابت کیجیے کہ

(i) $$\int_0^\pi \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\, dx = \pi \sin^{-1} a.$$

(ii) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\log(1+\cos\alpha \cos x)}{\cos x}\, dx = \frac{\pi^2-4\alpha^2}{8}$$

8. اگر $x^2 \leqslant 1$ ہو تو ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^{\pi/2} \log(1-x^2\cos^2\theta)d\theta = \pi \log\{1+\sqrt{(1-x^2)}\} - \pi \log 2$$

9. حاصل کیجیے

$$\int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{a+b\sin\theta}{a-b\sin\theta}\right) \operatorname{cosec}\theta\, d\theta. \quad (a > b)$$

10. حاصل کیجیے :-

$$I(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{\log(1+y\sin^2 x)}{\sin^2 x}\, dx$$

یہ دکھا کر کہ

$$I'(y) = \frac{\pi}{2\sqrt{(1+y)}}.$$

11۔ ثابت کیجیے کہ

$$y = \frac{1}{k}\int_0^x f(t)\sin k(x-t)\,dt$$

تفرقی مساوات

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = f(x)$$

کو مطمئن کرتا ہے، جہاں k کوئی مستقل ہے۔

12۔ مان لیجیے کہ

$$u = \int_0^\infty e^{-x\cos\theta} x^{n-1}\sin(x\sin\theta)\,dx,$$

$$v = \int_0^\infty e^{-x\cos\theta} x^{n-1}\cos(x\sin\theta)\,dx.$$

یہ ثابت کیجیے کہ

$$\frac{du}{d\theta} = -nv, \frac{dv}{d\theta} = nu$$

اور

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + n^2u = \theta, \frac{d^2v}{d\theta^2} + n^2v = \theta$$

یہ نتیجہ نکالیے کہ

$$u = \Gamma(n)\ \text{ccs}\ n\theta,\ v = \Gamma(n)\sin n\theta$$

13۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{m-1}\cos bx\,dx = \frac{\Gamma(m)\cos m\theta}{r^m}$$

جہاں کہ $\theta = \tan^{-1}(a/b)$ اور $r^2 = a^2+b^2$.

14۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$$

15۔ ثابت کیجیے کہ

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^{-1}(\cos\alpha\,\text{cosec}\,\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{2}(1-\cos\alpha).$$

16۔ پہلے رتبے والی وہ تفرقی مساوات حاصل کیجیے جس کو

$$\varphi(y) = \int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2yx \, dx$$

مطمئن کرے۔ یہ بھی ثابت کیجیے کہ

$$\varphi(y) = \int_0^y e^{x^2-y^2} \, dx$$

جوابات

9. $\pi \sin^{-1}(b/a)$. 10. $\pi[\sqrt{(1+y)}-1]$. 16. $\dfrac{d\varphi}{dy} + 2y\,\varphi(y) = 1$

لغت

(انگریزی سے اُردو)

A

About	گرد
Abscissa	فصلہ
Absolute value	مطلق قیمت
According as	بموجب اس کے کہ
Algebraic	جبری
Analytical proof	تحلیلی ثبوت
Angle	زاویہ
Anti-clockwise	خلافِ ساعت وار
Appendix	ضمیمہ
Applications	استعمال
Approximation	تخمینہ
Approximately	تخمیناً
Approximate value	تخمینی قیمت
Arbitrary	اختیاری
Arbitrary Constant	اختیاری مستقل
Arbitrary system	اختیاری نظام
Arc	قوس
Arch	محراب
Area	رقبہ
Area function	رقبہ تفاعل
Ascending	صعودی
Assigned value	مقررہ قیمت
Assumption	مفروضہ
Astroid	ایسٹرائڈ
Asymptote	لامتناہی مماس
Author	مصنف
Auxiliary Circle	معاون دائرہ
Axes	محاور
Axiom	بدیہہ
Axis	محور

B

Base	قاعدہ
Binomial theorem	دو رکنی مسئلہ

Bisecting radius	تنصیفی نصف قطر
Bounded above	اوپر سے محدود
Branches	شاخیں
By trial	طریقۂ آزمائش سے

C

Calculate	حاصل کرنا
Cartesian	کارتیزی
Cases	صورتیں
Catenary	زنجیرہ
Centre	مرکز
Centre of gravity	مرکز ثقل
Centre of Inertia	مرکز جمود
Centroid	مرکز وسطانی
Change	تبدیلی
Chord	وتر
Circle	دائرہ
Circular base	دائری قاعدہ
Circular sector	دائری قطع
Circular dise	دائری ٹکیہ
Circumference	محیط
Cissoid	سیسائڈ
Class	قسم
Clock-wise	ساعت وار
osed Curve	بند منحنی
Co-axial	ہم محور
Coefficient	سر، ضربیہ
Coincide	منطبق ہونا
Collinear	ہم خط
Combination	مرکب
Common	مشترک
Common ratio	مشترک تناسب
Common tangent	مشترک مماس
Compare	موازنہ کرنا
Comparison	موازنہ
Comparison integrab	موازنی تکملے
Comparison test	موازنی جانچ
Complementary **Integrals**	تمامی تفاعل
Complete integral	کامل تکملہ
Concentric	ہم مرکز
Conditions	شرائط
Cone	مخروط

Confocal	ہم ماسکی
Conic	مخروطی
Conjugate	زوجی
Conjugate imaginary	زوجی خیالی
Constant	مستقل
Constant of integration	تکملی مستقل
Contact	تماس
Continuity	تسلسل
Continuous	مسلسل
Continuous distribution	مسلسل تقسیم
Convention	رواج
Convergence	تقارب
Convergent	متقارب
Co-ordinates	مختصات
Co-ordinate axes	مختص محاور
Corresponding	مطابق
Corolary	ضمنی نتیجہ
Current Co-ordinates	حالیہ مختصات
Curve	منحنی
Curved Surface	سطح خمیدہ
Cycloid	سائیکلائڈ
Cylinder	اسطوانہ

D

Decompose	اجزا کرنا
Deduce	نتیجہ نکالنا
Definition	تعریف
Definite integral	معین تکملہ
Degree	ڈگری، درجہ
Denominator	نسب نما
Denote	ظاہر کرنا
Dependent	تابع۔ منحصر
Density	کثافت
Derivative	مشتق
Describe	طے ہونا
Determine	حاصل کرنا
Developed	تدریجی
Diagonal	وتر
Diameter	قطر
Differentiable	قابل تفرق

Differential Coefficient	تفرقی سر
Differential Calculus	تفرقی احصا
Differential equation	تفرقی مساوات
Differentiate	تفرق کرنا
Differentiation	تفرق
Digit	ہندسہ
Disc	ٹکیہ
Discontinuous	غیر مسلسل
Discontinuity	غیر تسلسل
Discrete	جدا جدا
Discussion	مباحثہ
Distribution	تقسیم
Double	دُہرا
Double tangent	دُہرا مماس
Duplication formula	مثنّی فارمولا

E

Eccentricity	خروج المرکز
Elementary integral	ابتدائی تکملہ
Eliminant	اسقاطی
Eliminate	اسقاط
Ellypse	علیپس
Ellyptic function	علیپسی تفاعل
Employ	استعمال کرنا
Envelope	لفافت
Equality	تساوی
Equation	مساوات
Equations	مساواتیں
Equiangular spiral	مساوی زاویہ کمانی
Even	جفت
Evolute	برپیچہ
Exact	راست
Exercises	مشقیں
Exist	وجود ہونا
Expansion	کھولنے پر
Exponential function	قوتی تفاعل
Extension	توسیع

F

Fact	حقیقت

Family of Curves	قبیلۂ منحنی
Finite	متناہی
Fixed ordinate	ثابت عرض
Fixed point	ثابت نقطہ
Focal chord	ماسکی وتر
Focus	ماسکہ
Folium	فولیم
Form	شکل
Formula	فارمولا
Four-leaved rose	چارپتیہ گلاب
Fraction	کسر
Fractional	کسری
Frustum	فرسٹم
Function	تفاعل
Fundamental	بنیادی

G

General form	عام شکل
General integral	عام تکملہ
General Solution	عام حل
Generalization	توسیع
Generalized	توسیع شدہ
Generator	مولد
Geometrical interpretation	جیومٹریائی مفہوم
Graph	گراف
Gravitation	کشش

H

Hemisphere	نصف کرہ
Highest	بالاترین
Hint	اشارہ
Homogeneous function	ہم جنس تفاعل
Homogeneous equation	ہم جنس مساوات
Hyperbola	زائد
Hyperbolic spiral	زائدی کمانی

I

Image	عکس
Imaginary	خیالی
Imply	مراد رکھنا (تب)
Improper	غیر واجب
Increment	اضافہ
Infinite-valuedness	قیمت کا عدم تعین

Indefinite	غیر معین
Indefinite integral	غیر معین تکملہ
Independent	غیر تابع
Independent variable	غیر تابع متغیر
Interminate	غیر حاصلی
Index	قوت
Induction	استقرا
Inequality	غیر تساوی
Inequality sign	علامت غیر تساوی
Infinite	لامتناہی
Infinite series	لامتناہی سلسلہ
Infinitismal	صغاری
Infinity	لامتناہی
Initial line	ابتدائی خط
Integer	کامل عدد
Integrable	قابل تکمل
Integrand	متکاملیہ
Integral	تکملہ
Integral Calculus	تکملی احصا
Integral curve	تکملی منحنی
Integral powers	کامل عددوقتیں
Integrate	تکمل کرنا
Integration	تکمل
Integration by parts	حصہ سے تکمل
Integration by substitution	عوضی سے تکمل،
Integration by successive reduction	متواتر تحلیل سے تکمل
Integrating factor	تکملی جزو
Interpretation	مفہوم
Intrivisic equation	نجی مساوات
Intrinsic co-ordinates	نجی مختصات
Introduction	تمہید
Irrational	غیر ناطق
Intuitively	وجدانی طور پر
Invariant	لامتغیر
Inverse	معکوس

Inverse function	معکوس تفاعل
Inverse operator	معکوس عامل
Inverse ratio	معکوس نسبت
Inverse trigonometric function	معکوس مثلثاتی تفاعل

J

Jointly	اشتراک سے
Justification	توجیہہ

L

Lamina	مادی چادر
Latus rectum	وتر خاص
Left hand side	بائیں جانب
Legitimate conclusion	درست نتیجہ
Lemma	لیما
Lemmiscate	لیمنسکیٹ
Length of an arc	قوس کی لمبائی
Lesser indices	کمتر قوتیں
Limit	انتہا
Limit of a sum	انتہائے مجموعہ
Limiting value	انتہائی عمل
Line	خط
Lines	خطوط
Linear	خطی
Linear Combination	خطی ترکیب
Linear differential equation	خطی تفرقی مساوات
Linear equations	خطی مساواتیں
Locus	طریق
Logarithm	لوگارتھم
Logical justification	منطقی توجیہہ
Loop	لُوپ
Lomer limit	زیریں انتہا

M

Major axis	محور اکبر
Mass	مقدار

Mathematical induction	حسابی استقرا	Numerical	تعدادی
Maximum	اعظم	Numerically	تعدادی حیثیت سے
Mean proportional	اوسط نسبتی	n^{th} power	n ویں قوت
Mean value theorem	اوسط قیمت مسئلہ	n^{th} root	n واں ریشہ
Mechanics	میکینکی	**O**	
Mid point	وسطی نقطہ	Odd	طاق
Minimum	اقل (کمترین)	Operand	مستعمل
Minor axis	محور اصغر	Operator	عامل
Misceleneous	متفرق	Opposite	بالمقابل، مخالف
Moment of Inertia	جمود کا معیار اثر	Order	رتبہ
Monotonically decreasing	یک کیفی نزولی	Ordinate	عرض
Monotonically increasing	یک کیفی صعودی	Origin	مبدا
N		Orthogonal	عمودی
Negative	نفی (منفی)	Orthogonal trajectory	عمودی مستدیر
Non-convergent	غیر متقارب	**P**	
Normal	عماد	Parabola	مکافی
Notations	علامتیں	Parallel	متوازی
Numerator	شمار کنندہ	Parameter	پیرامیٹر
		Parametric equation	پیرامیٹری مساوات
		Pairwise	جوڑے دار
		Partial	جزوی

Partial fraction	جزوی کسر
Particle	ذرّہ
Particular solution	مخصوص حل
Particular integral	تکملۂ خاص
Pedal	پیڈل
Perfect square	مربع کامل
Perimeter	محیط
Permutation	ترتیب
Perpendicular	عمود
Plane	ہموار
Plane region	ہموار خطہ
Plane surface	ہموار سطح
Point of contact	نقطۂ تماس
Points of division	نقاط تقسیم
Point of intersection	نقطۂ تماس
Polar co-ordinates	قطبی مختصات
Polar equation	قطبی مساوات
Polar sub-tangent	قطبی تحت مماس
Polar sub-normal	قطبی تحت عماد
Pole	قطب
Polygon	کثیر ضلعی
Polynomial	کثیر رکنی
Position	مقام
Positive	مثبت
Power	قوت
Primitive	آبائی
Process	عمل
Product	حاصل ضرب
Property	خصوصیت
Properties	خصوصیات
Proportion	تناسب
Proportional	متناسب
Proposition	قول

Q

Quadratic	دو درجی
Quadrant	ربع
Quadrature	تربیع
Quantity	مقدار

Quotient	خارج قسمت
R	
Radical axis	اصلی محور
Radical sign	علامت جذر
Radius	نصف قطر
Radius vector	نصف قطری سمتی
Rate	شرح
Ratio	نسبت
Rational	ناطق
Rational function	ناطق تفاعل
Real	حقیقی
Real part	حقیقی حصہ
Real roots	حقیقی ریشے
Reciprocal	مقلوب
Rectangle	مستطیل
Rectangular axes	قائم محاور
Rectangular hyperbola	قائم زائد
Rectification	قوسی اصلاح
Reduction	تحویل
Reduction formula	تحویلی فارمولا
Region	خطہ
Region cf integration	خطۂ تکمل
Relation	رشتہ ، رابطہ
Remainder	باقی
Represent	ظاہر کرنا
Result	نتیجہ
Reverse	اُلٹ جانا
Revolution	گردش
Right Circular cylinder	قائم دائری اسطوانہ
Right circular cone	قائم دائری مخروط
Rigid bodies	کرٹے مجسمے (ٹھوس)
Rigid material system	کرٹے مادی نظام
Rod	چھڑ
Roots	ریشے
S	
Section	باب
Sectorial-area	رقبہ قطع
Segment	قطع
Semi-axes	نصف محاور

Semi-cubic نصف کعبی
Semi-cubical parabola نصف کعبی مکافی
Semi-vertical angle نصف راسی زاویہ
Separable علیحدہ پذیر
Series سلسلہ
Single-valued واحد قیمتی
Sign علامت
Sign of integral علامت تکمل
Singular Solution واحد حل
Simpson s rule سمسن کا اصول
Slant height ترچھی اونچائی
Slope ڈھال
Smallest کمترین
Solid ٹھوس
Solid of revolution گردشی ٹھوس
Solution حل
Solve حل کرنا
Sphere کرہ
Spindle-Shaped تکلی نما

Square مربع
Square root جذر
Squaring مربع لینے پر
Standard forms معیاری شکلیں
Standard results معیاری نتائج
Step قدم
Steps اقدام
Straight line خط مستقیم
Strophoid اسٹروفائڈ
Study مطالعہ
Sub- normal تحت عماد
Sub- tangent تحت مماس
Substitution عوضی
Successive متواتر
Successive reduction متواتر تحویل
Sufficient test کافی جانچ
Suitable substitution مناسب عوضی
Surd سرڈ
Surface سطح
Symbols علامتیں

Surface of revolution	گردشی سطح
Symmetrical	متشاکل
Symmetry	تشاکل
System	نظام
Systematic	باقاعدہ

T

Table	جدول
Tagent	مماس
Tangential	مماسی
Tend	مائل ہونا
Term	رکن
Terms	ارکان
Terms of	ارقام میں
Theorem	مسئلہ
Theory of equations	نظریۂ مساوات
Three-leaved rose	تین پتیہ گلاب
Trace	ترسیم کرنا
Tractrix	ٹریکٹرکس
Trajectory	مستدیر
Transformation	استحالہ
Transpose	منتقل کرنا
Transposition	منتقلی
Trigonometric	مثلثاتی
Triple	تیہرے

U

Unequal	غیر مساوی
Unequal roots	غیر مساوی ریشے
Uniform	یکساں
Uniform continuity	یکساں تسلسل
Unique	یکتا
Unit	اکائی
Unknown	نامعلوم
Upper limit	اوپری حد

V

Value	قیمت
Variable	متغیر
Variable point	متغیر نقطہ
Variables Separable	علیحدہ پذیر متغیر
Variation	تغیر
Vector	سمتی

Vectorial angle سمتی زاویہ

Vertex راس

Volume حجم

W

Whole number کامل عدد

With respect to بلحاظ

لغت

(اردو سے انگریزی)

ا	
آبائی (ابتدائی)	Primitive
ابتدائی خط	Initial line
اختیاری	Arbitrary
اختیاری مستقل	Arbitrary constant
ارکان	Terms
استعمال	Application
استعمال کرنا	Employ
استقرا	Induction
اسٹروفائڈ	Strophoid
اس کے بموجب کہ	According as
اسقاط	Elimination
اسقاطی	Eliminant
اشارہ	Hint
اشتراک سے	Jointly
اضافہ	Increment
اعلیٰ ترین	Highest(Maximum)
اکائی	Unit
الٹ جانا	Reverse
الگ الگ ہوجانے والے	Separable
امدادی (معاون) دائرہ	Auxiliary circle
انتہا	Limit
انتہائی عمل	Limiting process
احصاء	Calculus
ارقام میں	Terms of
استحالہ	Transformation
اسطوانہ	Cylinder
انتہائی قیمت	Limiting value
اوپری حد	Upper limit
اوپر سے محدود	Bounded above
اوسط نسبتی	Mean proportional
اوسط قیمت مسئلہ	Mean-value theorem
ایسٹرائڈ	Astroid

Analytical proof	تحلیلی ثبوت
Approximately	تخمیناً
Approximate value	تخمینی قیمت
Developed	تدریجی
Section	تراش
Quadrature	تربیع
Slant height	ترچھی اونچائی
Trace	ترسیم کرنا
Continuity	تسلسل
Symmetry	تشاکل
Numerically	تعدادی حیثیت سے
Definition	تعریف
Variation	تغیر
Differentiation	تفرق
Differentiate	تفرق کرنا
Differential Calculus	تفرقی احصاء
Differential Coefficient	تفرقی سر
Differential equation	تفرقی مساوات
Convergence	تقارب

ب

Section	باب (سیکشن)
Opposite	بالمقابل
Remainder	باقی
Evolute	برپیچ
Closed Curve	بند منحنی
Fundamental	بنیادی
Fundamental theorem	بنیادی مسئلہ

پ

Padal	پیڈل
Parameter	پیرامیٹر
Parametric equation	پیرامیٹری مساوات

ت

Dependent	تابع
Dependent Variable	تابع متغیر
Sub-normal	تحت عماد
Sub-tangent	تحت مماس
Reduction	تحویل
Reduction formula	تحویلی فارمولا

ٹ

Tractrix ٹریکٹرکس
Disc ٹکیہ
Solid ٹھوس

ث

Fixed ثابت
Fixed point ثابت نقطہ
Fixed ordinate ثابت عرض
Proof ثبوت

ج

Algebraic جبری
Discrete جدا جدا
Square root جذر
Radical sign علامت جذر
Partial جزوی
Partial fractions جزوی کسریں
Even جفت
Moment of Inertia جمود کا معیار اثر
Pair-wise جوڑے وار
Geometrical interpretation جیومٹریائی مفہوم

Integrand تکاملیہ
Integrate تکمل کرنا
Integration تکمل
Integral تکملہ
Integral Calculus تکملی احصاء
Integrating factor تکملی جزو
Constant of integration تکملی مستقل
Integral Curve تکملی منحنی
Contact تماس
Complementary function تمامی تفاعل
Introduction تمہید
Proportion تناسب
Bisecting radius تنصیفی نصف قطر
Justification توجیہہ
Generalization توسیع
Generalized توسیع شدہ
Three-leaved rose تین پتیہ گلاب
Triple تہرا

Straight line	خط مستقیم
Lines	خطوط
Region	خطہ
Region of integration	خطہ تکمل
Linear	خطی
Linear Combination	خطی مرکب
Linear differential equation	خطی تفرقی مساوات
Linear equations	خطی مساواتیں
Anti - clock wise	خلاف ساعت وار
Curved Surface	خمیدہ سطح
Imaginary	خیالی
Imaginary roots	خیالی ریشے

د

Circle	دائرہ
Circular dise	دائری ٹکیہ
Circular sector	دائری قطع
Circular base	دائری قاعدہ

چ

Fcur-leaved rose	چار پتیہ گلاب
Rod	چھڑی

ح

Product	حاصل ضرب
Current Coordinates	حالیہ محددات
Mathematical induction	حسابی توسیع
Integration by parts	حصہ سے تکمل
Fact	حقیقت
Real	حقیقی
Real roots	حقیقی ریشے
Real part	حقیقی حصہ
Solution	حل
Solve	حل کرنا

ح

Quotient	خارج قسمت
Eccentricity	خروج المرکز
Property	خصوصیت
Line	خط

Hyperbolic	زائدی
Angle	زاویہ
Catenary	زنجیرہ
Conjugate	زوجی
Conjugate imaginary	زوجی خیالی
Iower limit	زیریں حد

س

Cycloid	سائیکلائڈ
Coefficient	سر
Surd	سرڈ
Surface	سطح
Series	سلسلہ
Summation of series	سلسلوں کا جوڑ نکالنا
Clock - wise	ساعت وار
Vector	سمتی
Vectorial angle	سمتیہ زاویہ
Simpson's rule	سمسن کا اصول
Cissoid	سیسائڈ

ش

Branches	شاخیں
Conditions	شرائط

Legimate conclusion	درست نتیجہ
Quadratic	دودرجی
Binomial theorem	دورکنی مسئلہ
Double tangent	دوہرا مماس

ڈ

Degree	ڈگری، درجہ
Slope	ڈھال

ر

Relation	رابطہ
Vertex	راس
Vertical	راسی
Ouadrant	ربع
Order	رتبہ
Relation	رشتہ
Area	رقبہ
Area function	رقبہ تفاعل
Term	رکن
Convention	رواج
Roots	ریشے

ز

Hyperbola	زائد

Ordinate	عرض
Image	عکس
Sign ; Symbol	علامت
Notations	علامتیں
Ellypse	علیپس
Ellyptic function	علیپسی تفاعل
Trigonometry	علم مثلث
Normal	عماد
Perpendicular	عمود
Orthogonal	عمودی
Orthogonal trajectory	عمودی مستدیر
Substitution	عوضی
Integration by Substitution	عوضی سے تکمل

غ

Independent	غیر تابع
Independent variable	غیر تابع متغیر
Interminate	غیر حاصلی
Irrational	غیر ناطق
Indefinite	غیر معین

Form	شکل
Numerator	شمار کنندہ

ص

Increasing	صعودی
Case	صورت

ض

Product	ضرب
Coefficient	ضربیہ
Appendix	ضمیمہ
Corollary	ضمنی نتیجہ

ط

Odd	طاق
Locus	طریق
By trial	طریقۂ آزمایش سے
Described	طے ہونا

ظ

Represent; Denote	ظاہر کرنا

ع

General integral	عام تکملہ
General Solution	عام حل
Operator	عامل
Numerical	عددی (تعدادی)
Discontinuity	عدم تسلسل

Family of Curves قبیلۂ منحنی
Step قدم
Class قسم
Pole قطب
Polar قطبی
قطبی تحت مماس
Polar Co-ordinater قطبی مختصات
Polar equation قطبی مساوات
Diameter قطر
Sectorial area قطع کا رقبہ
Power; index قوت
Exponeutial function قوتی تفاعل
Arc قوس
Length of an arc قوس کی لمبائی
Rectification قوسی اصلاح
Proposition قول
Value قیمت

ک

Integer; whole number کامل عدد

Indefinite integral غیر معین تکملہ
Inequality غیر مساوی
Unequal roots غیر مساوی ریشے
Discontinuous غیر مسلسل
Improper غیر واجب
Improper integral غیر واجب تکملہ

ف

Formula فارمولا
Abscissa فصلہ
Folium فولیم

ق

Integrable قابل تکمل
Differentiable قابل تفرق
Base قاعدہ
RightCircular Cone قائم دائری مخروط
Right Circular Cylinder قائم دائری اسطوانہ
Rectangular axes قائم محاور
Rectangular hyperbola قائم زائد

Surface of revolution	گردشی سطح

ل

Infinite	لامتناہی
Infinity	لا تناہی
Infinite Series	لامتناہی سلسلہ
Asymptote	لامتناہی مماس
Envelope	لفاف
Loop	لوپ
Logarithm	لوگارتم
Lemma	لیما
Lemniscate	لیمنیسکیٹ

م

Discussion	مباحثہ
Origin	مبدا
Lamina	مادی چادر
Focus	ماسکہ
Focal chord	ماسکی وتر
Limit of a Sum	مجموعہ کی انتہا
Symmetrical	متشاکل
Operand	متعمل
Variable	متغیر

Integral powers	کامل عددقوتیں
Density	کثافت
Polynomial	کثیر رکنی
Cartesian	کارٹیزی
Sufficient test	کافی جانچ
Sphere	کرہ
Rigid material system	کڑا مادی نظام
Rigid bodies	کڑے اجسام
Fraction	کسر
Lesser indices	کمتر قوتیں
Minimum	کمترین عاقل

گ

Graph	گراف
About	گرد
Revolution	گردش
Centre of rotation	گردش کا مرکز
Solid of revolution	گردشی ٹھوس
Volume of revolution	گردشی حجم

Cone	مخروط
Conic	مخروطی
Imply	مراد رکھنا
Square	مربع
Squaring	مربع لینے پر
Combination	مرکب
Centre of Inertia	مرکز جمود
Centre of gravity	مرکز ثقل
Particular integral	مخصوص تکملہ
Particular Solution	مخصوص حل
Centroid	مرکز وسطانی
Equation	مساوات
Equations	مساواتیں
Equality	مساوی
Equiangular spiral	مساوی زاویہ پیچانی
Trajectory	مستدیر
Rectangle	مستطیل
Constant	مستقل
Continuous	مسلسل
Variable Separable	متغیر (الگ ہونے والے)
Convergent	متقارب
Proportional	متناسب
Finite	متناہی
Successive reduction	متواتر تحویل
Successive differentiation	متواتر تفرق
Positive	مثبت
Trigonometric	مثلثاتی
Solid	مجسم ٹھوس
Bounded	محدود
Arch	محراب
Axis	محور
Major axis	محور اکبر
Minor axis	محور اصغر
Perimeter; circumference	محیط
Co-ordinate	مختص
Co-ordinates	مختصات
Co-ordinate axes	مختصاتی محاور

Mass	مقدار
Assigned value	مقررہ قیمت
Reciprocal	مقلوب
Parabola	مکافی
Parabolic	مکافیہ
Mechanics	میکینیکی
Tangent	مماس
Transposition	منتقلی
Dependent	منحصر
Curve	منحنی
Curved Surface	منحنیائی سطح (خمیدہ سطح)
Logical justification	منطقی توجیہہ
Negative	منفی (نفی)
Comparison	موازنہ
Compare	موازنہ کرنا
Comparison integral	موازنی تکملہ
Comparison tests	موازنی جانچیں
Generator	مولد
Tend	مائل ہونا
Continuous distribution	مسلسل تقسیم
Theorem	مسئلہ
Common	مشترک
Common ratio	مشترک تناسب
Common tangent	مشترک مماس
Duplication formula	مثنیٰ فارمولا
Author	مصنف
Corresponding	مطابق
Absolute	مطلق
Absolute value	مطلق قیمت
Inverse	معکوس
Inverse function	معکوس تفاعل
Inverse operator	معکوس عامل
Inverse trigonometric function	معکوس مثلثاتی تفاعل
Determination	معلوم کرنا
Standard forms	معیاری شکلیں
Definite integral	معین تکملہ
Interpretation	مفہوم
Position	مقام

ن

Rational	ناطق
Rational function	ناطق تفاعل
n^{th} power	n ویں قوت
n^{th} root	n واں ریشہ
Unknown	نامعلوم
Result	نتیجہ
Intrinsic co-ordinates	نجی مختصات
Intrinsic equation	نجی مساوات
Denominator	نسب نما
Ratio	نسبت
Semi - vertical angle	نصف راسی زاویہ
Radius	نصف قطر
Radius vector	نصف قطری سمتیہ
Hemisphere	نصف کرہ
Semi-cubic	نصف کعبی
Semi-axes	نصف محاور
System	نظام
Aspect; theory	نظریہ
Theory of equation	نظریۂ مساوات
Negative	نفی (منفی)
Points of division	نقاط تقسیم
Points of intersection	نقطہ تقاطع
Point of contact	نقطہ تماس
Cusp	نوک

و

Singular Solution	واحد حل
Single - Valued	واحد قیمتی
Chord	وتر
Latus rectum	وتر خاص
Intuitively	وجدانی طور پر
Extension	وسعت (توسیع)

ہ

Homogeneous	ہم جنس
Homogenous equation	ہم جنس مساوات
Homogenous function	ہم جنس تفاعل

ہم جنس خطی مساوات	Homogenous linear equation
ہم خط	Collinear
ہم ماسکہ	Confocal
ہم محور	Co-axial
ہموار سطح کا رقبہ	Area of plane surface
ہموار خطہ	Plane region
ہم مرکز	Concentric

ی

یکتا	Unique
یک کیفی صعودی	Monotonically increasing
یک کیفی نزولی	Monotonically decreasing
یکساں	Uniform

خوشنویس: ایس۔ ایم۔ منظر

قیمت 22-25

نیشنل بک ٹرسٹ، انڈیا